ЖЭТФ, 2016, том 150, вып. 3 (9), стр. 435–444 © 2016

УСИЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОМЕРНЫХ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛАХ

В. С. Горелик [a], *В. В. Капаев* [a,b*]

[a] *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук*
119991, Москва, Россия

[b] *Национальный исследовательский университет «МИЭТ»*
124498, Москва, Россия

Поступила в редакцию 30 декабря 2015 г.

Исследовано распределение электромагнитного поля в ограниченном одномерном фотонном кристалле с использованием численного решения уравнений Максвелла методом матрицы переноса. Зависимость коэффициента пропускания T от периода d (или длины волны λ) имеет характерный вид с $M - 1$ (M — число периодов в структуре) максимумов $T = 1$ в области, соответствующей разрешенной зоне бесконечного кристалла, и нулевыми значениями в области запрещенной зоны. Распределение модуля поля $E(x)$ в структуре для параметров, соответствующих максимумам пропускания, ближайшим к границам запрещенных зон, имеет максимумы в центре структуры, причем значение в максимуме существенно превышает величину падающего на структуру поля. Для количества периодов $M \sim 50$ наблюдается усиление поля более чем на порядок. Для интерпретации численных результатов построена аналитическая теория, основанная на представлении решения в виде линейной комбинации встречных мод Флоке периодической структуры.

DOI: 10.7868/S0044451016090017

1. ВВЕДЕНИЕ

Актуальной задачей современной физики конденсированных сред является создание композитных диэлектрических и полупроводниковых материалов с управляемыми оптическими свойствами. В связи с этим большой интерес представляют одномерные слоистые среды с периодически чередующимися показателями преломления n_1 и n_2. При условии достаточно большого числа слоев такие среды в настоящее время классифицируются как одномерные фотонные кристаллы [1–4]. Наибольший интерес представляют периодические слоистые структуры, период которых сравним с длиной волны видимого диапазона (0.4–0.8 мкм). В спектре такого кристалла обнаруживаются так называемые стоп-зоны — области сильного отражения излучения. Спектральное положение стоп-зон зависит от показателей преломления слоев, периода соответствующей кристаллической решетки и угла падения излучения на поверхность кристалла. Изменение этих параметров открывает возможность для управления оптическими свойствами такого рода материалов. Как показывает теоретический анализ, в области краев стоп-зон ожидается существенное изменение параметров электромагнитных волн в связи с резким замедлением их групповой скорости и соответствующим возрастанием спектральной плотности энергии.

Важным примером нанокомпозитных фотонных кристаллов являются опаловые матрицы — искусственные опалы, построенные из плотно упакованных глобул (шариков) оксида кремния [5–9]. Структура искусственных опалов относится к гранецентрированной кубической кристаллической решетке. Направление [111] такой решетки соответствует направлению роста и характеризуется наиболее высоким совершенством периодической структуры. Оптические свойства опаловой матрицы в направлении [111] близки к свойствам одномерного фотонного кристалла. При этом доля объема трехмерного фотонного кристалла, занятого воздухом, составляет 0.26. Период соответствующей одномерной фотонной структуры обычно находится в диапазоне 200–400 нм и сохраняется для достаточно большого числа слоев (более 100).

* E-mail: kapaev@sci.lebedev.ru

К настоящему времени разработана также технология получения одномерных мезопористых фотонно-кристаллических пленок на основе анодного травления легированного кремния или алюминия [10, 11]. В результате формируются фотонно-кристаллические пленки, слои которых характеризуются различной степенью пористости при сохранении периодичности соответствующей одномерной кристаллической решетки. В данной работе решаются задачи получения количественных характеристик электромагнитных волн вблизи краев стоп-зон одномерных фотонных кристаллов и установления условий усиления электромагнитных волн в зависимости от периода структуры и значений показателей преломления в чередующихся слоях.

2. МЕТОД МАТРИЦЫ ПЕРЕНОСА ДЛЯ СЛОИСТО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

В работе [12] было показано, что в слоисто-периодической структуре, формируемой в приповерхностной нарушенной области CdS в результате импульсного лазерного отжига материала, возможно значительное увеличение величины напряженности электрического поля, приводящее к повышению эффективности отжига при последующих импульсах генерации. При этом период модуляции показателя преломления n определялся длиной волны возбуждающего излучения. Было показано, что при малой модуляции показателя преломления система находится вблизи края запрещенной зоны (стоп-зоны). При этом вследствие взаимодействия встречных мод Флоке наблюдается эффект усиления поля в структуре.

В данной работе анализируются возможности реализации такого рода эффектов в случае, когда электромагнитная волна падает на одномерный фотонный кристалл или конечную фотонно-кристаллическую пленку с периодической модуляцией $n(x)$. Уравнение Максвелла для электрического вектора электромагнитной волны при нормальном падении имеет вид

$$\frac{d^2E}{dx^2} + \left[\frac{2\pi}{\lambda}\,n(x)\right]^2 E = 0, \tag{1}$$

где λ — длина волны излучения в вакууме, $n(x)$ — периодическая функция с периодом d для области, ограниченной интервалом $[0, L]$ ($L = Md$, M — число периодов). Ограничимся ступенчатым видом функции $n(x)$:

$$\begin{aligned} n(x) &= n_1 \quad \text{при} \quad id < x < id + l_1, \\ n(x) &= n_2 \quad \text{при} \quad id + l_1 < x < (i+1)\,d, \end{aligned} \tag{2}$$

где номер периода $i = 0, 1, \ldots, M{-}1$, l_1 — ширина области с показателем преломления n_1, $l_2 = d - l_1$ — ширина области с показателем n_2. В каждой области постоянного n решение (1) можно представить в виде

$$E_j = A_j e^{ik_j(x-x_j)} + B_j e^{-ik_j(x-x_j)}, \tag{3}$$

x_j — левая граница j-го слоя. Далее ограничимся нормальным падением, тогда $k_j = 2\pi n_j/\lambda$. При падении волны слева в области $x < 0$ поле имеет вид

$$E = e^{ik_0x} + re^{-ik_0x}, \tag{4}$$

а при $x > L$

$$E = te^{ik_0x}. \tag{5}$$

Для нахождения коэффициентов A_j и B_j, коэффициентов отражения r и пропускания t воспользуемся методом матрицы переноса.

