

РАБОТА Л. В. КЕЛДЫША «ИОНИЗАЦИЯ В ПОЛЕ СИЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ» И СОВРЕМЕННАЯ ФИЗИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АТОМОВ С СИЛЬНЫМ ЛАЗЕРНЫМ ПОЛЕМ

*М. В. Федоров**

*Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 августа 2015 г.

Обсуждаются основные предпосылки, приближения и результаты работы Л. В. Келдыша 1964 г. по многофотонной ионизации атомов и влияние этой работы на формирование современной науки о взаимодействии атомно-молекулярных систем с сильным лазерным полем.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 85-летию Л. В. Келдыша

DOI: 10.7868/S0044451016030068

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа Л. В. Келдыша по теории многофотонной ионизации атомов сильным лазерным полем [1] занимает уникальное место в современной науке об атомно-лазерных взаимодействиях. Во-первых, эта работа была опубликована до появления значительного интереса и первых успехов экспериментальных исследований в данной области. В частности, работа [1] в значительной мере способствовала постановке и успешному началу пионерских исследований по многофотонной ионизации в ФИАНе в группе Делоне [2], а также и появлению в дальнейшем широкого круга исследований во многих лабораториях мира. Во-вторых, работа Келдыша получила широкое признание во всем мире и имеет огромное число цитирований. Представления о туннельном механизме ионизации в сильном переменном лазерном поле и параметр Келдыша, определяющий условия реализации этого механизма, безусловно, хорошо известны всем грамотным физикам во всем мире. С другой стороны, ряд других результатов работы [1] имеет безусловно приоритетный характер, но ввиду ранней публикации переоткрывался впоследствии заново, в основном экспериментаторами. При

этом, как правило, не отмечалось и не отмечается, что по существу такие же результаты содержались уже в опубликованной намного раньше теоретической работе Л. В. Келдыша. В связи с этим представляется целесообразным дать краткий обзор основных предпосылок и результатов работы [1], дать ее сравнение с последующими работами других авторов и охарактеризовать кратко те направления современных исследований, которые представляют собой дальнейшее расширение области применимости идей работы [1].

2. ПАРАМЕТР КЕЛДЫША

Один из главных результатов работы [1] — это вывод о том, что при малой интенсивности лазерного поля процесс ионизации имеет многофотонный характер, а в более сильном поле процесс ионизации в переменном лазерном поле приобретает характер туннелирования в статическом поле. При этом следует отметить относительность понятий слабого и сильного полей, возникающих в теории Келдыша. Условия применимости этой теории изначально накладывают определенные ограничения на интенсивность I поля и его частоту ω , которые должны быть существенно меньше соответствующих «атомных» значений. Атомная интенсивность I_{at} определяется как интенсивность светового поля, амплитуда напряженности которого ε_0 равна напряженности ку-

* E-mail: fedorov@gmail.com

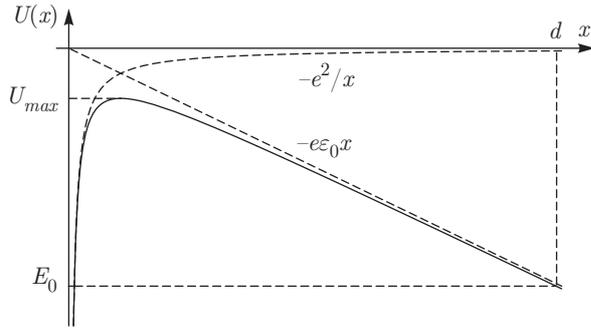


Рис. 1. Потенциальная энергия электрона $U(x)$

лоновского поля на боровском радиусе, а атомная частота — это удвоенная энергия связи электрона атома водорода на основном уровне, $|E_0|$, деленная на константу Планка \hbar : $I_{at} \approx 3 \cdot 10^{16}$ Вт/см² и $\omega_{at} \approx 4 \cdot 10^{16}$ с⁻¹. В рамках ограничений $I \ll I_{at}$ и $\omega \ll \omega_{at}$ в теории Келдыша возникают различные режимы ионизации атома, разделяемые найденным параметром γ , известным во всем мире как параметр Келдыша:

