

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРИ РАССЕЯНИИ НА МАЛОМ НЕОДНОРОДНОМ СФЕРИЧЕСКОМ ОБЪЕКТЕ

*А. Г. Шалашов**, *Е. Д. Господчиков*

*Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 11 апреля 2016 г.

Приводится эффективный и достаточно простой способ решения задачи о падении плоской электромагнитной волны на неоднородный объект с заданными сферически-симметричными распределениями диэлектрической и магнитной проницаемостей. В предположении, что объект мал по сравнению с вакуумной длиной волны, находятся поля внутри объекта и интегральные сечения рассеяния и поглощения. На масштабы полей внутри объекта не накладывается никаких ограничений, поэтому метод пригоден для исследования сложных случаев, в том числе связанных с локальным усилением и поглощением электромагнитного поля в неоднородных резонансных средах.

DOI: 10.7868/S0044451016100059

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача дифракции плоской электромагнитной волны на однородной сфере была решена Густавом Ми в 1908 г. [1]. Это решение широко используется в самых различных областях, от традиционной метеорологии до оптической диагностики живых тканей, и подробно разбирается в большинстве фундаментальных курсов по электродинамике [2–4]. В 1960-е гг. были предприняты достаточно серьезные усилия по обобщению теории Ми на неоднородные объекты, прежде всего на сферически-симметричные плазменные образования, неоднородные в радиальном направлении [5–13]. Как правило, решение уравнений Максвелла искалось в виде разложения по векторным сферическим гармоникам с последующим численным решением граничной волновой задачи для радиальных мод. В неоднородной резонансной среде прямое решение волнового уравнения представляет собой отдельную достаточно сложную задачу. Сложившийся в настоящее время наиболее эффективный метод решения основан на использовании формализма функций Грина для сведения волновой задачи к объемному интегрально-дифференциальному уравнению для электрическо-

го поля [14–17]. Кроме того, широко применяется так называемый рекурсивный алгоритм Ми, в котором неоднородный объект рассматривается как система вложенных однородных сферических оболочек [18–21]. Для полноты картины следует отметить метод T -матрицы, который оказался чрезвычайно эффективным способом вычисления усредненных характеристик рассеяния на больших ансамблях частиц [22]. В целом общие методы решения задачи рассеяния на неоднородных объектах хорошо разработаны. Однако в отличие от стандартной задачи Ми, численные коды для решения неоднородной задачи рассеяния довольно сложны, не протестированы при всех возможных режимах рассеяния и не находятся в свободном доступе. Поэтому при решении конкретных задач часто разумно применять более простые подходы, адаптированные к рассматриваемому частному случаю.

В настоящей работе мы предлагаем метод, открывающий новые возможности как для построения новых аналитических решений, так и для быстрого создания эффективных численных схем. Мы рассматриваем задачу рассеяния на радиально-неоднородном сферически-симметричном объекте в предположении, что этот объект мал по сравнению с длиной волны падающей плоской электромагнитной волны,

$$k_0 a < 2\pi, \quad (1)$$

* E-mail: ags@appl.sci-nnov.ru

где a — радиус объекта, $k_0 = \omega/c$. Это позволяет ограничиться рассмотрением первых двух сферических гармоник, отвечающих электро- и магнитодипольному вкладам. Для этих гармоник мы строим строгие решения уравнений Максвелла, не накладывая никаких ограничений на пространственные масштабы полей внутри объекта. Поэтому метод хорошо подходит для исследования сложных случаев, связанных с локальным резонансным усилением и поглощением электромагнитного поля в неоднородных плазмоподобных средах. Такие задачи возникают во многих современных приложениях: компактные плазменные источники излучения [23], микроволновая обработка материалов [24], кластерная плазма [25], другие приложения наноплазмоники. При этом мы выходим за пределы электростатического приближения [7], обычно применяемого для качественного описания резонансного взаимодействия на очень маленьких объектах ($k_0 a \ll 1$), поэтому метод применим вплоть до $k_0 a \sim 1$. Отметим, что для рассматриваемых задач характерны очень резкие вариации поля в резонансной области, что делает неприменимыми кусочно-однородные модели [16–19]. Предлагаемый в работе метод также применим для оптически плотных частиц, внутри которых укладывается много длин волн.

Предлагаемый подход основан на реализации метода инвариантного погружения (invariant embedding), частным случаем которого является хорошо известное уравнение Риккати, возникающее в теории распространения волн в плоскостойких средах [26]. Идея метода инвариантного погружения была первоначально предложена в работах Амбарцумяна [27] и Чандрасекара [28]; достаточно полное представление о применении метода к задачам распространения электромагнитных волн в плоскостойких средах можно получить из монографии Кляцкина [29]. В настоящей работе мы опираемся на формализм, предложенный в [30, 31] и позволяющий обобщить метод инвариантного погружения на волновые задачи с тензорным электромагнитным откликом, пространственной дисперсией и неоднородной неоднородностью. В основе метода лежит представление точного волнового поля в неоднородной среде в виде совокупности взаимодействующих ортогональных мод, разбитых на две группы, отвечающие встречным волнам. Если задача допускает такое разделение, то существует возможность определения « R -оператора», характеризующего связь между встречными волнами, путем решения нелинейного эволюционного уравнения типа Риккати с универсальными граничными

условиями, не зависящими от деталей падающего на слой излучения. По известному R -оператору для любой заданной структуры падающего излучения волновое поле во всем пространстве восстанавливается путем тривиальной линейной операции. Таким образом, метод позволяет свести исходную граничную задачу для уравнений Максвелла в неоднородной среде к эквивалентной задаче эволюционного типа. В частности, в отличие от исходных уравнений Максвелла, эволюционные уравнения устойчивы в областях линейного взаимодействия и резонансной диссипации волн, что позволяет применять простые стандартные методы численного интегрирования при решении «жестких» задач распространения волн. В настоящей работе мы реализуем данную методику для важного частного случая сферически-симметричной изотропной среды без пространственной дисперсии.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим объект с неоднородным, но сферически-симметричным распределением комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon(r)$, заданным в области $r < a$. Электромагнитное поле будем описывать комплексными амплитудами

$$\mathcal{E} = \text{Re}(\mathbf{E} \exp(-i\omega t)), \quad \mathcal{B} = \text{Re}(\mathbf{B} \exp(-i\omega t)).$$

Падающее поле зададим в виде линейно поляризованной плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси x ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{ext} &= E_0 \exp(ik_0 x) \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{B}^{ext} &= -E_0 \exp(ik_0 x) \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $k_0 = \omega/c$, \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z — орты вдоль соответствующих осей. Поле во всем пространстве удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = ik_0 \mathbf{B}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = -ik_0 \varepsilon(r) \mathbf{E}. \quad (3)$$

В центре объекта ($r = 0$) поле должно оставаться конечным. На границе объекта ($r = a$) непрерывны тангенциальные компоненты полей \mathbf{E} , \mathbf{B} и автоматически — нормальная компонента поля $\varepsilon \mathbf{E}$. Вдали от объекта ($r \rightarrow \infty$) поле переходит в суперпозицию поля плоской волны (2) и расходящейся сферической волны ($\propto \exp(ik_0 r)/r$) — это является условием излучения. Наша задача — найти решения уравнений Максвелла, удовлетворяющие всем перечисленным условиям.

Как уже отмечалось во Введении, будем считать, что объект мал по сравнению с вакуумной длиной

волны, т. е. выполнено условие (1). Это означает, что для внешнего наблюдателя объект в первом приближении создает поле, близкое к полю двух диполей — электрического и магнитного. Это разделение является частным случаем разбиения на ортогональные (в сферически-симметричной среде) ТМ- и ТЕ-моды [2–4]. Мы не накладываем никаких ограничений на поле внутри объекта. В частности, внутри объекта может убираться много длин волн ($\varepsilon \rightarrow \infty$), могут возникать резонансы среды ($\varepsilon = 0$) и области непропускания ($\varepsilon < 0$). Мы также не накладываем ограничений на масштаб пространственного изменения диэлектрической проницаемости, в частности, $\varepsilon(r)$ может иметь произвольные разрывы.

3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВСТРЕЧНЫХ ТМ-ВОЛН

Рассмотрим для определенности электродипольную задачу. Дипольное приближение навязывает определенную угловую структуру решениям уравнений Максвелла. Наиболее удобное представление для этой структуры предложено в курсе Ландау и Лифшица [32]. Пусть $\phi(r)$ есть сферически-симметричное решение скалярного уравнения Гельмгольца в однородной среде

$$\Delta\phi + k^2\phi = 0, \quad k = k_0\sqrt{\varepsilon}. \quad (4)$$

Тогда поле

$$\mathbf{E} = \text{rot rot}(\phi\mathbf{e}_z), \quad \mathbf{B} = -ik_0^{-1} \text{rot } \mathbf{E} \quad (5)$$

является частным решением уравнений Максвелла в однородной среде. По сути, это дипольное поле, отвечающее внешнему электрическому полю, ориентированному вдоль оси z , построенное с помощью вектора Герца $\mathbf{\Pi} = \phi(r)\mathbf{e}_z$, ориентированного в том же направлении. В виде (5) может быть выражено строгое решение уравнений Максвелла для полей внутри однородного шара. Нетрудно убедиться, что в неоднородной среде подстановка (5) в уравнения Максвелла (3) приводит к переопределенным уравнениям для $\phi(r)$, несовместным для $\varepsilon(r)$ общего вида. Тем не менее, решения неоднородной задачи в дипольном приближении удается сформулировать в виде разложения по базису, построенному на рассмотренных решениях однородной задачи.