Сшивая поля и их производные на границе слоев j и $j+1$, получаем связь коэффициентов A_{j+1} и B_{j+1} с A_j и B_j:

$$\begin{aligned} A_{j+1} &= 0.5\left[A_j e^{ik_jh_j}\left(1 + \frac{k_j}{k_{j+1}}\right) + \right.\\ &\qquad\left. + B_j e^{-ik_jh_j}\left(1 - \frac{k_j}{k_{j+1}}\right)\right], \\ B_{j+1} &= 0.5\left[A_j e^{ik_jh_j}\left(1 - \frac{k_j}{k_{j+1}}\right) + \right.\\ &\qquad\left. + B_j e^{-ik_jh_j}\left(1 + \frac{k_j}{k_{j+1}}\right)\right], \end{aligned} \tag{6}$$

где h_j — толщина j-го слоя. В матричном виде

$$\begin{pmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{j,j+1} \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0.5e^{ik_jh_j}\left(1+\dfrac{k_j}{k_{j+1}}\right) & 0.5e^{-ik_jh_j}\left(1-\dfrac{k_j}{k_{j+1}}\right) \\ 0.5e^{ik_jh_j}\left(1-\dfrac{k_j}{k_{j+1}}\right) & 0.5e^{-ik_jh_j}\left(1+\dfrac{k_j}{k_{j+1}}\right) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Применяя последовательно (7) ко всем границам, начиная с первой, и учитывая, что в соответствии с (4), (5) $A_0 = 1$, $B_0 = r$ (полубесконечный слой $x < 0$), $A_{2M+1} = t$, $B_{2M+1} = 0$ (полубесконечный слой $x > L$) получаем

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = \prod_j \mathbf{M}_{j,j+1} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Здесь

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \tag{9}$$

— матрица переноса структуры. Для коэффициентов отражения и пропускания получаем

$$r = -\frac{m_{12}}{m_{22}}, \quad t = \frac{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}}{m_{22}} = = \frac{k_1}{k_{2M+1}} \frac{1}{m_{22}}. \tag{10}$$

В формуле (10) учтено, что

$$m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = \det \mathbf{M} = \prod_j \det \mathbf{M}_{j,j+1},$$

$$\det \mathbf{M}_{j,j+1} = \frac{k_j}{k_{j+1}}.$$

Таким образом, определив из (10) величину r и используя (6), можно рассчитать распределение электрического поля во всей структуре.

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ

В качестве простейшей модели остановимся на случае одномерного фотонного кристалла с чередующимися слоями оксида кремния и воздуха, что соответствует параметрам опаловой матрицы. При этом полагаем $n_1 = 1.46$, $n_2 = 1$, $n_0 = n_{2M+1} = 1$.

На рис. 1 представлен типичный вид зависимости пропускания структуры $T = |t|^2$ от периода для числа периодов $M = 30$ и $l_1/d = 0.3$, полученный методом матрицы переноса. На вставке — увеличенная область, содержащая три первых максимума пропускания слева от первой запрещенной зоны. Отметим характерные особенности зависимостей $T(d)$: наличие серии интерференционных максимумов пропускания с $T = 1$ и областей с нулевым пропусканием (области непропускания — запрещенные зоны). Положение границ запрещенных зон хорошо соответствует значениям, полученным из дисперсионного соотношения для бесконечной периодической структуры [12, 13]:

$$\cos(kd) = \cos(k_1 l_1)\cos(k_2 l_2) - - \frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}\right)\sin(k_1 l_1)\sin(k_2 l_2), \tag{11}$$

где k — волновой вектор волны Флоке. Области отражения электромагнитной волны соответствуют параметрам, при которых модуль правой части (11) больше единицы. Для границ стоп-зоны имеем условие $\cos kd = \pm 1$, из которого следует $kd = \pi q$ ($q = = 1$ — первая зона, $q = 2$ — вторая и т. д.). Количество единичных максимумов пропускания в каждой разрешенной зоне равно $M - 1$ при условии $2n_1 l_1 < < \lambda$. Если в рассматриваемом диапазоне параметров d и λ выполняется условие $2n_1 l_1 = \lambda$, при котором имеет место единичное пропускание для структуры, содержащей один период, то появляются дополнительные единичные максимумы пропускания при $d/\lambda = (2n_1 l_1/d)^{-1}$.

Как показывают расчеты, наиболее интересным является распределение электромагнитного поля в структуре для параметров, соответствующих максимумам в пропускании. На рис. 2 представлены зависимости значений модуля электрического поля E от координаты x для первых четырех максимумов $T(d)$ слева от первой запрещенной зоны (стоп-зоны).

Как видно на рис. 2, распределение $E(x)$ имеет характерный вид с осцилляциями поля в каждом из периодов и плавной огибающей, причем число максимумов огибающей E_{max} равно номеру p максимума $T(d)$, отсчитанного от границы запрещенной зоны. Аналогичное поведение имеют зависимости $E(x)$ и для максимумов пропускания справа от запрещенной зоны, а также для второй и последующих запрещенных зон. Наиболее существенным моментом является то, что значение E_{max} превышает амплитуду падающего излучения (равную единице) и убывает с увеличением номера максимума p, т. е. с отходом от границы запрещенной зоны.