$$\gamma = \frac{\omega \sqrt{2m|E_0|}}{e\epsilon_0}. \quad (2.1)$$

Лазерное поле является сильным, если $\gamma < 1$, и напротив, относительно слабым, если $\gamma > 1$. Параметр Келдыша имеет двойкий физический смысл. Если напряженность лазерного поля имеет вид $\epsilon(t) = \epsilon_0 \cos \omega t$ и направлена вдоль оси x , то в некоторые моменты времени взаимодействие атомного электрона с полем, $-ex\epsilon(t)$, имеет характер отталкивания, и вместе с кулоновским потенциалом $-e^2/x$ полная потенциальная энергия $U(x) = -e^2/x - ex\epsilon_0 \cos \omega t$ принимает вид потенциального барьера (рис. 1). Если бы поле было статическим, то при наличии барьера электрон мог бы покинуть атом за счет процесса туннелирования. Но в переменном поле барьер существует в течение ограниченного времени, порядка половины периода, после чего поле меняет знак и туннелирование становится невозможным.

При $\epsilon_0 \ll \epsilon_{at}$ ширина и высота барьера примерно равны $d \approx |E_0|/e\epsilon_0$ и $U_{max} - E_0 \approx |E_0|$. Кроме того, хотя область под барьером является классически недоступной и, строго говоря, скорость движения электрона под барьером не определена, все же «кинетическая энергия» и «скорость» движения электрона под барьером оценивается в работе [1] как $mv^2/2 \sim U_{max} - E_0 \approx |E_0|$ и $v \sim \sqrt{|E_0|/m}$, что позволяет оценить и время туннелирования $t_{tun} \sim d/v \sim$

$\sim \sqrt{2m|E_0|}/e\epsilon_0$. Произведение времени туннелирования на частоту поля и есть параметр Келдыша

$$\gamma = \omega t_{tun}. \quad (2.2)$$

Таким образом, параметр Келдыша показывает, успеет ли электрон протуннелировать под барьером за время его существования или нет. При $\gamma \gg 1$ время туннелирования велико по сравнению с периодом поля, и электрон не успевает покинуть атом за время существования барьера. Это случай относительно слабого поля и многофотонного механизма ионизации. В противном случае, при $\gamma \ll 1$, поле является сильным, время туннелирования мало по сравнению с периодом поля, и возможно эффективное туннелирование.

Другая интерпретация параметра Келдыша состоит в том, что он прямо связан с так называемым пондеромоторным потенциалом U_{pond} :

$$\gamma = \sqrt{\frac{2|E_0|}{U_{pond}}}, \quad (2.3)$$

где

$$U_{pond} = \frac{e^2 \epsilon_0^2}{4m\omega^2} = \frac{mv_{osc}^2(t)}{2}, \quad (2.4)$$

а $v_{osc}(t) = (e\epsilon_0/\omega) \sin \omega t$ — скорость осцилляторного движения свободного классического электрона в поле волны. Смысл понятия пондеромоторного потенциала состоит в том, что, с одной стороны, — это средняя энергия осцилляций свободного классического электрона в поле волны, а с другой, — это квадратичный штарковский сдвиг высоковозбужденных ридберговских уровней и порога ионизации в световом поле [3, 4].

Если условие существования обычного фотоэффекта (по Эйнштейну) есть $\hbar\omega > |E_0|$, то в случае многофотонной ионизации, при $\hbar\omega < |E_0|$, оно приобретает вид $n\hbar\omega > |E_0|$, где n — минимальное целое число, при котором последнее условие выполняется. Но если интенсивность поля увеличивается, то при $U_{pond} > \hbar\omega$ в условии реализации n -фотонного фотоэффекта необходимо учитывать еще и пондеромоторный сдвиг порога ионизации, что дает $n\hbar\omega > |E_0| + U_{pond}$. Этот эффект очень понятен, так как при вырывании из атома электрон становится более или менее свободным от атомного потенциала, но подвергается воздействию лазерного поля, вследствие чего он осциллирует и приобретает энергию осцилляций. Поскольку при наличии лазерного поля невозможно образовать электрон в непрерывном спектре без энергии осцилляций, при $U_{pond} > \hbar\omega$ для

n -фотонной ионизации необходимо затратить энергию, большую чем $|E_0|$, что эквивалентно повышению порога ионизации на величину $U_{pond} \propto I$. Этот эффект линейного роста порога ионизации от интенсивности лазерного поля I неоднократно наблюдался экспериментально [5, 6]. В терминах параметра Келдыша γ , в силу его связи с пондеромоторным потенциалом (2.3), режим туннелирования ($\gamma < 1$) реализуется только при величине пондеромоторного потенциала (сдвига порога), превышающей энергию связи электрона в свободном атоме, $U_{pond} > |E_0|$.

3. ОСНОВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ДОПУЩЕНИЯ В ТЕОРИИ КЕЛДЫША

Основные физические допущения в теории Келдыша состоят в том, что, с одной стороны, лазерное поле с интенсивностью меньшей, чем атомная, слабо воздействует на атомный электрон в основном состоянии, а с другой, — что после ионизации фотонный электрон испытывает сильное воздействие лазерного поля и в значительно меньшей степени воздействие кулоновского потенциала остаточного иона. Помимо этого, в силу того, что лазерное поле считается слабее внутриатомного, вероятность ионизации атома считается относительно малой и используется своего рода теория возмущений, но при учете сильного воздействия лазерного поля на свободный электрон. Эти приближения учитываются в том, что волновая функция электрона в атомном потенциале и в лазерном поле представляется в виде волновой функции невозмущенного атомного электрона в основном состоянии $\psi_0(\mathbf{r})$ плюс малая поправка, которая в свою очередь, представляется в виде суперпозиции нерелятивистских волковских функций $\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$ свободного электрона в лазерном поле:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right) + \int d\mathbf{p} C_{\mathbf{p}}(t) \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t). \quad (3.1)$$

Один из вариантов описания взаимодействия нерелятивистского электрона с лазерным полем основан на записи энергии взаимодействия в виде $V = -\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t)$, где $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ — дипольный момент, а $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \cos \omega t$ — напряженность электрического поля лазерного излучения в дипольном приближении. В этом случае (в «калибровке длины») нерелятивистские волковские функции имеют вид

$$\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\mathbf{r} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(t) \right) - \frac{1}{2m} \int_0^t dt' \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(t') \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.2)$$

где $\mathbf{A}(t) = -c \int dt' \boldsymbol{\varepsilon}(t')$ — векторный потенциал лазерного поля.

Отмечу, что помимо описания взаимодействия электрона с полем в калибровке длины существуют и другие формы записи энергии взаимодействия. Например, это может быть «калибровка скорости», в которой часть гамильтониана, ответственная за взаимодействие электрона с лазерным полем, записывается в виде $(1/2m) (\mathbf{p} - e/c\mathbf{A})^2$ (вместо $p^2/2m - \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ в калибровке длины). Нерелятивистские волковские функции в калибровке скорости имеют тот же вид, что и в калибровке длины (3.2), но без слагаемого $-(ie/\hbar c) \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(t)$ в показателе экспоненты. Как известно, точные решения уравнения Шредингера дают одинаковые предсказания вероятностей переходов в атомных системах за импульс поля при условии, что векторный потенциал поля выключается после прохождения импульса, так же как и сама напряженность поля, $\boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rightarrow 0$ и $A(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Что касается приближенных расчетов и решений, вопрос о предпочтительности той или иной калибровки является дискуссионным и активно обсуждается в различных конкретных задачах. В задаче об ионизации атома Келдышем была использована калибровка длины (в отличие от ряда других работ [7, 8]), и это существенно. Именно калибровка длины обеспечивает возможность интерпретации в терминах туннелирования в соответствии с рис. 1.

Уравнения для коэффициентов $C_{\mathbf{p}}(t)$ в разложении (3.1) волновой функции по волковским функциям получаются непосредственно из уравнения Шредингера и имеют вид

$$i\hbar \dot{C}_{\mathbf{p}}(t) = -\langle \Psi_{\mathbf{p}} | \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 | \psi_0 \rangle \cos \omega t \exp\left(-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right) + \int d\mathbf{p}' \langle \Psi_{\mathbf{p}} | U(\mathbf{r}) | \Psi_{\mathbf{p}'} \rangle C_{\mathbf{p}'}(t), \quad (3.3)$$

где $U(\mathbf{r})$ — атомный потенциал; в случае атома водорода или водородоподобного атома — кулоновский потенциал $-e^2/r$. Последнее слагаемое в уравнении (3.3) связано с влиянием атомного потенциала на состояния непрерывного спектра электрона, которое, по предположению, считается малым и поэто-