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) так, что угол θ отсчитывается от направления электрического поля (оси z). Тогда ненулевые компоненты полей (5) с учетом соотношения (4) можно представить в явном виде как

$$E_r = -\frac{2\phi'}{r} \cos\theta, \quad E_\theta = -\frac{\phi' + k^2 r \phi}{r} \sin\theta, \quad (6)$$

$$B_\varphi = ik_0 \varepsilon \phi' \sin\theta,$$

где $\phi' = \partial\phi/\partial r$ и при вычислении этой производной k считается постоянным. Эта структура отвечает ТМ-волнам ($B_r = 0$). Рассмотрим четыре вспомогательных поля. Первые два, \mathbf{E}^+ и \mathbf{E}^- , получаются, если в соотношения (6) подставить решения уравнения Гельмгольца, отвечающие расходящейся и сходящейся сферическим волнам в однородной среде, соответственно

$$\phi_+ = \exp(ikr)/r, \quad \phi_- = \exp(-ikr)/r.$$

Еще одна пара полей, $\check{\mathbf{E}}^+$ и $\check{\mathbf{E}}^-$, отвечает расходящейся и сходящейся сферическим волнам в вакууме. Эти поля порождаются скалярными функциями

$$\check{\phi}_+ = \exp(ik_0 r)/r, \quad \check{\phi}_- = \exp(-ik_0 r)/r,$$

при этом в преобразовании (6) следует считать $k = k_0$, $\varepsilon = 1$. В явном виде имеем

$$\check{E}_r^\pm = 2\frac{1 \mp ik_0 r}{r^3} \exp(\pm ik_0 r) \cos\theta,$$

$$\check{E}_\theta^\pm = \frac{1 \mp ik_0 r - k_0^2 r^2}{r^3} \exp(\pm ik_0 r) \sin\theta, \quad (7)$$

$$\check{B}_\varphi^\pm = \frac{-ik_0 r \mp k_0^2 r^2}{r^3} \exp(\pm ik_0 r) \sin\theta.$$

Мы подошли к ключевой идее данной работы. Представим решение неоднородной задачи в виде разложения по вакуумным дипольным модам, определяемым соотношениями (7):

$$E_\theta = a_+ \check{E}_\theta^+ + a_- \check{E}_\theta^-, \quad B_\varphi = a_+ \check{B}_\varphi^+ + a_- \check{B}_\varphi^-, \quad (8)$$

$$E_r = \left(a_+ \check{E}_r^+ + a_- \check{E}_r^- \right) \varepsilon^{-1}.$$

Здесь $a_+(r)$ и $a_-(r)$ — неизвестные функции, имеющие смысл комплексных амплитуд расходящейся и сходящейся сферических волн. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что если поля в форме (8) подставить в уравнения Максвелла (3), то из получившихся в результате шести скалярных соотношений только два будут отличны от тождественного нуля. В результате получим два дифференциальных уравнения первого порядка для a_+ и a_- , что эквивалентно одному скалярному волновому уравнению второго порядка. Чтобы понять, почему предложенная замена полевых переменных (8) приводит к скалярной волновой задаче, рассмотрим альтернативный способ вывода, приводящий к тем же уравнениям.

Для этого достаточно рассмотреть возмущение электромагнитного поля, вносимое бесконечно тонким сферическим слоем с диэлектрической проницаемостью ε . Поскольку слой тонкий, диэлектрическую проницаемость внутри слоя можно считать однородной. Поэтому поля внутри слоя можно представить как линейную суперпозицию введенных выше полей \mathbf{E}^+ и \mathbf{E}^- . Снаружи слоя по условиям задачи поле вакуумное, поэтому оно представлено в виде суперпозиции полей \check{E}^+ и \check{E}^- . Запишем условие непрерывности тангенциальных полей на внутренней

$$\begin{aligned} a_+ \check{E}_\theta^+(r) + a_- \check{E}_\theta^-(r) &= b_+ E_\theta^+(r) + b_- E_\theta^-(r), \\ a_+ \check{B}_\varphi^+(r) + a_- \check{B}_\varphi^-(r) &= b_+ B_\varphi^+(r) + b_- B_\varphi^-(r) \end{aligned} \quad (9)$$

и внешней

$$\begin{aligned} (a_+ + da_+) \check{E}_\theta^+(r + dr) + (a_- + da_-) \check{E}_\theta^-(r + dr) &= \\ &= b_+ E_\theta^+(r + dr) + b_- E_\theta^-(r + dr), \\ (a_+ + da_+) \check{B}_\varphi^+(r + dr) + (a_- + da_-) \check{B}_\varphi^-(r + dr) &= \\ &= b_+ B_\varphi^+(r + dr) + b_- B_\varphi^-(r + dr) \end{aligned}$$

границах слоя. Здесь $dX \equiv (dX/dr) dr$ обозначает изменение физической величины на слое от r до $r + dr$, а «перевернутая крышка» над E_θ и B_φ обозначает вакуумную структуру полей. Условие на внешней границе можно упростить:

$$\begin{aligned} da_+ \check{E}_\theta^+ + da_- \check{E}_\theta^- &= b_+ dE_\theta^+ + b_- dE_\theta^-, \\ da_+ \check{B}_\varphi^+ + da_- \check{B}_\varphi^- &= b_+ dB_\varphi^+ + b_- dB_\varphi^-. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что поскольку

$$B_\varphi = -\frac{1}{2} i \varepsilon k_0 r \operatorname{tg} \theta E_r,$$

непрерывность тангенциальной компоненты магнитного поля эквивалентна непрерывности нормальной компоненты вектора индукции электрического поля.

Уравнения (9), (10) можно рассматривать как систему относительно четырех неизвестных переменных: da_\pm/dr и b_\pm . Отсюда можно получить, что приращения амплитуд da_\pm линейно зависят от самих амплитуд встречных волн перед слоем,

$$\begin{aligned} da_+/dr &= m_{11} a_+ + m_{12} a_-, \\ da_-/dr &= m_{21} a_+ + m_{22} a_-. \end{aligned} \quad (11)$$

В явном виде коэффициенты в этих уравнениях выражаются как

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon - 1}{\check{\phi}_+ \check{\phi}'_- - \check{\phi}'_+ \check{\phi}_-} \times \begin{pmatrix} g_{+-} & g_{--} \\ -g_{++} & -g_{+-} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon k_0^2 r^2} \check{\phi}'_\alpha \check{\phi}'_\beta + \frac{1}{r} (\check{\phi}'_\alpha \check{\phi}'_\beta)' + k_0^2 \check{\phi}'_\alpha \check{\phi}'_\beta.$$

Подставляя $\check{\phi}_\pm$, окончательно получаем

$$\begin{aligned} m_{11} &= i \frac{\varepsilon - 1}{2k_0^3 \varepsilon r^4} (\varepsilon + 2 - (\varepsilon - 2)k_0^2 r^2 + \varepsilon k_0^4 r^4), \\ m_{12} &= i \frac{\varepsilon - 1}{2k_0^3 \varepsilon r^4} ((\varepsilon + 2)(1 + 2ik_0 r) - \\ &- (3\varepsilon + 2)k_0^2 r^2 - \varepsilon k_0^3 r^3 (2i - k_0 r)) \exp(-2ik_0 r), \\ m_{11} &= -m_{22}, \quad m_{21} = m_{12}(-k_0). \end{aligned} \quad (13)$$

Коэффициент m_{21} получается из m_{12} заменой $k_0 \rightarrow -k_0$. Заметим, что при малых $k_0 r$ формулы можно упростить,

$$m_{11} = -m_{22} \approx i \frac{(\varepsilon - 1)(\varepsilon - 2)}{2k_0^3 \varepsilon r^4},$$

$$m_{12} \approx m_{11} - \frac{2(\varepsilon - 1)^2}{3\varepsilon r}, \quad m_{21} \approx -m_{11} - \frac{2(\varepsilon - 1)^2}{3\varepsilon r},$$

однако в численных расчетах мы рекомендуем использовать полные соотношения (13).

Итак, уравнения (11) и (13) описывают распределение электромагнитного поля в системе тонких сферических слоев, разделенных вакуумными зазорами. При этом поле в вакуумных зазорах определяется соотношениями

$$E_\theta = a_+ \check{E}_\theta^+ + a_- \check{E}_\theta^-, \quad B_\varphi = a_+ \check{B}_\varphi^+ + a_- \check{B}_\varphi^-, \quad (14)$$

$$E_r = a_+ \check{E}_r^+ + a_- \check{E}_r^-,$$

а поле внутри слоев, в силу непрерывности тангенциальных компонент E_θ , B_φ и нормальной компоненты εE_r , определяется соотношениями (8). При стремлении ширины зазоров и слоев к нулю получаем, что уравнения (8), (11), (13) полностью эквивалентны уравнениям Максвелла с неоднородным $\varepsilon(r)$ и заданной (дипольной) угловой структурой решения. В этом можно убедиться непосредственной подстановкой.