Для иллюстрации распределения поля вне максимумов пропускания на рис. 3 представлены зави-

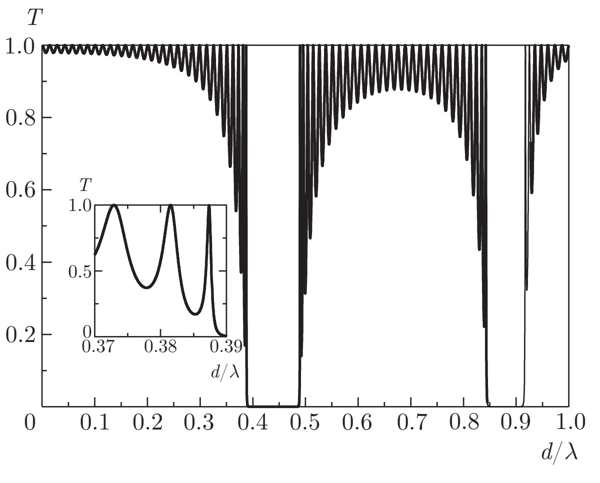

Рис. 1. Зависимость пропускания T от периода d для $n_1 = = 1.46$, $M = 30$, $l_1/d = 0.3$

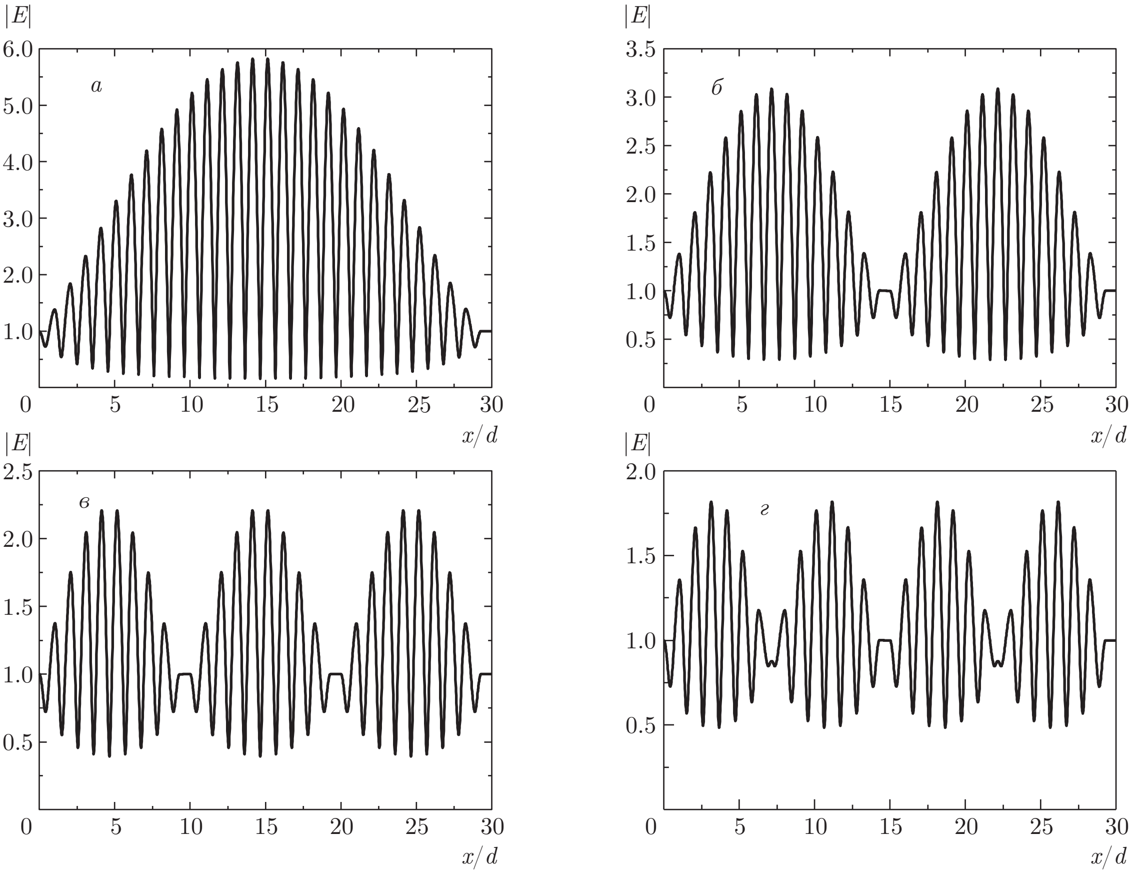

Рис. 2. Распределение модуля поля при $M = 30$, $l_1 = 0.3d$ для первых четырех максимумов пропускания слева от первой запрещенной зоны (*а* — 1, *б* — 2, *в* — 3, *г* — 4); значения d/λ равны соответственно 0.387, 0.382, 0.373, 0.363

симости $E(x)$ на границе зоны непропускания и в первых минимумах $T(d)$. Максимальные значения поля при этом порядка единицы и слабо зависят от номера минимума.

Интересно проследить поведение системы при изменении параметров структуры. На рис. 4 представлены зависимости максимальной амплитуды в структуре E_{max} от величины l_1/d — степени заполнения для первых максимумов $T(d)$ справа и слева от первых двух запрещенных зон при $M = 50$. Как видно на рисунке, характер зависимостей $E_{max}(l_1)$ существенно определяется номером ближайшей запрещенной зоны. Для первой имеется один максимум в районе $l_1 \sim 0.4d$, для второй — два максимума в областях $l_1 \sim 0.2d$ и $l_1 \sim 0.65d$ и глубокий минимум при $l_1 \sim 0.4d$. Амплитуда поля E_{max} при оптимальных значениях l_1 превышает падающее поле на порядок (плотность электромагнитной энергии поля — на два порядка).