му опускается. В этом приближении уравнение (3.3) интегрируется и дает

$$C_{\mathbf{p}}(t) = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \langle \Psi_{\mathbf{p}}(t') | \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0(t') | \psi_0 \rangle \cos \omega t' \times \exp\left(-\frac{iE_0 t'}{\hbar}\right). \quad (3.4)$$

Периодическая часть подынтегральной функции разлагается в ряд Фурье, что позволяет в пределе большого времени взаимодействия найти плотность вероятности перехода электрона в единицу времени из связанного состояния ψ_0 в состояние непрерывного спектра с импульсом \mathbf{p} :

$$\frac{dw}{d\mathbf{p}dt} = \frac{|C_{\mathbf{p}}|^2}{T} = \frac{2\pi}{\hbar} |F(\mathbf{p})|^2 \times \sum_{n \geq n_{min}} \delta\left(\frac{p^2}{2m} + U_{pond} - E_0 - n\hbar\omega\right), \quad (3.5)$$

где

$$n_{min} = \left\lceil \frac{U_{pond} + |E_0|}{\hbar\omega} \right\rceil + 1, \quad (3.6)$$

квадратные скобки означают целую часть числа, T — большое время взаимодействия, $U_{pond} = e^2 A^2(t)/2mc^2$ — пондеромоторный потенциал (2.4), $\mathbf{d}_{\mathbf{p}} = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \psi_0(\mathbf{r})$, ψ_0 — волновая функция основного состояния атома, а функция $F(\mathbf{p})$ определена уравнением

$$F(\mathbf{p}) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt (\mathbf{d}_{\mathbf{p}-e\mathbf{A}(t)/c, 0} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t)) \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left[\int_0^t dt' \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t')/c)^2}{2m} - E_0 t \right]\right\}. \quad (3.7)$$

Можно заметить, что выражение (3.5) напоминает по виду золотое правило Ферми, т.е. дифференциальную скорость переходов в континуум в первом порядке теории возмущений, хотя и с большими различиями в виде суммы большого числа дельта-функций, выражающих законы сохранения энергии, и в структуре матричного элемента.

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ [1] И ИХ ПРИОРИТЕТНЫЙ ХАРАКТЕР

4.1. Надпороговая ионизация атомов

Надпороговая ионизация атомов (above-threshold ionization, ATI) — это хорошо известное в настоящее время явление, обсуждаемое и исследуемое

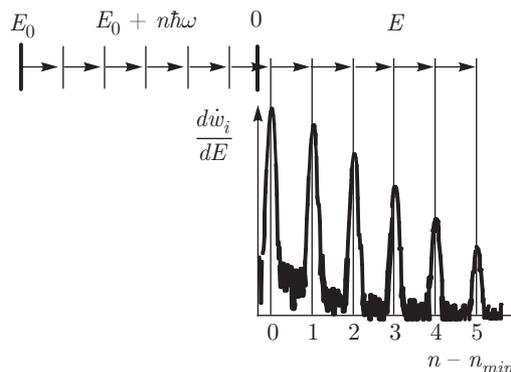


Рис. 2. Энергетический спектр фотоэлектронов при надпороговой ионизации [9]

в многочисленных работах многих авторов. Оно состоит в том, что при интенсивности лазерного поля, превышающей значения порядка 10^{12} – 10^{13} Вт/см², в энергетическом спектре фотоэлектронов наблюдается большое число максимумов, отстоящих друг от друга на расстояние $\hbar\omega$ (рис. 2). Интерпретация этих результатов состоит в том, что при ионизации атома лазерным полем частоты ω электрон может поглощать не только минимальное число квантов, необходимое для выхода в континуум, но и большее количество фотонов, т.е. процесс ионизации атома становится многоканальным. При этом переходы в каждый из каналов являются многофотонными, т.е. отвечают реальному поглощению атомом различного числа фотонов лазерного поля. Впервые явление надпороговой ионизации наблюдалось экспериментально в работе [10] 1979 г., которая стала отправным моментом для огромной серии других исследований, продолжающихся и в настоящее время. Вместе с тем, насколько мне известно, никогда не отмечается, что по существу явление надпороговой ионизации было предсказано еще в 1964 г. в работе Келдыша [1]. Сумма дельта-функций в приведенном выше уравнении (3.5) как раз и соответствует пикам надпороговой ионизации. Хотя, разумеется, в работе [1] не было терминов «надпороговая ионизация», или «ATI».