По способу построения получившиеся уравнения не содержат производных $\varepsilon(r)$, т. е. параметров среды, что позволяет применять их к задачам с разрывами.

4. УРАВНЕНИЕ РИККАТИ

Уравнения (11) записаны в форме, специально выбранной для применения метода инвариантного погружения в своей простейшей (скалярной) форме. Введем новую неизвестную переменную $R(r)$, связывающую амплитуды встречных волн:

$$a_+ = Ra_- \tag{15}$$

Физически, это локальный коэффициент отражения сходящейся сферической волны в расходящуюся волну из-за неоднородности среды. В силу уравнений (11)

$$\begin{aligned} da_+/dr &= (m_{11}R + m_{12})a_-, \\ da_-/dr &= (m_{21}R + m_{22})a_-. \end{aligned} \tag{16}$$

Комбинируя (15) и (16), получаем замкнутое уравнение для коэффициента отражения, в которое уже не входят амплитуды встречных волн:

$$\frac{dR}{dr} = m_{12} + (m_{11} - m_{22})R - m_{21}R^2. \tag{17}$$

Это уравнение Риккати, хорошо известное в теории распространения волн в плоскостойких средах. Сферическая неоднородность вносит специфику и в коэффициенты этого уравнения, и в связь его решений с реальными электромагнитными полями, и в граничные условия. Однако общая схема построения решения не отличается от плоского случая. Сначала находится решение уравнения Риккати, для этого необходимо знать значение R в некоторой точке. Затем находится a_- , для чего используется второе из уравнений (16) и граничное условие для падающего поля, заданное, вообще говоря, в любой другой точке. После этого по известным R и a_- вычисляется $a_+ = Ra_-$ и восстанавливается распределение исходного поля (8). Таким образом, исходная векторная граничная волновая задача сводится к эволюционной задаче, точнее, к последовательному решению двух скалярных уравнений первого порядка.

5. ВНУТРЕННЕЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ

Граничное условие для уравнения Риккати определяется условием конечности электромагнитного поля в центре объекта. Для этого достаточно потребовать, чтобы при $r \rightarrow 0$ встречные волны полностью компенсировали сингулярности друг друга, образуя стоячую волну, отвечающую несингулярному потенциалу

$$\phi_0 = \sin(kr)/r.$$

В наших обозначениях это соответствует условию $R(0) = -1$.

Однако это очень простое физическое условие неприменимо при численном интегрировании уравнения Риккати из-за расходимостей при $r \rightarrow 0$ в самих коэффициентах этого уравнения. Интегрирование разумно начать из некоторой конечной точки $r = r_0 > 0$, полагая при этом, что $r_0 \ll a$. Точнее, достаточно считать, что внутренняя область $r < r_0$ настолько мала, что вариацией диэлектрической проницаемости внутри нее можно пренебречь. Тогда внутреннюю задачу можно решить аналитически, в результате мы найдем значение $R_0 = R(r_0)$ в конечной точке r_0 , отвечающее отсутствию сингулярности поля при $r \rightarrow \infty$. Для этого достаточно рассмотреть систему (9), в которой $r = r_0$, на внутреннее поле наложено условие $b_- = -b_+$, а внешнее поле определено как $a_+ = R$, $a_- = 1$. Исключая b_{\pm} из уравнений, находим

$$R_0 = -\frac{(\varepsilon_0 - 1)\check{\phi}'_- \phi'_0 - \varepsilon_0 k_0^2 r_0 (\check{\phi}'_- \phi_0 - \check{\phi}_- \phi'_0)}{(\varepsilon_0 - 1)\check{\phi}'_+ \phi'_0 - \varepsilon_0 k_0^2 r_0 (\check{\phi}'_+ \phi_0 - \check{\phi}_+ \phi'_0)}.$$

Здесь $\varepsilon_0 = \varepsilon(r_0)$, потенциалы ϕ_0 (для среды) и $\check{\phi}_{\pm}$ (для вакуума) также следует вычислять в точке $r = r_0$. В явной форме это выражение можно представить в виде

$$R_0 = -\frac{((\varepsilon_0 - 1)(1 + ik_0 r_0) + ik_0 k^2 r_0^3) \sin kr_0 - ((\varepsilon_0 - 1)(1 + ik_0 r_0) - k^2 r_0^2) kr_0 \cos kr_0}{((\varepsilon_0 - 1)(1 - ik_0 r_0) - ik_0 k^2 r_0^3) \sin kr_0 - ((\varepsilon_0 - 1)(1 - ik_0 r_0) - k^2 r_0^2) kr_0 \cos kr_0} \exp(-2ik_0 r_0), \tag{18}$$

где $k = \sqrt{\varepsilon_0} k_0$. В дипольном приближении выражение (18) упрощается: при $k_0 r_0 \ll 1$ и $kr_0 \ll 1$ имеем

$$R_0 = -1 - i\frac{4}{3} \frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0 + 2} k_0^3 r_0^3 + O(k_0^5 r_0^5).$$

Эту формулу можно улучшить, переписав ее в эквивалентной форме:

$$R_0 \approx -\exp\left(i\frac{4}{3} \frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0 + 2} k_0^3 r_0^3\right). \tag{19}$$

Приведенное выражение, как и строгое решение (18), гарантирует свойство $|R_0| = 1$ для среды с действительным ε_0 , что с физической точки зрения эквивалентно закону сохранения энергии в среде без диссипации.

Таким образом, интересующее нас решение уравнения Риккати (17) в области $r_0 < r < a$ можно однозначно определить, задавая начальное значение коэффициента отражения $R(r_0) = R_0$ в соответствии с соотношениями (18) или (19).

6. ВНЕШНЕЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ

Граничное условие для амплитуды расходящейся волны a_+ определяется условием излучения на внешней границе объекта. Пусть по определению $a_-(a) = A$, кроме того из решения уравнения Риккати мы знаем $R(a) = R_a$. Тогда внешнее поле на границе объекта должно удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} A \left(R_a \check{E}_r^+ + \check{E}_r^- \right) &= p \check{E}_r^+ + E_r^{ext}, \\ A \left(R_a \check{E}_\theta^+ + \check{E}_\theta^- \right) &= p \check{E}_\theta^+ + E_\theta^{ext}, \\ A \left(R_a \check{B}_\varphi^+ + \check{B}_\varphi^- \right) &= p \check{B}_\varphi^+ + B_\varphi^{ext}. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения следует рассматривать при $r = a$. Слева стоит вакуумное поле в представлении (14). Справа стоит то же самое поле, но выраженное в виде суперпозиции внешнего поля и расходящейся волны, отвечающей рассеянному объектом излучению. Здесь мы явно учли условие излучения. В этих уравнениях два неизвестных параметра: амплитуда падающей сферической волны A и наведенный в объекте внешним полем электрический дипольный момент p .

Уравнения (20) невозможно строго удовлетворить для внешнего поля, заданного в виде бегущей плоской волны (2). Это связано с тем, что угловая структура плоской волны не является дипольной. Поэтому мы вынуждены заменить падающую волну на некоторый новый эффективный источник. Эффективное поле определяется как «проекция» исходного поля на дипольную угловую структуру:

$$\begin{aligned} \langle E_r^{ext} \rangle &= \frac{\int E_r^{ext} \cos \theta d\Omega}{\int \cos^2 \theta d\Omega}, & \langle E_\theta^{ext} \rangle &= \frac{\int E_\theta^{ext} \sin \theta d\Omega}{\int \sin^2 \theta d\Omega}, \\ \langle H_\varphi^{ext} \rangle &= \frac{\int H_\varphi^{ext} \sin \theta d\Omega}{\int \sin^2 \theta d\Omega}. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что для электрического диполя $\check{E}_r \propto \cos \theta$ и $\check{E}_\theta, \check{H}_\varphi \propto \sin \theta$; $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ — элемент телесного угла. Подставляя в эти выражения поле плоской волны (2) в сферических координатах,

$$\begin{aligned} E_r^{ext} &= E_0 \exp(ik_0 r \cos \varphi \sin \theta) \cos \theta, \\ E_\theta^{ext} &= -E_0 \exp(ik_0 r \cos \varphi \sin \theta) \sin \theta, \\ B_\varphi^{ext} &= -E_0 \exp(ik_0 r \cos \varphi \sin \theta) \cos \varphi, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} \langle E_r^{ext} \rangle &= \frac{3E_0}{k_0^3 a^3} (\sin k_0 a - k_0 a \cos k_0 a), \\ \langle E_\theta^{ext} \rangle &= \frac{3E_0}{2k_0^3 a^3} ((1 - k_0^2 a^2) \sin k_0 a - k_0 a \cos k_0 a), \\ \langle B_\varphi^{ext} \rangle &= -\frac{1}{2} ik_0 a \langle E_r^{ext} \rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

Нетрудно убедиться, что получившееся выражение для магнитного поля является условием совместности уравнений (20), при котором третье уравнение становится следствием первых двух. В итоге мы приходим к совместным уравнениям:

$$\begin{aligned} A \left(R_a \check{E}_r^+ + \check{E}_r^- \right) &= p \check{E}_r^+ + \langle E_r^{ext} \rangle \cos \theta, \\ A \left(R_a \check{E}_\theta^+ + \check{E}_\theta^- \right) &= p \check{E}_\theta^+ + \langle E_\theta^{ext} \rangle \sin \theta, \end{aligned}$$

решение которых имеет вид

$$A = \frac{3i}{4k_0^3} E_0, \quad p = \frac{3i}{4k_0^3} (R_a + 1) E_0. \quad (22)$$

Зная A и $R(r)$, можно просчитать уравнение (16) для a_- от $r = a$ до r_0 и затем восстановить все компоненты поля внутри объекта, применяя соотношения (15) и (8).