Как будет показано ниже, усиление поля в центре структуры обусловлено взаимодействием и интерференцией встречных мод Флоке. Интенсивность взаимодействия электромагнитного поля с периодической структурой фактически определяет и ширину запрещенной зоны в бесконечной системе. В этой связи представляется интересным сопоставить характер изменения $E_{max}(l_1)$ с изменением ширины запрещенной зоны $\Delta(l_1)$. На рис. 5 представлены зависимости положения краев запрещенной зоны $(d/\lambda)_c$ от доли области с показателем преломления n_1 для первых двух запрещенных зон, полученные из (11), и соответствующие значения ширин первой и второй запрещенных зон. Характерной особенностью является наличие одного максимума ширины первой запрещенной зоны, и двух максимумов для второй. При $l_1/d = 0.407$ ширина второй запрещенной зоны обращается в нуль. При таком значении выполняется условие $k_1 l_1 = k_2 l_2$ и правая часть (11) не превышает единицу. В результате четные запрещенные зоны, определяемые условием $\cos kd = 1$, стягиваются в точку. Сопоставляя рис. 4 и 5, видим, что максимальная амплитуда по-

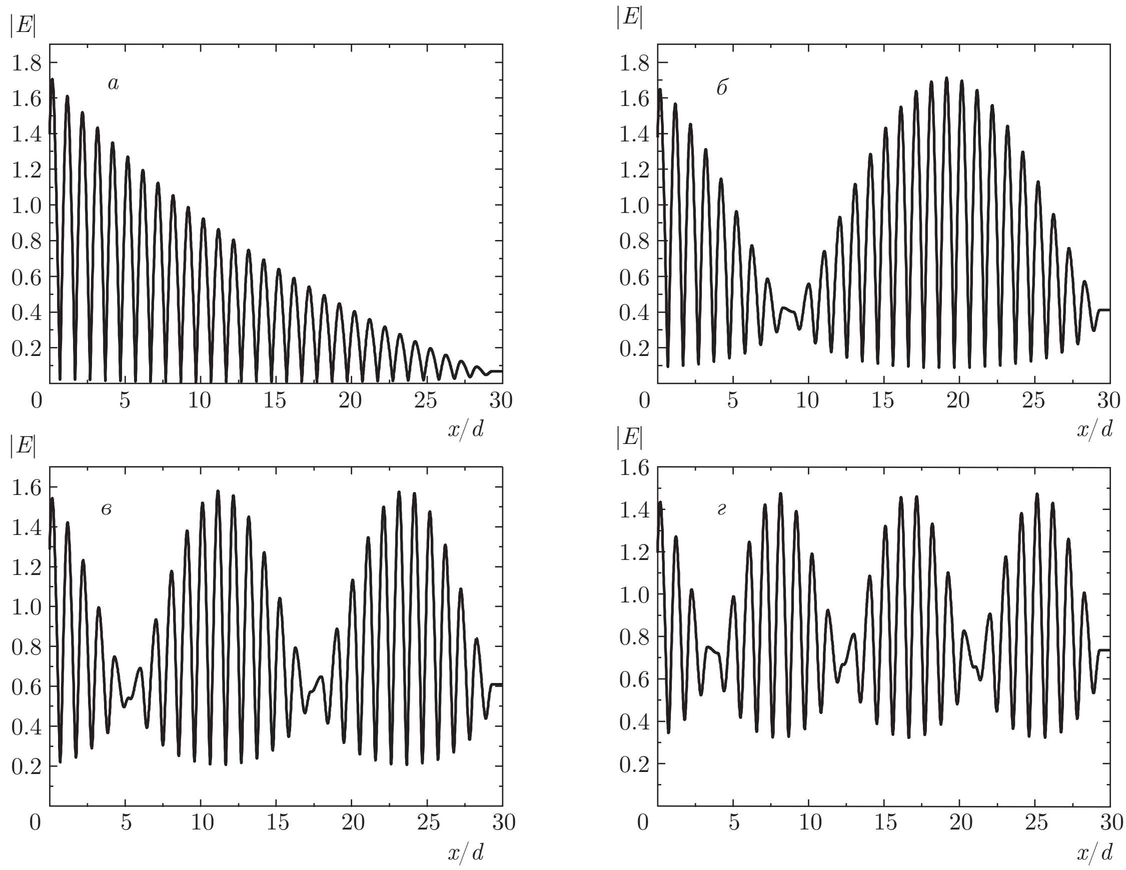

Рис. 3. Распределение поля при $M = 30$, $l_1 = 0.3$ вблизи порога непропускания $d = 0.39\lambda$ (*а*) и в первых минимумах пропускания $d/\lambda = 0.385$ (*б*), $d/\lambda = 0.378$ (*в*), $d/\lambda = 0.368$ (*г*)

ля для конечной структуры наблюдается для параметров, соответствующих максимумам ширины соответствующей запрещенной зоны, а минимум E_{max} при $l_1 \sim 0.4d$ соответствует обращению в нуль ширины второй запрещенной зоны.

На рис. 6 представлены зависимости E_{max} от количества периодов M в структуре. Характерная особенность — линейный рост амплитуды с размером структуры. Рост амплитуды обусловлен интерференцией волн, отраженных от границ раздела и границ образца. Интерференционная картина формируется в результате многократного прохождения волны в структуре, т. е. предыдущее рассмотрение верно, если длина когерентности значительно превышает длину образца. Кроме того, с ростом M расстояние между максимумами $T(d)$ уменьшается и при конечной ширине линии возбуждающего излучения суммарная картина получается в результате усреднения по длинам волн. Это приведет к остановке роста при некоторой длине структуры. Подавляет эффект усиления поля и поглощение в системе,