4.2. Закрывание каналов

Другой интересный эффект во взаимодействии сильного поля с атомами — это закрывание каналов ионизации (channel closing). По мере увеличения интенсивности поля увеличивается пондеромоторный сдвиг порога ионизации, т.е. увеличивается энергия связи электрона в атоме. В связи с этим канал иони-

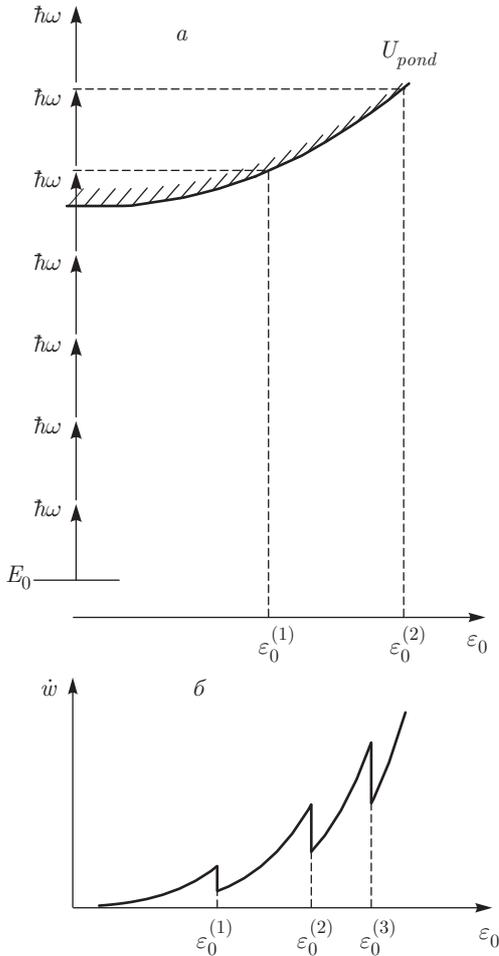


Рис. 3. Закрытие каналов ионизации

зации с поглощением минимального числа фотонов по мере роста поля перестает быть каналом ионизации, т.е. для ионизации он закрывается и не дает вклада в полную вероятность ионизации, как показано на рис. 3а. В этом случае минимальное число фотонов, необходимых для ионизации, увеличивается на единицу, что может приводить к немонотонному росту вероятности ионизации (рис. 3б).

В реальных экспериментах эта немонотонность может сглаживаться, хотя все же некоторые ее проявления сохраняются. Экспериментально закрытие каналов наблюдалось и исследовалось начиная с работы [11] 1983 г. (см. также [12, 13]). Но при этом нигде не упоминалось, что фактически это явление было предсказано теоретически Келдышем в работе [1] 1964 г. В рамках теории Келдыша закрытие каналов описывается ступенчатой зависимостью от интенсивности поля вероятности ионизации в единицу времени (3.5), возникающей из-за ступенчатой зависимости функции $n_{min}(U_{pond})$.

4.3. Единая общая формула Келдыша и ее следствия

Интегрирование в уравнении (3.7) осуществляется методом перевала, причем большим параметром является величина $n_{min}(U_{pond}) \gg 1$ (3.6), т.е. отношение энергии связи электрона в атоме к энергии кванта поля, или же минимальная степень многофотонности процесса ионизации. В общем случае, но при относительно малой энергии электрона в континууме ($p \approx 0$), результат имеет вид

$$\dot{w} \sim |F(0)|^2 \sim \exp \left\{ -2 \frac{|E_0| + U_{pond}}{\hbar\omega} \times \left[\text{Arsh } \gamma - \frac{\gamma\sqrt{1+\gamma^2}}{1+2\gamma^2} \right] \right\}. \quad (4.1)$$

В предельном случае слабого поля, или $\gamma \gg 1$, это общее выражение дает

$$\dot{w}_{\gamma \gg 1} \sim \left(\frac{1}{2\gamma^2} \right)^{n_{min}} \sim I^{n_{min}}. \quad (4.2)$$

Это есть предел относительно слабого поля и многофотонной ионизации, когда справедлива теория возмущений, и вероятность n -фотонного процесса определяется квадратом составного матричного элемента порядка n и пропорциональна интенсивности поля в степени n . Это и есть результат (4.2), следующий из общей формулы Келдыша (4.1) в пределе $\gamma \gg 1$. Конечно, в рамках такой сравнительно простой теории не может быть определен точно коэффициент пропорциональности между $\dot{w}_{\gamma \gg 1}$ и интенсивностью I , поскольку для такого вычисления фактически надо было бы найти составной матричный элемент высокого порядка, что затруднительно даже для численных решений. Но сам факт получения правильной зависимости от интенсивности в этом пределе является хорошей иллюстрацией важности и правильности общей формулы (4.1) работы [1].