Заметим, что при этом мы находим строгое решение уравнений Максвелла для «эффективного» внешнего поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{ext} &= \langle E_r^{ext} \rangle \cos \theta \mathbf{e}_r + \langle E_\theta^{ext} \rangle \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{B}^{ext} &= -\frac{1}{2} ik_0 a \langle E_r^{ext} \rangle \sin \theta \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (23)$$

В этом решении электрический дипольный момент p полностью характеризует рассеянное поле снаружи объекта. Можно удостовериться, что найденные формулы дают правильные предельные переходы для однородного шара, для этого достаточно подставить выражения для коэффициента отражения (18) или (19) в выражение для дипольного момента (22). Например, в квазистатическом пределе (19) получаем известный результат:

$$p \approx \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 E_0.$$

Заметим, что для определения дипольного момента неоднородного объекта не возникает необходимости интегрировать уравнения для амплитуд встречных волн, достаточно найти решение уравнения Риккати.

В электродипольном приближении «ближнее» магнитное поле действительно оказывается малым при $k_0 a \ll 1$. Условие малости объекта по сравнению с вакуумной длиной волны подсказывает, что формулы (21) можно существенно упростить, взяв предел $k_0 a \rightarrow 0$, при этом

$$\langle E_r^{ext} \rangle = 1, \quad \langle E_\theta^{ext} \rangle = -1, \quad \langle B_\varphi^{ext} \rangle = 0.$$

Физически это означает, что мы пренебрегаем вариацией внешнего электрического поля на масштабах шара. Именно так было построено квазистатическое решение для однородного шара в курсе Ландау и Лифшица [32]. Однако этот подход приводит к более сложной связи между коэффициентом отражения и дипольным моментом. Более того, несмотря на то что возникающие поправки к дипольному моменту порядка $O(k_0^2 a^2)$ малы, они приводят к нарушению закона сохранения энергии в этом же порядке. Для введенного с помощью формул (21) дипольного момента (22) закон сохранения энергии выполняется строго — это является следствием того, что мы нашли строгое решение уравнений Максвелла. Баланс энергии для этого случая рассмотрен в разд. 10. Поэтому, несмотря на кажущееся превышение точности, для задания внешнего поля целесообразно использовать «полные» формулы (21).

7. СОПОСТАВЛЕНИЕ С РЕШЕНИЕМ МИ

Покажем, что для однородного шара развитый выше подход полностью эквивалентен учету первого члена разложения по электрическим мультиполям в решении Ми. И в нашем случае, и в классическом решении задачи Ми строятся строгие решения уравнений Максвелла, в которых для рассеянного поля выполнены условия излучения на бесконечность, поэтому достаточно показать эквивалентность внешнего поля в обеих задачах. В классическом решении задачи Ми используется отличный от нашего способ сведения векторной задачи к скалярной:

$$\mathbf{E} = \text{rot rot}(r\Pi_e \mathbf{e}_r), \quad \mathbf{B} = -ik_0 \varepsilon \text{rot}(r\Pi_e \mathbf{e}_r).$$

Здесь потенциал $\Pi_e(\mathbf{r})$ должен удовлетворять скалярному уравнению Гельмгольца, однако даже для дипольной моды не является его сферически-симметричным решением. Решение для $\Pi_e(\mathbf{r})$ представляется в виде ряда по сферическим гармоникам.

Выбором сферической системы координат $(r, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ с осью, направленной вдоль волнового вектора падающей плоской волны, удастся избавиться от двойного суммирования в разложении падающей волны и сформулировать ответ в виде суммы по мультипольным членам. Поле падающей плоской волны (2) при этом определяется следующим потенциалом [4]:

$$r\Pi_l^{ext} = \frac{E_0}{k_0^2} \sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \psi_l(k_0 r) P_l^1(\cos \tilde{\theta}) \cos \tilde{\varphi},$$

$$\psi_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi \rho}{2}} J_{l+1/2}(\rho).$$

Здесь $J_{l+1/2}$ — функции Бесселя, P_l^1 — присоединенные полиномы Лежандра. Физически эта сумма может быть интерпретирована как разложение бегущей плоской волны по стоячим сферическим гармоникам. Найдем «внешнее» поле, соответствующее первому (дипольному) слагаемому этого ряда:

$$r\Pi_e^{ext} = \frac{E_0}{k_0^2} \frac{3}{2} \left(\frac{\sin k_0 r}{k_0 r} - \cos k_0 r \right) \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} + \dots$$

Переходя к нашей сферической системе координат, в которой полярная ось направлена вдоль внешнего электрического поля ($\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \rightarrow \cos \theta$), и вычисляя $\text{rot rot}(r\Pi_e^{ext} \mathbf{e}_r)$, находим

$$E_r^{ext} = \frac{\partial^2 (r\Pi_e^{ext})}{\partial r^2} + k_0^2 r\Pi_e^{ext} = \langle E_r^{ext} \rangle \cos \theta,$$

$$E_\theta^{ext} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\Pi_e^{ext})}{\partial r \partial \theta} = \langle E_\theta^{ext} \rangle \sin \theta,$$

$$E_\varphi^{ext} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 (r\Pi_e^{ext})}{\partial r \partial \varphi} = 0.$$

Мы получили в точности эффективное поле (23).

Таким образом, мы убедились, что в нашем методе дипольный момент находится точно. Спроектировав внешнее поле на дипольную угловую структуру и найдя точное решение получившейся эффективной задачи, мы учли все возможные поправки в дипольном приближении. Более высокие мультипольные моды, возникающие при разложении падающего поля, ортогональны дипольной структуре, поэтому не могут дать вклад в дипольный момент. Этот вывод сохраняется и в неоднородном случае до тех пор, пока неоднородность обладает сферической симметрией.

8. СЛУЧАЙ ТЕ-ВОЛН

Магнитодипольное приближение может быть развито аналогично электродипольному. Для по-

строения базиса из встречных волн будем искать поля в виде

$$\mathbf{B} = \text{rot rot}(\phi \mathbf{e}_y), \quad \mathbf{E} = -ik_0^{-1} \varepsilon^{-1} \text{rot } \mathbf{B}$$

или

$$B_r = -\frac{2\phi'}{r} \cos \vartheta, \quad B_\vartheta = -\frac{\phi' + k^2 r \phi}{r} \sin \vartheta, \quad (24)$$

$$E_\varphi = -ik_0 \phi' \sin \vartheta.$$

Обращаем внимание, что угол ϑ здесь отсчитывается от направления внешнего магнитного поля (в отличие от угла θ , который отсчитывался от направления электрического поля). Эти соотношения определяют ТЕ-волны ($E_r = 0$). Ищем решение неоднородной задачи в виде разложения по вакуумным дипольным ТЕ-модам,

$$E_\varphi = a_+ \check{E}_\varphi^+ + a_- \check{E}_\varphi^-, \quad B_\vartheta = a_+ \check{B}_\vartheta^+ + a_- \check{B}_\vartheta^-, \quad (25)$$

$$B_r = a_+ \check{B}_r^+ + a_- \check{B}_r^-,$$

где

$$\check{B}_r^\pm = 2 \frac{1 \mp ik_0 r}{r^3} \exp(\pm ik_0 r) \cos(\vartheta),$$

$$\check{B}_\vartheta^\pm = \frac{1 \mp ik_0 r - k_0^2 r^2}{r^3} \exp(\pm ik_0 r) \sin(\vartheta), \quad (26)$$

$$\check{E}_\varphi^\pm = \frac{ik_0 r \pm k_0^2 r^2}{r^3} \exp(\pm ik_0 r) \sin(\vartheta)$$

определяются соотношениями (24) при $\phi = \check{\phi}_\pm = \exp(\pm ik_0 r)/r$. Записывая условия непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей, аналогичные уравнениям (9), (10), мы приходим к уравнениям для амплитуд встречных волн (11) с коэффициентами (12) и $g_{\alpha\beta} = \check{\phi}'_\alpha \check{\phi}'_\beta$. В явном виде коэффициенты для уравнений встречных волн есть