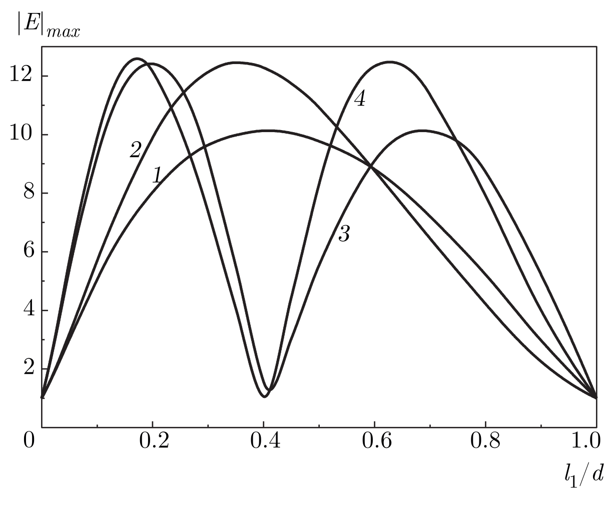

Рис. 4. Зависимость максимума модуля поля E_{max} от ширины области l_1 с $n_1 = 1.46$ для $M = 50$: кривые *1*, *2* соответствуют первой запрещенной зоне, кривые *3*, *4* — второй

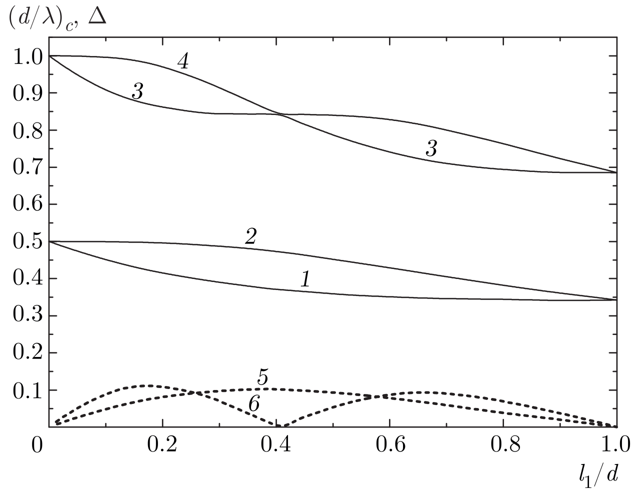

Рис. 5. Положение краев первой (*1, 2*), второй (*2, 3*) зон и ширин первой (*5*) и второй (*6*) запрещенных зон для сверхрешетки с $n_1 = 1.46$, $n_2 = 1$ при изменении степени заполнения l_1

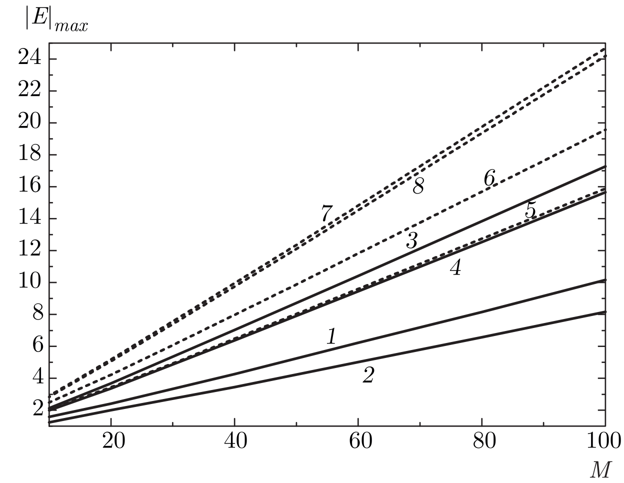

Рис. 6. Зависимость максимального значения электрического поля от количества периодов M для первых максимумов пропускания вблизи краев первой (*1, 5* — слева, *2, 6* — справа) и второй (*3, 7* — слева, *4, 8* — справа) запрещенных зон; $n_1 = 1.46$, $l_1 = 0.8d$ (сплошные *1–4*) и $l_1 = 0.2d$ (пунктир *5–8*)

причем с ростом M его влияние будет усиливаться и рост сменится уменьшением максимума поля с увеличением M.

Наряду с величиной поля в максимумах для конкретных приложений этого явления представляет интерес распределение поля по периоду в областях максимумов огибающей. На рис. 7 представлен пример такого распределения для первых максимумов пропускания справа и слева от первых двух запре-

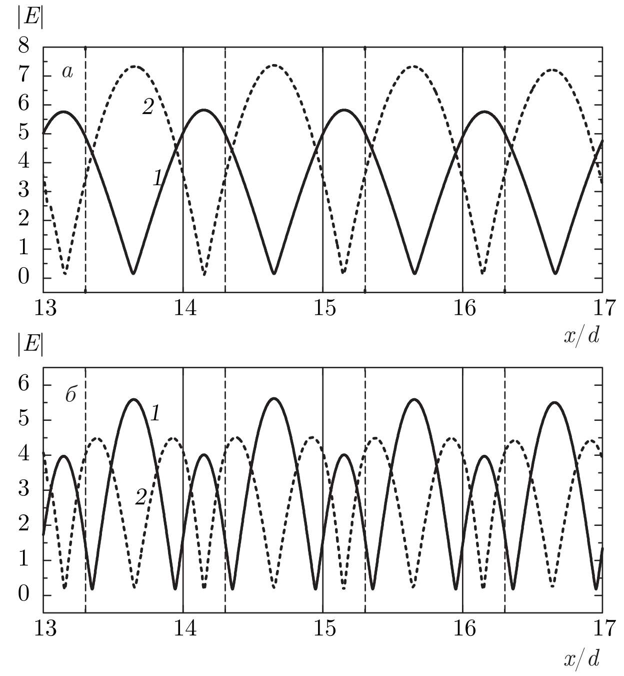

Рис. 7. Распределение модуля поля в структуре с $n_1 = 1.46$, $l_1 = 0.3$, $M = 30$. Сплошные линии — для первого максимума пропускания слева, пунктир — первый справа от первой (*а*) и второй (*б*) запрещенных зон

щенных зон. Можно отметить общие закономерности: количество локальных максимумов $|E|$ в пределах одного периода равно номеру ближайшей запрещенной зоны: для первой стоп-зоны, для левого максимума T в каждом из периодов максимум $|E|$ расположен в диэлектрическом слое, для правого — в вакууме; для второй и третьей зон один из максимумов ведет себя так же, но появляются дополнительные максимумы, расположенные в вакууме (для данной степени заполнения). Таким образом, выбирая значение периода (или длины волны), можно обеспечить требуемое положение максимума интенсивности поля в структуре. Как указано выше, изменения абсолютного значения поля в максимумах существенно зависит от степени заполнения периода диэлектриком l_1/d.