В противоположном случае более сильных полей, $\gamma \ll 1$, из общей формулы (4.1) в работе [1] была получена туннельная формула для скорости ионизации атома в статическом электрическом поле:

$$\dot{w}_{\gamma \ll 1} \sim \exp \left(-\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m} |E_0|^{3/2}}{\hbar e \varepsilon_0} \right). \quad (4.3)$$

Получение туннельной формулы для переменного лазерного поля указывает на то, что в определенном смысле имеет место эквивалентность переходов к пределу сильного поля и к статическому пределу.

По-видимому, в качественном плане это есть основной вывод работы Келдыша [1]. Можно отметить, что эта идеология неоднократно использовалась для объяснения и интерпретации данных экспериментов по ионизации атомов сильным лазерным полем и, тем самым, переход от многофотонного режима к туннельному нашел свое прямое экспериментальное подтверждение (см., например, работы [14–16]).

5. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ИДЕЙ РАБОТЫ [1]

Работа [1] оказала огромное влияние на дальнейшее развитие исследований в области физики взаимодействия атомно-молекулярных систем с сильным лазерным полем. В теоретическом плане было опубликовано несколько важных и признанных работ, среди которых наибольшее признание получили работы Попова, Переломова и Терентьева (ПШТ) [17], Аммосова, Делоне и Крайнова (АДК) [18] и Никишова и Ритуса [19]. В работах Риса [7, 20, 21] аналогичные подходы формулировались на основе другой калибровки и с претензией на применимость для сколь угодно сильных полей. Последнее весьма проблематично, но вслед за этими работами большую популярность получил предложенный в них термин *strong-field approximation* (приближение сильного поля), относящийся по существу к теории Келдыша и ее модификациям, ПШТ и АДК. Помимо этого, в литературе используется термин КФР, соответствующий фамилиям авторов трех работ: Келдыш [1], Файсал [8] и Рис [20, 21]. Но это объединение достаточно искусственное, так как в работах Файсала и Риса не было главного — туннелирования. Поэтому, например, термин «КФР-формула» [22] просто является неправильным. Такой формулы нет, а есть только общая формула Келдыша (4.1).

Отдельным направлением развития теории Келдыша является ее адаптация к задачам о многофотонном поверхностном фотоэффекте в металлах и полупроводниках в сильном лазерном поле [23–25].

Но все же наиболее значительным направлением развития идей работы Келдыша явилась предложенная Коркумом [26] и Куландером [27] формулировка модели трехступенчатого процесса: 1) туннелирование; 2) свободное движение электрона в световом поле с возвратом к родительскому иону; 3) рекомбинация в исходное состояние, сопровождающаяся излучением квантов высокочастотного поля в