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon - 1}{2ik_0 r^2} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -(1+k_0^2 r^2) & -(1+ik_0 r)^2 \exp(-2ik_0 r) \\ (1-ik_0 r)^2 \exp(2ik_0 r) & 1+k_0^2 r^2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для ТМ-волны в немагнитной среде ($\mu = 1$) не возникает различия между полем в слое и в вакуумном зазоре, поскольку электрическое поле не имеет нормальной компоненты. Кроме того, непрерывность тангенциальной компоненты электрического поля эквивалентна непрерывности нормальной компоненты магнитного поля, так как

$$E_\varphi = \frac{1}{2} ik_0 r \text{tg } \vartheta B_r.$$

Импедансные уравнения (15)–(17) остаются в силе, меняется только внутреннее граничное условие для уравнения Риккати. Используя те же соображения, что и в разд. 5, коэффициент отражения в магнитодипольную моду для однородного шара с радиусом r_0 можно определить как

$$R_0 = -\frac{\varepsilon_0 \check{\phi}'_- \phi_0 - \check{\phi}'_- \phi'_0}{\varepsilon_0 \check{\phi}'_+ \phi_0 - \check{\phi}'_+ \phi'_0} =$$

$$= -\left(1 + \frac{2i\varepsilon_0 k_0 r_0}{\varepsilon_0(1-ik_0 r) + \sqrt{\varepsilon_0} k_0 r_0 \text{ctg}(\sqrt{\varepsilon_0} k_0 r_0) - 1}\right) \times$$

$$\times \exp(-2ik_0 r_0).$$

С учетом условия $k_0 r_0 \ll 1$ это выражение можно упростить:

$$R_0 \approx -\exp\left(\frac{2}{45} i(\varepsilon - 1) k_0^5 r_0^5\right).$$

Ввиду высокого порядка этого выражения по малому параметру в большинстве практических случаев при расчете рассеяния в ТЕ-волну на немагнитном объекте можно считать $R_0 = -1$. Поскольку угловые структуры для тангенциальных полей для электрического и магнитного диполей полностью совпадают (с учетом замены полей \mathbf{E} и \mathbf{B}), внешнее граничное условие для амплитуды расходящейся ТЕ-волны не изменится и будет по-прежнему определяться соотношениями (22). Эффективное внешнее поле при этом

$$\mathbf{E}^{ext} = \frac{1}{2} ik_0 a \langle E_r^{ext} \rangle \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi,$$

$$\mathbf{B}^{ext} = \langle E_r^{ext} \rangle \cos \vartheta \mathbf{e}_r + \langle E_\theta^{ext} \rangle \sin \vartheta \mathbf{e}_\theta,$$

где $\langle E_r^{ext} \rangle$ и $\langle E_\theta^{ext} \rangle$ определены формулами (21).

9. МАГНИТНЫЕ СРЕДЫ

Полученные выше выражения в задаче для ТЕ-волн получились проще, чем для ТМ-волн, что связано с отсутствием магнитной восприимчивости у объекта. Если бы мы с самого начала рассматривали магнитные среды с заданными $\varepsilon(r)$ и $\mu(r)$, то в соответствии с принципом перестановочной двойственности [3] магнитная и электрическая задачи были бы одинаковыми с точностью до замены магнитных величин электрическими.

Обобщение нашей теории на магнитные объекты с $\mathbf{B} = \mu(r)\mathbf{H}$ тривиально, хотя оно приводит к более громоздким выражениям. Например, для

электродипольной задачи можно получить, что коэффициенты в уравнениях для амплитуд встречных ТМ-волн определяются соотношением (12), в котором

$$g_{\alpha\beta} = \left(\frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon k_0^2 r^2} + \frac{\mu - 1}{\varepsilon - 1} \right) \check{\phi}'_{\alpha} \check{\phi}'_{\beta} + \frac{1}{r} \left(\check{\phi}_{\alpha} \check{\phi}_{\beta} \right)' + k_0^2 \check{\phi}_{\alpha} \check{\phi}_{\beta}.$$

Коэффициент отражения в дипольную ТМ-моду для однородного шара с радиусом r_0 может быть определен как

$$R_0 \approx -\exp \left(i \frac{4}{3} \frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0 + 2} k_0^3 r_0^3 + i \frac{2}{5} \frac{\mu_0 \varepsilon_0^2 + \varepsilon_0^2 - 6\varepsilon_0 + 4}{(\varepsilon_0 + 2)^2} k_0^5 r_0^5 \right).$$

Аналогичные выражения для ТЕ-волн получаются перестановкой ε и μ . Внешнее граничное условие (22) при рассмотрении магнитных задач не меняется, поскольку оно было сформулировано для вакуума. По этой же причине не меняется и процедура восстановления исходных полей.

10. БАЛАНС ЭНЕРГИИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Усредненная по периоду колебаний плотность потока энергии определяется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*].$$

В вектор Пойнтинга входит полное электромагнитное поле, состоящее из поля, рассеянного объектом, и заданного внешнего поля:

$$\mathbf{E} = p\check{\mathbf{E}}^+ + \mathbf{E}^{ext}, \quad \mathbf{B} = p\check{\mathbf{B}}^+ + \mathbf{B}^{ext}.$$

Допустим, что рассеянное поле определяется электрическим дипольным излучением. Тогда рассеянное поле задается формулами (7), а эффективное внешнее поле — формулами (23). Подставив эти поля в выражение для вектора Пойнтинга, находим, что снаружи объекта ($r > a$) поток энергии направлен строго вдоль радиус-вектора:

$$S_r = \frac{3}{8\pi} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} P_{\Sigma}, \quad P_{\Sigma} = \frac{\omega}{3} k_0^3 |p|^2 - \frac{\omega}{2} E_0 \operatorname{Im} p. \quad (27)$$

Здесь $P_{\Sigma} \equiv \oint S_r ds$ — полный поток энергии, протекающий через замкнутую поверхность, охватывающую тело. Поскольку в вакууме полный поток

сохраняется, он не зависит от конкретного выбора поверхности; но наиболее просто формулу (27) можно получить, если взять сферическую поверхность, соответствующую границе тела. Первое слагаемое в выражении для P_{Σ} возникает как результат действия рассеянного поля на себя и соответствует мощности потерь на рассеяние излучения. Второе слагаемое в P_{Σ} возникает как результат взаимодействия рассеянного и падающего полей. Поток электромагнитной энергии через замкнутую поверхность в вакууме может быть отличен от нуля только из-за диссипации (или генерации) энергии внутри, поэтому $P_{abs} = -P_{\Sigma}$, т.е. формула (27) выражает связь между дипольным моментом и суммарными потерями энергии за счет рассеяния волн и поглощения внутри объекта:

$$P_{sc} = \frac{\omega}{3} k_0^3 |p|^2, \quad P_{abs} = \frac{\omega}{2} E_0 \operatorname{Im} p - \frac{\omega}{3} k_0^3 |p|^2.$$

В этом смысле неоднородная задача ничем не отличается от однородной задачи Ми. С учетом выражения (22) для дипольного момента находим

$$P_{sc} = \frac{3\omega}{16k_0^3} |1 + R_a|^2 E_0^2, \quad P_{abs} = \frac{3\omega}{16k_0^3} (1 - |R_a|^2) E_0^2. \quad (28)$$

Таким образом, решение уравнения Риккати для коэффициента отражения сразу позволяет определить интегральные характеристики рассеяния, восстанавливать внутренние поля при этом не требуется.

С другой стороны, поле внутри объекта определяется в виде суперпозиции встречных волн (8). Подставив это поле в выражение для вектора Пойнтинга, находим, что внутри объекта ($r < a$)

$$S_r = \frac{3}{8\pi} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} P_{\Sigma}(r), \quad P_{\Sigma}(r) = \frac{\omega}{3} k_0^3 (|a_+|^2 - |a_-|^2). \quad (29)$$

Здесь $P_{\Sigma}(r) = \int S_r 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$ — полный поток энергии, протекающий через конгруэнтную телу сферу радиуса r (а не через произвольную поверхность). Диссипация в среде приводит к дополнительному фазовому сдвигу между полями E_r и B_{φ} , который порождает поток энергии вдоль θ :

$$S_{\theta} = -\frac{\omega}{4\pi} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^5} \times \left\{ (1 + k_0^2 r^2) (|a_+|^2 + |a_-|^2) + 2 \operatorname{Re} \left((1 - ik_0 r) a_+ a_-^* \exp(2ik_0 r) \right) \right\}.$$

Этот поток не дает вклада в $S_\Sigma(r)$. Зная плотность потока энергии, можно определить плотность объемных потерь:

$$q = \operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (S_\theta \sin \theta).$$

Для проверки согласованности наших уравнений диссипацию энергии в теле можно определить другим способом — как джоулевы потери

$$q_J = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*) = \frac{1}{2} \sigma |E|^2 = \frac{\omega}{8\pi} \operatorname{Im} \varepsilon |E|^2.$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что оба определения плотности потерь совпадают, если амплитуды встречных мод удовлетворяют уравнениям (11). Кроме того, если подсчитать полные потери энергии в теле, то мы получим уже известный нам результат (28):

$$\int q dV = \int q_J dV = P_{abs}.$$

Интеграл берется по всему объему тела. Выраженное этим равенством тонкое свойство, связывающее внутренние и внешние поля, весьма чувствительно к ошибкам в реализации нашего метода, поэтому оно может использоваться для контроля правильности расчетов.

Для приложений, как правило, важны суммарные потери в сферическом слое, которые, воспользовавшись уравнениями (11), можно выразить в явном виде:

$$\frac{dP_\Sigma}{dr} = \frac{2}{3} \omega k_0^3 \times \operatorname{Re} (m_{11} (|a_+|^2 + |a_-|^2) + (m_{12}^* - m_{21}) a_+ a_-^*). \quad (30)$$

Для иллюстрации рассмотрим тело без диссипации. В силу (13) для действительных ε справедливы тождества $\operatorname{Re} m_{11} = 0$ и $m_{12} = m_{21}^*$. Нетрудно убедиться, что эти соотношения обеспечивают сохранение потока энергии P_Σ в уравнении (30). Поэтому $P_\Sigma = 0$ всюду — и внутри, и снаружи тела. В силу (29) для коэффициента отражения справедливо равенство $|R| = 1$. И, наконец, в силу (28) при $|R| = 1$ получаем нулевое поглощение, рассеянная мощность при этом определяется фазой R_a .