Были исследованы зависимости максимальных значений E_{max} поля в структуре от величины показателя преломления n_1. Характер этих зависимостей определяется величиной l_1 и может существенно различаться для экстремумов пропускания, ближайших к первой и второй зонам. На рис. 8 представлены зависимости $E_{max}(n_1)$ для двух значений l_1. Для максимумов, расположенных около первой запрещенной зоны, эти зависимости являются либо монотонно возрастающими с тенденцией к насыще-

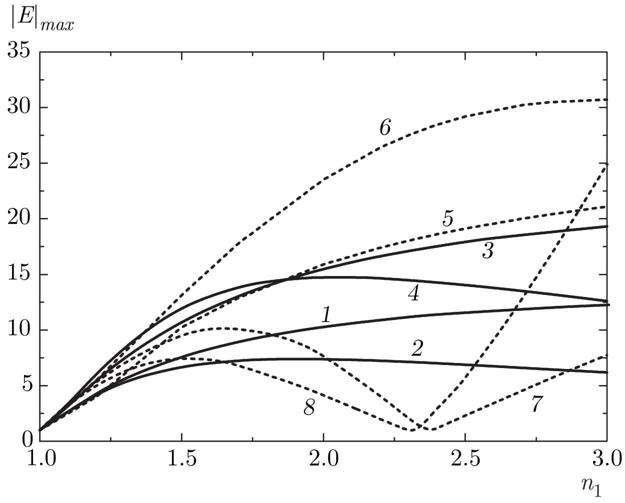

Рис. 8. Зависимость максимального значения поля от показателя преломления n_1 для $M = 50$, $l_1 = 0.7d$ (кривые *1–4*) и $l_1 = 0.3d$ (кривые *5–8*) для первых максимумов T около первой (*1, 2, 5, 6*) и второй (*3, 4, 7, 8*) запрещенных зон

нию при больших n, как для правых, так и для левых максимумов T (кривые *5*, *6* на рис. 8), либо монотонно возрастающими (кривая *1*) для левых максимумов T, и кривыми со слабым максимумом для левых (кривая *2*). Первое имеет место при малых значениях l_1, второе — при больших.

Для максимумов T, расположенных справа и слева от второй запрещенной зоны, закономерности оказываются более сложными. Для больших l_1 ($l_1 > 0.5d$) поведение $E_{max}(n_1)$ вполне аналогично случаю для максимумов, расположенных около первой запрещенной зоны (кривые *3*, *4*). Для меньших l_1 при некотором значении n_1 наблюдается глубокий минимум, в котором $E_{max} \sim 1$ (кривые *7*, *8*). Положение этого минимума соответствует условию обращения в нуль ширины второй запрещенной зоны. При изменении n_1 от 1 до 3 соответствующее значение l_1/d меняется от 0.5 до 0.25. Именно в этом интервале значений l_1 и наблюдаются глубокие минимумы в $E_{max}(n_1)$. При $l_1 < 0.25d$ минимум отсутствует, и зависимости $E_{max}(n_1)$ как для правого, так и для левого максимума T имеют слабый максимум, типа кривой *4* на рис. 8. Положение этого максимума коррелирует с шириной запрещенной зоны.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПО МОДАМ ФЛОКЕ

Для рассмотренной выше периодической структуры, по крайней мере, для достаточно больших M и в условиях единичного пропускания, как и в [12], можно воспользоваться теоремой Флоке и искать решение при $0 < x < L$ в виде комбинации встречных мод Флоке:

$$E(x) = C_+ u(x) e^{ikx} + C_- v(x) e^{-ikx}, \qquad (12)$$

где u и v — периодические с периодом d функции, k — волновой вектор, определяемый из (11). Коэффициенты C_+, C_-, r и t можно определить из непрерывности поля и его производной при $x = 0$ и $x = L$. Мы не будем целиком решать эту задачу, а ограничимся рассмотрением ситуации, соответствующей максимуму пропускания в предыдущей задаче, когда $|t| = 1$, поскольку именно при этом условии получаются наиболее интересные результаты.

Используя (12), поле в j-м периоде можно записать в виде

$$E(x + jd) = E_+(x) e^{ikjd} + E_-(x) e^{-ikjd}, \qquad (13)$$

где j — номер периода, а

$$E_+(x) = C_+ u(x) e^{ikx}, \quad E_-(x) = C_+ v(x) e^{-ikx}.$$

Поле при $x = L$ получается при $j = M$, $x = 0$

$$E(Md) = e^{ikMd} \left(E_+(0) + E_-(0) e^{-2ikMd} \right). \qquad (14)$$

Условию $|t| = 1$ соответствует $|E(Md)| = |E(0)|$ и, как следует из (14), будет выполнено, если

$$2kMd = 2\pi m. \qquad (15)$$

Для первой разрешенной зоны $kd < \pi$, поэтому соотношение (15) будет выполнено для $M-1$ значений m ($m = M-1, M-2, \ldots, 1$). Для второй разрешенной зоны $\pi < kd < 2\pi$ и (15) также выполнено для $M-1$ значений m ($m = M+1, \ldots, 2M-1$). Такое же число единичных максимумов будет и в последующих разрешенных зонах. Это совпадает с полученными ранее результатами численного счета методом матрицы переноса (см. рис. 1).