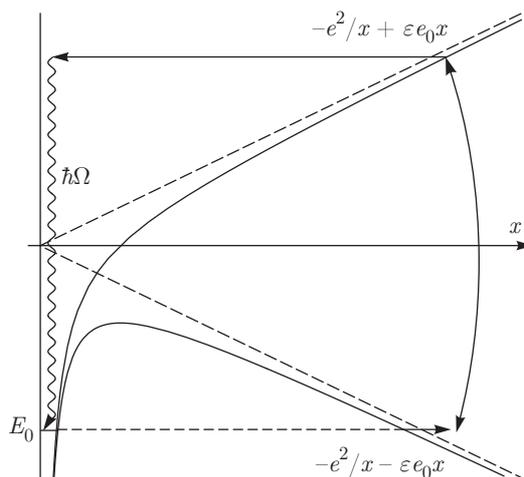


Рис. 4. Трехступенчатая модель генерации высоких гармоник

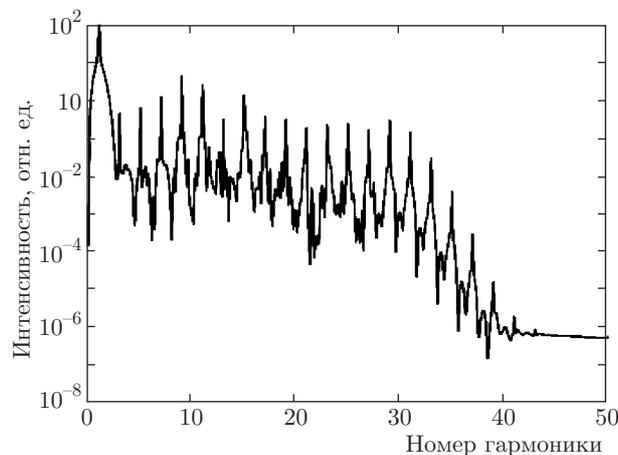


Рис. 5. Спектр излучения высоких гармоник [31]

виде высоких гармоник ионизирующего лазерного излучения. Суть этой модели иллюстрирует рис. 4. Альтернативным и часто используемым названием этой модели является «модель простого человека» (*simple-man model*).

Количество исследований и публикаций по генерации высоких гармоник огромно. Не ставя цели их описания в данной статье, привожу здесь только несколько ссылок на пионерские работы [28–30]. Пример спектра излучения гармоник приведен на рис. 5. Прямая связь процесса генерации гармоник с физикой многофотонной ионизации, описанной в работе [1], очень хорошо прослеживается в модели Левенштайна [32]. По аналогии с выводом решения (3.4) находится также выражение для зависящего от времени дипольного момента атома:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{d}(t) \rangle = & -\frac{1}{\hbar^2} \int d\mathbf{p} \int_{-\infty}^t dt' \exp\left(\frac{iE_0 t'}{\hbar}\right) \times \\ & \times \langle \psi_0 | \mathbf{d} | \Psi_{\mathbf{p}}(t') \rangle \int_{-\infty}^{t'} dt'' \langle \Psi_{\mathbf{p}}(t'') | \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0(t'') | \psi_0 \rangle \times \\ & \times \cos \omega t'' \exp\left(-\frac{iE_0 t''}{\hbar}\right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

По сравнению с решением Келдыша (3.4), это выражение содержит добавочный матричный элемент и дополнительное интегрирование по времени, описывающие возвращение электрона в основное состояние ψ_0 . Если в процессе ионизации волновые функции $\Psi_{\mathbf{p}}$ — это волновые функции конечных состояний, то в процессах излучения они играют роль промежуточных состояний, по которым выполняется интегрирование. При известной функции $\langle \mathbf{d}(t) \rangle$ спектр излучения определяется как квадрат модуля фурье-образа второй производной дипольного момента. В описанной модели однократного возвращения электрона к родительскому иону находится и максимальная частота излучения (частота отсечки в спектре гармоник) $\hbar\Omega_{max} \sim |E_0| + 3.17U_{pond}$, и максимальный номер излучаемой гармоники $n_{max} = (|E_0| + 3.17U_{pond})/\hbar\omega$.

Помимо прямого излучения гармоник при возвращении электрона к родительскому иону возможны и другие сценарии его поведения. Электрон может упруго рассеяться на ионе, что приведет к значительному уширению энергетического спектра надпороговой ионизации. Более того, после такого перерасеяния под действием лазерного поля электрон может во второй раз вернуться к родительскому иону с еще большей кинетической энергией. При этом вновь становится возможной рекомбинация, т. е. переход в основное состояние атома, сопровождающаяся излучением еще более высоких частот, чем при первом возвращении. В целом, номера наблюдаемых гармоник достигают нескольких сотен, что соответствует области вакуумного ультрафиолета или даже мягкого рентгеновского излучения.

На временной шкале когерентная сумма гармоник лазерного излучения соответствует формированию очень коротких, аттосекундных импульсов ($1 \text{ ас} = 10^{-18} \text{ с}$). Генерация аттосекундных импульсов — это одно из центральных направлений исследований в современной науке о взаимодействии сильного лазерного поля с атомно-молекулярными системами [33–35].

Наконец, если атомы содержат более одного валентного электрона и под действием лазерного поля происходит однократная туннельная ионизация, то энергия оторванного электрона при возврате к родительскому иону может быть достаточной для повторной ударной ионизации, т. е. для выбивания из иона еще одного электрона. Характер электронного спектра при такой двойной ионизации и корреляции между образовавшимися электронами также стали предметом многочисленных интенсивных исследований [36–39].