При рассмотрении магнитодипольной задачи магнитные и электрические поля следует поменять местами и направить полярную ось вдоль \mathbf{V}^{ext} . Поскольку вектор Пойнтинга симметричен относительно такой перестановки, приведенные выше выкладки остаются верными и для магнитного

дипольного излучения. Более того, излучение электрического и магнитного диполей не создает интерференцию в полном потоке энергии. Для того чтобы убедиться в ортогональности дипольных волн, излучений, запишем поля в дальней зоне:

$$\mathbf{E}_e \propto \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r \times \mathbf{p}_e, \quad \mathbf{V}_e \propto \mathbf{e}_r \times \mathbf{p}_e,$$

$$\mathbf{E}_m \propto \mathbf{e}_r \times \mathbf{p}_m, \quad \mathbf{V}_m \propto \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_e \times \mathbf{p}_m.$$

Индексы «e» и «m» относятся соответственно к электрической и магнитной задачам, коэффициенты пропорциональности зависят только от модуля r . Члены вида $\mathbf{E}_e \times \mathbf{V}_m^*$ и $\mathbf{E}_m \times \mathbf{V}_e^*$ имеют четную степень по \mathbf{e}_r , поэтому они дают нулевой результат при вычислении суммарного потока энергии через сферическую поверхность. Другими словами, при вычислении интегральных характеристик рассеяния вклады электрического и магнитного дипольных моментов нужно просто суммировать.

В качестве теста мы применили наш метод для расчета интегральных сечений для однородного поглощающего шара. На рис. 1 приведены коэффициенты рассеяния и поглощения для однородного шара с $\varepsilon = 10 + 0.1i$, рассчитанные нашим методом как сумма электрического и магнитного вкладов и с помощью стандартного кода Ми `bhmie` [33]. Вплоть до $k_0 a \approx 1$ наблюдается хорошее совпадение результатов, полученных двумя независимыми методами. В частности, весьма точно совпадают первые максимумы коэффициентов рассеяния. Отклонения при $k_0 a > 1$ связаны с появлением в решении Ми резонансов более высоких порядков (квадрупольного и т. д.), вклады от которых не учитывались при расчете импедансным методом. На рис. 2 построены аналогичные сечения, отвечающие $\varepsilon = -2.1 + 0.05i$. Видно, что наш метод применим и вблизи поверхностного «плазмонного» резонанса $\varepsilon = -2$.

11. ПРИМЕР: ПОГЛОЩЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫМ ПЛАЗМЕННЫМ ШАРОМ

В качестве примера приложения нашего метода рассмотрим задачу о поглощении и рассеянии плоской линейно поляризованной электромагнитной волны на сферически-симметричном плазменном образовании. Пренебрегая пространственной дисперсией в холодной изотропной плазме, диэлектрическую проницаемость зададим в стандартном виде [34]:

$$\varepsilon(r) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)} \approx 1 - \frac{n_e(r)}{n_{cr}} \left(1 - \frac{i\nu_e}{\omega} \right).$$

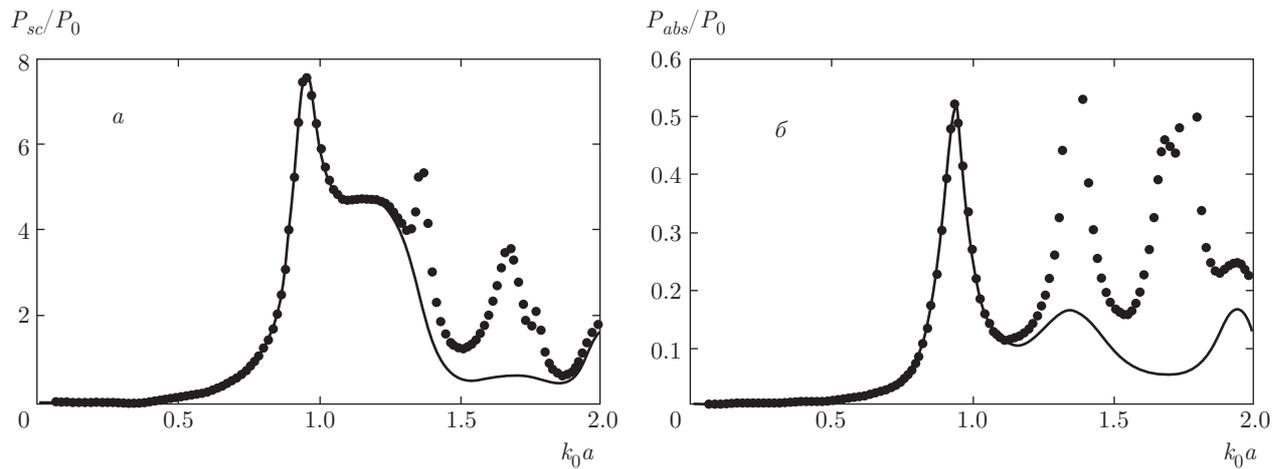


Рис. 1. Зависимости от $k_0 a$ коэффициентов рассеяния P_{sc}/P_0 (а) и поглощения P_{abs}/P_0 (б) (где $P_0 = \pi a^2 c E_0^2 / 8\pi$) для однородного шара с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 10 + 0.1i$. Сплошные линии получены подстановкой в формулы (28) результатов численного интегрирования импедансного уравнения (16) для электро- и магнитодипольной задач. Точки — результат расчета кодом Ми *bhmie*. Полные сечения рассеяния и поглощения получаются путем умножения приведенных коэффициентов на геометрическое сечение πa^2

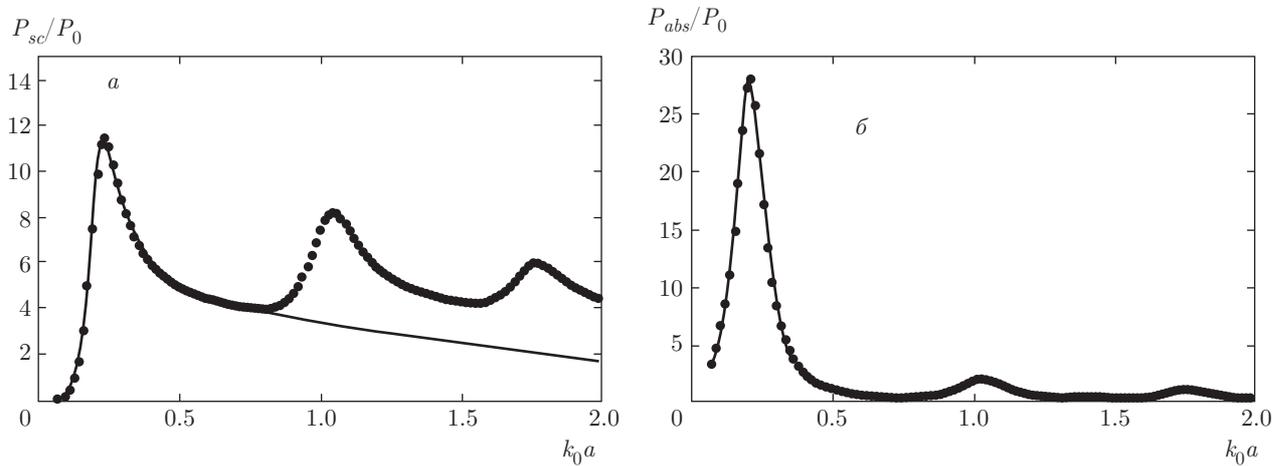


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но для $\epsilon = -2.1 + 0.05i$

Здесь ω_{pe} — электронная ленгмюровская частота, ν_e и n_e — эффективная частота соударений и концентрация электронов плазмы, $n_{cr} = m_e \omega^2 / 4\pi e^2$ — критическая концентрация, при превышении которой возникает отсечка электромагнитного излучения. Для определенности возьмем радиальный профиль концентрации плазмы в виде

$$n_e(r) = n_0(1 - r^m/a^m), \tag{31}$$

причем $n_0 > n_{cr}$, т.е. в центральной области плазма закритическая ($\text{Re} \epsilon < 0$). Будем считать, что соударения слабы, $\nu_e/\omega \ll 1$, а размер плазменного образования мал или сравним с вакуумной длиной волны, $k_0 a \lesssim 1$.