В работах [14, 15] показано, что выражение для пропускания T и отражения R для конечной слоисто-периодической структуры можно записать в явном виде, используя унимодулярность матрицы переноса для одного периода. Из анализа формул для T и R в работе [15] делается вывод о том, что в каждой разрешенной зоне бесконечной решетки конечная структура содержит $M-1$ максимумов пропускания, причем значение T в максимуме равно единице. Таким образом, результаты нашего рассмотрения согласуются с полученными в [14].

Как показано выше, наибольший интерес представляют структуры с максимумами пропускания, ближайшими к границам запрещенных зон. Поэтому удобно отсчитывать номера максимумов T от границ зон и вместо m ввести величины $p = M - m$ для состояний вблизи первой запрещенной зоны слева, $p = m - M$ — справа и $p = \pm(2M - m)$ для второй зоны (знак плюс соответствует состояниям слева, минус — справа от запрещенной зоны). Тогда из (15) получаем, что последовательные максимумы пропускания будут наблюдаться при

$$kd = \pi(1 \pm p/M) \tag{16}$$

для первой зоны и

$$kd = \pi(2 \pm p/M) \tag{17}$$

для второй зоны ($p = 1, 2, \ldots$ — номер максимума). Подставляя значения (16), (17) в дисперсионное уравнение (11), получим положение максимумов пропускания d_c, которые с высокой точностью совпадают с положениями, полученными из численного счета (рис. 1).

Как следует из (12), суммарная интенсивность поля в среде представляет собой комбинацию осциллирующих функций с периодами d и $d_1 = d/(1 - p/M)$ (для первой разрешенной зоны). Результирующая интенсивность (и модуль поля) представляет собой картину биений двух колебаний с близкими частотами. Можно показать, что наибольший период биений определяется условием $D = Md = (M - p)d_1$ и совпадает с длиной структуры L. При $p = 2$ и четном M периодом для интенсивности также является $D/2$. При нечетном M строгого периода $D/2$ не будет; тем не менее, структура с $D/2$ будет явно проявляться в огибающей поля. Аналогично, для $p = 3$ проявится структура с $D/3$ и т. д. Эти рассуждения объясняют зависимости $E(x)$, приведенные на рис. 2. Таким образом, простые рассуждения, основанные на теореме Флоке, позволяют объяснить основные закономерности поведения поля в ограниченной слоисто-периодической структуре.

Найдем распределение поля $E(x)$ в максимумах $t(d)$ методом Флоке. На интервале $[0, d]$ для каждой из мод Флоке решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} E^f_{\pm}(x) &= C_1 e^{ik_1 x} + D_1 e^{-ik_1 x} \quad \text{при} \quad 0 < x < l_1, \\ E^f_{\pm}(x) &= C_2 e^{ik_2(x-l_1)} + D_2 e^{-ik_2(x-l_1)} \\ &\qquad\qquad \text{при} \quad l_1 < x < d. \end{aligned} \tag{18}$$

Воспользовавшись теоремой Флоке в виде $E_{\pm}(x + d) = E_{\pm}(x)e^{\pm ikd}$, запишем решение на интервале $d < x < d + l_1$ через коэффициенты C_1 и D_1. Сшивая поле и производные при $x = l_1$ и $x = d$, получаем систему линейных уравнений для C_i и D_i

$$\begin{pmatrix} e^{ik_1l_1} & e^{-ik_1l_1} & -1 & -1 \\ k_1e^{ik_1l_1} & -k_1e^{-ik_1l_1} & -k_2 & k_2 \\ e^{ikd} & e^{ikd} & -e^{ik_2l_2} & -e^{-ik_2l_2} \\ k_1e^{ikd} & -k_1e^{ikd} & -k_2e^{ik_2l_2} & k_2e^{ik_2l_2} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \\ C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

равенство нулю определителя которой дает дисперсионное уравнение (11). Используя первые три уравнения системы (19), можно выразить коэффициенты через какой-либо один, например, C_1. Мы поступим иначе — потребуем выполнения условия $E(0) = 1$ (этому соответствует $C_1 + D_1 = 1$ и $r = 0$). Выражения для коэффициентов при этом имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.5 + i\,(-k_1\sin(k_1l_1)\sin(k_2l_2) + \\ &\qquad + k_2\cos(k_1l_1)\cos(k_2l_2) - k_2y)\,/H, \\ D_1 &= 0.5 + i\,(k_1\sin(k_1l_1)\sin(k_2l_2) - \\ &\qquad - k_2\cos(k_1l_1)\cos(k_2l_2) + k_2y)\,/H, \\ C_2 &= (k_2y\sin(k_1l_1) + k_1\sin(k_2l_2) + \\ &\qquad + i\,(k_1\cos(k_2l_2) - k_1y\cos(k_1l_1)))\,/H, \\ D_2 &= (k_2y\sin(k_1l_1) + k_1\sin(k_2l_2) - \\ &\qquad - i\,(k_1\cos(k_2l_2) - k_1y\cos(k_1l_1)))\,/H, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned} y &= e^{ikd}, \\ H &= 2\,(k_2\sin(k_1l_1)\cos(k_2l_2) + \\ &\qquad + k_1\cos(k_1l_1)\sin(k_2l_2))\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Для второй (встречной) моды Флоке коэффициенты C и D получаются из (20) заменой k на $-k$. Легко видеть, что $C_1(k) = D_1^*(-k)$, $C_2(k) = D_2^*(-k)$, т. е. решения для встречных мод Флоке являются комплексно сопряженными, $E_+(x) = E_-^*(x)$. Полное решение можно записать в виде