Таковы вкратце основные направления современной науки о взаимодействии атомов и молекул с интенсивным лазерным излучением, в основе которых лежат идеи и результаты работы Л. В. Келдыша, опубликованной в 1964 г. [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
2. Г. С. Воронов, Н. Б. Делоне, ЖЭТФ **50**, 78 (1966).
3. N. B. Delone and V. P. Krainov, *Multiphoton Processes*, Springer-Verlag, New York (1985).
4. M. V. Fedorov, *Atomic and Free Electrons in a Strong Light Field*, World Sci., Singapore (1997).
5. R. R. Freeman, P. H. Bucksbaum, H. Milchberg et al., Phys. Rev. Lett. **59**, 1092 (1987).
6. H. G. Muller, H. B. van Linden van den Heuvell, P. Agostini, Phys. Rev. Lett. **60**, 565 (1987).
7. H. Reiss, Phys. Rev. A **22**, 1786 (1980).
8. F. H. M. Faisal, J. Phys. B **6**, L89 (1973).
9. W. Becker, R. Grasbon, R. Kopold et al., Adv. Atom., Mol., Opt. Phys. **48**, 35 (2002).
10. P. Agostini, F. Fabre, G. Mainfray et al., Phys. Rev. Lett. **42**, 1127 (1979).
11. P. Kruit, J. Kimman, H. G. Muller, and M. J. van der Wiel, Phys. Rev. A **28**, 248 (1983).
12. J. G. Story, D. I. Duncan, and T. F. Gallagher, Phys. Rev. A **49**, 3875 (1994).
13. E. Cormier et al., J. Phys. B **34**, L9 (2001).
14. S. Augst, D. Strickland, D. D. Meyerhofer et al., Phys. Rev. Lett. **63**, 2212 (1989).
15. T. Augustine, P. Monot, L. A. Lompre et al., J. Phys. B **25**, 4181 (1992).
16. S. Laroche, A. Talebpour, and S. L. Chin, J. Phys. B **31**, 1201 (1998).

17. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **50**, 1393 (1966).
18. М. В. Аммосов, Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, ЖЭТФ **91**, 2008 (1986).
19. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **50**, 255 (1966).
20. H. Reiss, Phys. Rev. A **19**, 1140 (1979).
21. H. Reiss, Phys. Rev. Lett. **101**, 043002 (2008).
22. A. Requate, A. Becker, and F. H. M. Faisal, Phys. Lett. A **319**, 145 (2003).
23. Ф. В. Бункин, М. В. Федоров, ЖЭТФ **49**, 1215 (1965).
24. А. П. Силин, ФТТ **12**, 3553 (1970).
25. С. И. Анисимов, В. А. Бендерский, Г. Фаркаш, УФН **122**, 185 (1977).
26. P. Corkum, Phys. Rev. Lett. **71**, 1994 (1993).
27. J. L. Krause, K. J. Schafer, and K. C. Kulander, Phys. Rev. Lett. **68**, 3535 (1993).
28. A. McPherson, G. Gibson, H. Jara et al., J. Opt. Soc. Amer. B **4**, 595 (1987).
29. M. Ferray, A. L'Huillier, X. F. Li et al., J. Phys. B **21**, L31 (1988).
30. X. F. Li, A. L'Huillier, M. Ferray et al., Phys. Rev. A **39**, 5751 (1989).
31. K. L. Ishikawa, in: *Advances in Solid-State Lasers: Development and Applications*, ed. by M. Grishin, Intech, Croatia (2010), p. 439.
32. M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov et al., Phys. Rev. A **49**, 2117 (1994).
33. P. B. Corkum and F. Krausz, Nature Phys. **3**, 381 (2007).
34. K. Midorikawa, Jpn. J. Appl. Phys. **50**, 090001 (2011).
35. L. Gallmann, C. Cirelli, and U. Keller, Ann. Rev. Phys. Chem. **63**, 447 (2012).
36. G. Yudin and M. Ivanov, Phys. Rev. A **63**, 033404 (2001).
37. D. Zeidleret, A. Staudte, A. B. Bardon et al., Phys. Rev. Lett. **95**, 203003 (2005).
38. Y. Liu, L. Fu, D. Ye et al., Phys. Rev. Lett. **112**, 013003 (2014).
39. M. Chini, K. Zhao, and Z. Chang, Nature Photon. **8**, 178 (2014).