Хорошо известно, что в указанных предположениях основное поглощение происходит в условиях плазменного резонанса, $\text{Re} \epsilon = 0$. Полная поглощенная мощность при этом определяется величиной резонансного электрического поля в направлении градиента неоднородности и масштабом неоднородности среды в окрестности $\text{Re} \epsilon = 0$. Задача исследовалась с помощью численного решения векторных уравнений Максвелла для объектов произвольных размеров [11–13], а также в электростатическом приближении для очень маленьких шариков с $k_0 a \ll 1$ [7, 10]. Предложенная нами методика позволяет относительно просто выйти за пределы электростатического приближения и построить решение в облас-

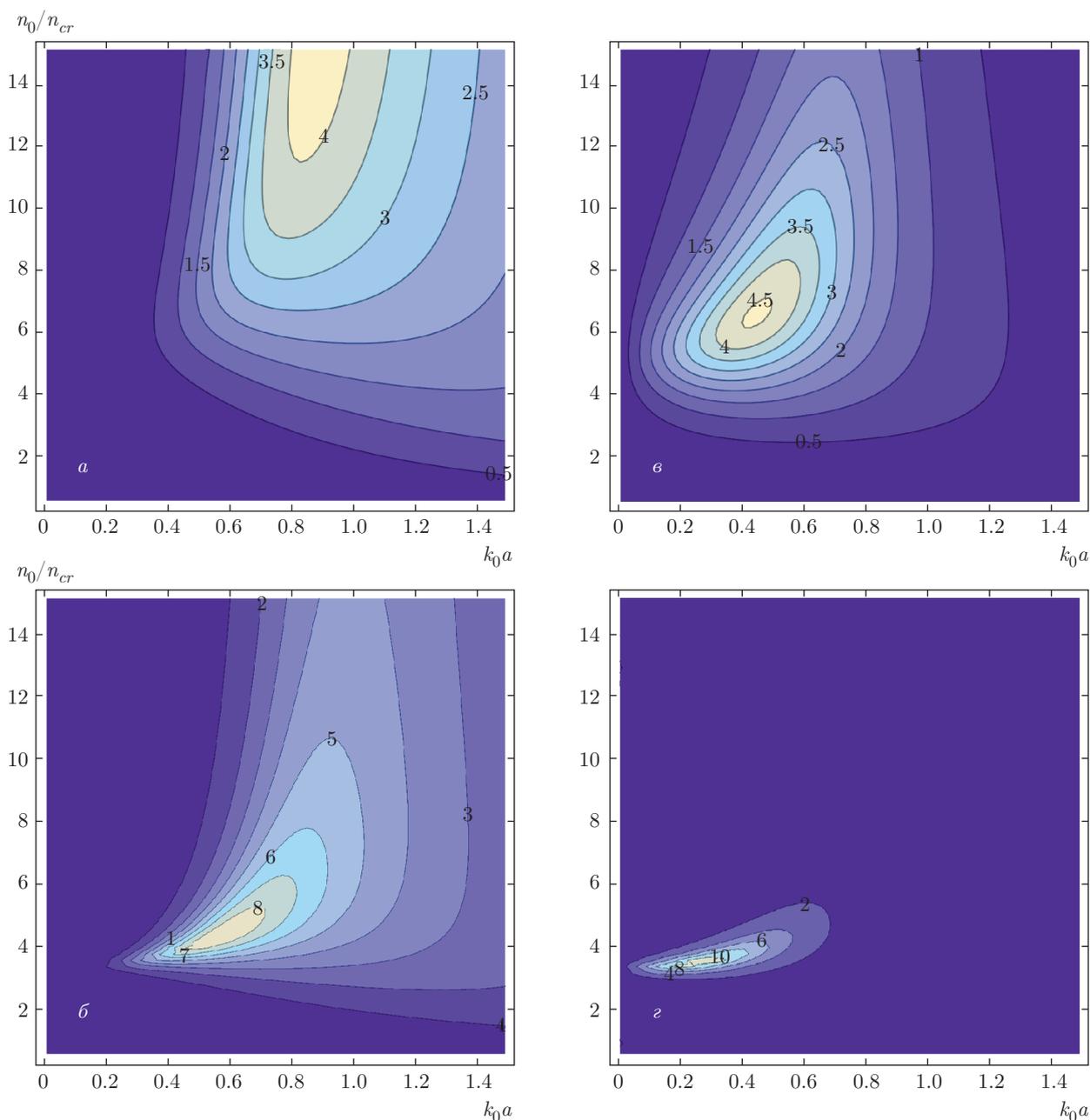


Рис. 3. (В цвете онлайн) Линии уровня для коэффициентов рассеяния P_{sc}/P_0 (а,б) и поглощения P_{abs}/P_0 (в,г) неоднородного плазменного шара в плоскости размер–плотность в центре при пологом ($m = 4$) (а,в) и крутом ($m = 32$) (б,г) профиле диэлектрической проницаемости $\varepsilon = 1 - (n_0/n_{cr})(1 - r^m/a^m)(1 - 0.001i)$

ти $k_0a \sim 1$, что важно, например, при моделировании СВЧ-разряда высокого давления в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах длин волн [23].

При фиксированном профиле концентрации плазмы коэффициенты поглощения и рассеяния плоской волны зависят от трех безразмерных параметров: приведенного размера шара k_0a , степени «закритичности» плазмы в центре n_0/n_{cr} и интенсивности соударений ν_e/ω . На рис. 3 представ-

лены двумерные распределения коэффициентов поглощения и рассеяния в плоскости параметров k_0a и n_0/n_{cr} при фиксированном значении ν_e/ω для двух различных профилей диэлектрической проницаемости: плавного и почти постоянного с большим градиентом на границе (задаваемыми, соответственно, $m = 4$ и $m = 32$ в формуле (31)). Видно, что эффективное взаимодействие с электромагнитной волной возможно только для

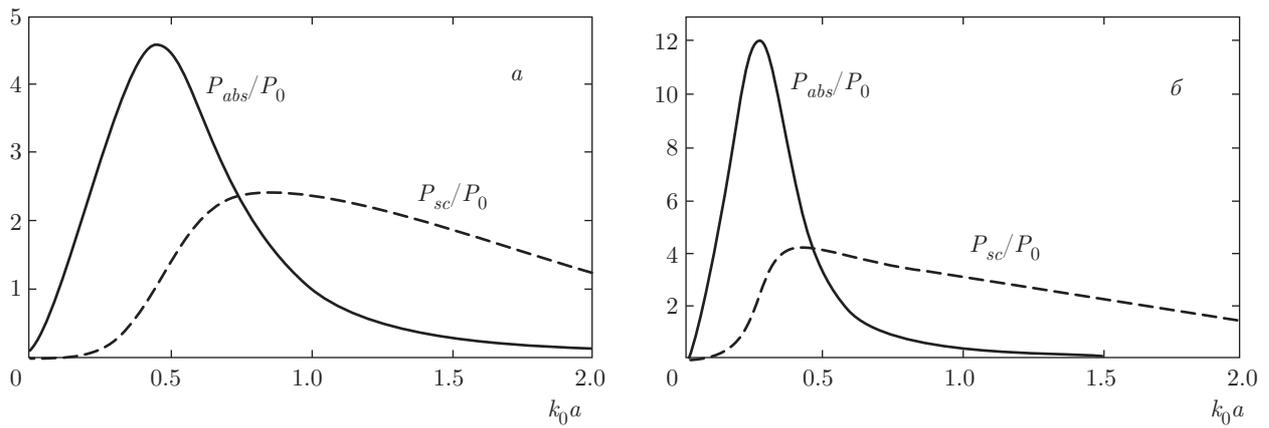


Рис. 4. Коэффициенты рассеяния P_{sc}/P_0 и поглощения P_{abs}/P_0 в зависимости от размера плазменного шара с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 - (n_0/n_{cr})(1 - r^m/a^m)(1 - 0.001i)$ при оптимальном для поглощения значении плотности: *a* — пологий профиль плотности плазмы, $m = 4$, $n_0 = 6.4n_{cr}$; *б* — крутой профиль, $m = 32$, $n_0 = 3.4n_{cr}$

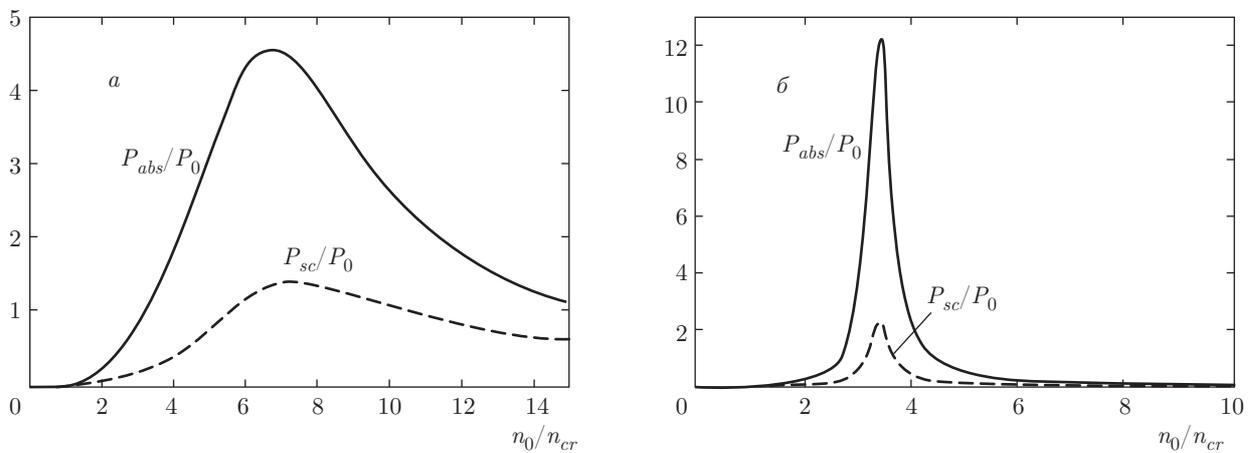


Рис. 5. Коэффициенты рассеяния P_{sc}/P_0 и поглощения P_{abs}/P_0 в зависимости от плотности плазменного шара с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 - (n_0/n_{cr})(1 - r^m/a^m)(1 - 0.001i)$ при оптимальном для поглощения размере шара: *a* — пологий профиль плотности плазмы, $m = 4$, $k_0a = 0.48$; *б* — крутой профиль, $m = 32$, $k_0a = 0.25$