$$E(x + jd) = c_f E^f_+(x)e^{ikjd} + c_b E^f_-(x)e^{-ikjd}. \tag{22}$$

В рассматриваемом нами случае единичного пропускания ($r = 0$) выражения для коэффициентов при встречных модах Флоке c_f и c_b получаются из условий сопряжения с падающей волной на одной границе $x = 0$:

$$c_f = \frac{1}{2k_1k_2(\sin kd)}\left[k_1k_2\sin(kd) + k_2^2\sin(k_1l_1)\times\right.$$
$$\times\cos(k_2l_2) + k_1k_2\cos(k_1l_1)\sin(k_2l_2) +$$
$$\left.+0.5i\left((k_1^2-k_2^2)\sin(k_1l_1)\sin(k_2l_2)\right)\right], \quad (23)$$

$$c_b = 1 - c_f.$$

В соответствие с (22), поле в максимуме будет пропорционально c_f. Как указывалось выше, в максимумах пропускания kd определяется соотношениями (16), (17). Для достаточно больших M и малых p можно разложить $\sin kd$ в ряд в знаменателе выражения для c_f (23); в результате получаем

$$c_f \propto M/p. \quad (24)$$

Это объясняет как линейный рост максимального поля в структуре с ростом M (см. рис. 6), так и уменьшение этой величины с увеличением номера максимума p (рис. 2).

Численное значение E_{max} можно определить из решения на интервале $[0, d]$. Запишем $E_\pm$ в виде

$$E_\pm = \rho_\pm e^{i\varphi_\pm}, \quad (25)$$

где ρ и φ — амплитуда и фаза волны. Тогда поле в j-м периоде можно записать в виде

$$E(x+jd) = e^{i(\varphi_+ + kjd)}\times$$
$$\times\left(\rho_+ + \rho_- e^{i[(\varphi_- - \varphi_+) + 2\pi jp/M]}\right). \quad (26)$$

Для достаточно больших M фаза $\varphi_- - \varphi_+ \approx \pi$; поэтому максимум поля будет достигаться при выполнении условия

$$2jp/M = 1. \quad (27)$$

Для $p = 1$ получаем $j = M/2$. Амплитуда поля в этом периоде при этом будет иметь вид

$$|E(x+jd)| = |E_+(x) - E_-(x)|. \quad (28)$$

Таким образом, имеется возможность вычисления E_{max} и распределения поля в слое, соответствующем максимуму величины поля, на основе расчетов для одного первого периода.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе численного решения уравнений Максвелла методом матрицы переноса проанализированы особенности коэффициентов пропускания и распределения поля в конечной слоисто-периодической структуре. Распределение модуля поля $E(x)$ в структуре для параметров, соответствующих максимумам пропускания, ближайшим к границам запрещенных зон, имеет ряд особенностей. Показано, что значение поля в центре структуры для максимума пропускания ближайшего к запрещенной зоне может превышать амплитуду падающего поля E_0 более, чем на порядок. Для последующих максимумов пропускания ($p = 2, 3, \ldots$) огибающая $E(x)$ близка к периодичной с периодом M/p, а величина E_{max} уменьшается с номером p (для $p = 4$ значение $E_{max}/E_0 \sim 2$). Величина E_{max} линейно растет с M и для $M = 50$ превышение поля более, чем в 10 раз (плотность энергии электромагнитного поля при этом возрастает более, чем на два порядка). Исследована зависимость E_{max} от параметров системы. Усиление электромагнитного поля максимально для степени заполнения l_1/d, соответствующей максимуму ширин запрещенных зон бесконечной структуры (порядка 0.4 для первой, 0.2 и 0.65 для второй зоны).

Для интерпретации численных результатов построена аналитическая теория, основанная на представлении решения в виде линейной комбинации встречных мод Флоке периодической структуры. Суммарная интенсивность поля при этом является комбинацией осциллирующих функций с близкими периодами d и $d_1 = d/(1 - p/M)$ (p — номер максимума пропускания). Результирующая интенсивность (и модуль поля) представляет собой картину биений двух колебаний с близкими частотами, что и объясняет особенности распределения $E(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Быков, ЖЭТФ **62**, 505 (1972).
2. E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987).
3. S. John, Phys. Rev. Lett. **58**, 2486 (1987).
4. В. С. Горелик, КЭ **37**, 409 (2007).
5. V. N. Astratov, V. N. Bogomolov, A. A. Kaplyanskii, A. V. Prokofiev, L. A. Samoilovich, S. M. Samoilovich, and Yu. A. Vlasov, Nuovo Cimento **17D**, 1349 (1995).
6. V. N. Bogomolov, S. V. Gaponenko, A. M. Kapitonov, A. V. Prokofiev, A. N. Ponyavina, N. I. Silvanovich, and S. M. Samoilovich, Appl. Phys. A **63**, 613 (1996).
7. Ю. П. Войнов, В. С. Горелик, К. И. Зайцев, Л. И. Злобина, П. П. Свербиль, С. О. Юрченко, ФТТ **57**, 443 (2015).

8. В. С. Горелик, С. Н. Ивичева, Ю. Ф. Каргин, В. В. Филатов, Неорг. матер. **49**, 685 (2013).

9. В. С. Горелик, Л. С. Лепнев, А. О. Литвинова, Неорг. матер. **50**, 1086 (2014).

10. Liu Yisen, Chang Yi, Ling Zhiyuan, Hu Xing, and Li Yi, Electrochem. Comm. **13**, 1336 (2011).

11. S. E. Svyakhovskiy, A. I. Maydykovsky, and T. V. Murzina, J. Appl. Phys. **112**, 013106 (2012).

12. В. В. Капаев, КЭ **16**, 2271 (1989).

13. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1979).

14. А. Ярив, П. Юх, *Оптические волны в кристаллах*, Мир, Москва (1987).

15. P. Yeh, A. Yariv, and C. Hong, J. Opt. Soc. Amer. **67**, 423 (1977).