плазмы с закритической плотностью. При этом существуют оптимальные для этого взаимодействия размеры плазменного шара, причем для поглощения и рассеяния излучения эти размеры различаются. Максимум поглощения достигается при $k_0a \approx 0.5$, $n_0 \approx 6n_{cr}$ для плавного профиля и $k_0a \approx 0.25$, $n_0 \approx 3n_{cr}$ для крутого профиля. Оптимальный для поглощения случай более подробно проиллюстрирован на рис. 4 и 5. На рис. 4 построены коэффициенты поглощения и рассеяния при оптимальном значении плотности как функции размера плазменного образования, а на рис. 5 эти же коэффициенты построены как функции плотности при оптимальном размере. Отметим, что для крутого профиля максимумы поглощения и

рассеяния реализуются при $\text{Re } \varepsilon \approx -2$, т.е. отвечают резонансу «поверхностного плазмона» в полном соответствии с выводами теории [7]. В существенно менее добротном случае плавного профиля поверхностный резонанс размывается, а максимум поглощения смещается в сторону больших центральных плотностей и более крупных размеров. При этом поглощение мощности внутри объекта происходит при постоянной плотности $n_e = n_{cr}$, отвечающей плазменному резонансу $\text{Re } \varepsilon = 0$.

Как и в плоском случае, интегральные характеристики поглощения и рассеяния весьма слабо зависят от конкретной величины ν_e/ω до тех пор, пока она достаточно мала, $\nu_e/\omega \ll (ad \ln n_e/dr)^{-1} \approx 1/m$.

Анализ пространственных профилей поглощаемой мощности показал, что поглощение происходит в узкой области в окрестности плазменного резонанса за счет резкого возрастания радиальной компоненты электрического поля. При этом используемые в наших дифференциальных уравнениях величины (R, a_+, a_-) остаются ограниченными величинами порядка единицы, а «сингулярность» появляется только в результате алгебраической операции при вычислении $E_r \propto 1/\varepsilon$. Это отделение «сингулярности» от дифференциальных уравнений обеспечивает отличную численную устойчивость расчетов. Поскольку резонансного усиления магнитного поля не происходит, основной вклад в интегральные сечения дает электродипольное излучение.

12. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы предложили метод для решения задачи о падении плоской электромагнитной волны на радиально-неоднородный объект в дипольном приближении. В предположении, что объект мал по сравнению с вакуумной длиной волны, найден способ восстановления распределений полей внутри объекта и интегральных сечений рассеяния и поглощения. На масштабы полей внутри объекта не накладываются никаких ограничений, поэтому метод пригоден для исследования сложных случаев, в которых поглощение поля связано с локальным резонансным усилением поля в неоднородной среде. Вместо волнового уравнения при этом рассматривается уравнение первого порядка (17), решения которого остаются ограниченными даже для резонансных сред. Кроме того, наш метод автоматически исключает возможность раскачки паразитных экспоненциальных мод в области непропускания, характерной для резонансных задач в неоднородных средах. Этим он выгодно отличается от сеточных численных методов, основанных на решении граничной волновой задачи (более подробно см. в [31]).

На практике из-за указанных свойств возможно использовать очень простые схемы для численного интегрирования, не задумываясь об их устойчивости. Однако за это приходится расплачиваться усложнением структуры самих уравнений. Поэтому для применения нашей методики можно порекомендовать пакеты компьютерной алгебры, которые позволяют автоматически получить уравнения (11), (17) и граничные условия к ним непосредственно из уравнений (9), (10) и (20). Так, например, все примеры в статье были рассчитаны в среде Mathematica®

[35]. При этом сначала все уравнения и граничные условия были сгенерированы в аналитической форме, а затем найдено их численное решение с использованием встроенного интегратора Mathematica®.

Мы ограничились дипольным приближением, поскольку это приближение оказалось достаточным для решения тех прикладных задач, для которых мы разрабатывали метод. Кроме того, это упрощение позволило сделать изложение нагляднее. Однако рассмотренный в работе метод может быть обобщен для расчета мультипольного излучения. Для этого достаточно добавить соответствующие вакуумные векторные сферические гармоники в представления полей (8) и (25). Угловые структуры, определяющие мультипольные моменты, можно взять из стандартного решения Ми. При этом амплитуды встречных полей a_{\pm} становятся векторами, а связывающий их оператор R — матрицей. До тех пор, пока среда сохраняет радиальную неоднородность, различные мультипольные моменты возбуждаются независимо, поэтому уравнение (17) распадается на независимые скалярные уравнения Риккати для диагональных элементов матрицы R . Нарушение сферической симметрии среды приведет к появлению «взаимодействия» между модами, однако для матрицы R по-прежнему можно будет сформулировать матричное уравнение типа (17). Аналогично может быть рассмотрена и цилиндрическая задача [36].

Работа выполнена в рамках проекта Российского научного фонда (грант № 14-12-00609).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Mie, *Ann. der Phys.* **330**(3), 377 (1908).
2. Дж. Стрэттон, *Теория электромагнетизма*, Мир, Москва (1949).
3. Дж. Джексон, *Классическая электродинамика*, Мир, Москва (1965).
4. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1973).
5. F. A. Albini, *J. Appl. Phys.* **33**, 3032 (1962).
6. P. J. Wyatt, *Phys. Rev.* **127**, 1837 (1962).
7. В. Б. Гильденбург, *ЖЭТФ* **45**, 1978 (1963).
8. D. Arnush, *IEEE Trans. Anten. Propag.* **AP-12**, 86 (1964).

9. R. S. Margulies and F. L. Scarf, *IEEE Trans. Anten. Propag.* **AP-12**, 91 (1964).
10. В. Б. Гильденбург, И. Г. Кондратьев, *Радиотехн. и электрон.* **10**, 658 (1965).
11. P. Bisbing, *IEEE Trans. Anten. Propag.* **14**, 219 (1966).
12. E. Buley, *IEEE Trans. Anten. Propag.* **15**, 677 (1967).
13. V. A. Permyakov, *Radiophys. Quant. Electron.* **11**(4), 294 (1968).
14. G. C. Kokkorakis and J. G. Fikioris, *IEEE Trans. Anten. Propag.* **55**, 3178 (2007); см. также *IEEE Trans. Anten. Propag.* **63**, 875 (2015).
15. E. Bilgin and A. Yapar, *IEEE Trans. Anten. Propag.* **63**, 2677 (2015).
16. G. P. Zouros and G. C. Kokkorakis, *IEEE Trans. Microwave Theory Techniq.* **63**, 3054 (2015).
17. G. P. Zouros and G. C. Kokkorakis, *IEEE Trans. Anten. Propag.* **63**, 2665 (2015).
18. Z. S. Wu and Y. P. Y. Wang, *Radio Sci.* **26**, 1393 (1991).
19. B. R. Johnson, *Appl. Opt.* **35**, 3286 (1996).
20. R. A. Shore, *IEEE Anten. Propag. Mag.* **57**(6), 69 (2015).
21. L. Cao, J. L. W. Li, and J. Hu, *IEEE Trans. Anten. Propag.* **61**, 836 (2013).
22. M. I. Mishchenko, L. D. Travis, and D. W. Mackowski, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **55**, 535 (1996).
23. M. Yu. Glyavin, S. V. Golubev, I. V. Izotov et al., *Appl. Phys. Lett.* **105**, 174101 (2014).
24. Yu. V. Bykov, K. I. Rybakov, and V. E. Semenov, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **34**, R55 (2001).
25. V. B. Gildenburg, V. A. Kostin, and I. A. Pavlichenko, *Phys. Plasmas* **18**, 092101 (2011).
26. Б. З. Каценелембаум, *Высокочастотная электродинамика*, Наука, Москва (1966).
27. В. А. Амбарцумян, *ЖЭТФ* **13** (9–10), 323 (1943).
28. С. Чандрасекар, *Перенос лучистой энергии*, Изд-во иностр. лит., Москва (1953).
29. В. И. Кляцкин, *Метод погружения в теории распространения волн*, Наука, Москва (1986).
30. A. G. Shalashov and E. D. Gospodchikov, *Plasma Phys. Control. Fusion* **52**, 025007 (2010).
31. А. Г. Шалашов, Е. Д. Господчиков, *УФН* **181**, 151 (2011).
32. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Физматлит, Москва (2005), Задача 1 на с. 302.
33. <http://www.astro.princeton.edu/draine/scattering.html>; оригинал кода из C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, Wiley, New York (1983), Appendix A.
34. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, Наука, Москва (1967).
35. <http://www.wolfram.com/mathematica>.
36. A. G. Shalashov, S. V. Golubev, E. D. Gospodchikov, and A. V. Vodopyanov, in *Proc. 8th Int. Workshop "Strong Microwaves and Terahertz Waves: Sources and Applications"*, Nizhny Novgorod, 2011, Institute of Applied Physics RAS, Nizhny Novgorod (2011), pp. 194–195.