ЖЭТФ, 2016, том 149, вып. 2, стр. 272–280

К ВОПРОСУ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ВОДОРОДОПОДОБНОГО АТОМА

В. В. Скобелев[*]

Московский государственный университет машиностроения (МАМИ)
115280, Москва, Россия

Поступила в редакцию 4 сентября 2014 г.
после переработки 21 сентября 2015 г.

С использованием полученного решения уравнения Дирака для электрона в поле точечного ядра (Ze), являющегося собственной функцией шредингеровского оператора Гамильтона и оператора проектирования спина Σ_3, и в основном порядке по параметру разложения $(Ze) \ll 1$ впервые вычислена вероятность $W^{(\nu)}$ излучения нейтрино в единицу времени водородоподобным атомом $(Ze)^* \to (Ze) + \nu\overline{\nu}$. Как оказалось, $W^{(\nu)}$ достаточно мала, а соответствующее время жизни $\tau^{(\nu)} = [W^{(\nu)}]^{-1}$ значительно превышает возраст Вселенной, так что этот процесс не может повлиять на баланс низкоэнергетических нейтрино. Это подавление $W^{(\nu)}$ обусловлено не только наличием очевидного «слабого» фактора $(Gm_p^2)^2(m/m_p)^4$ в выражении для $W^{(\nu)}$, а также, в основном, «электромагнитного» фактора $(Z\alpha)^{12}$, причем последнее обстоятельство может быть выяснено только при конкретном расчете. Приводятся аргументы, что по этим же найденным волновым функциям фотонное излучение $(Ze)^* \to (Ze) + \gamma$ при его рассмотрении в рамках КЭД может отсутствовать (анализ фотонного излучения требует дальнейшего развития метода), а аксионное $(Ze)^* \to (Ze) + a$ — напротив, имеет место, хотя последние два эффекта детально в работе и не рассматриваются.

DOI: 10.7868/S0044451016020048

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема водородоподобного атома являлась самой приоритетной со времен становления квантовой физики вообще и квантовой механики в частности. Это объясняется и ее принципиальным значением с «чисто академической точки зрения» как пробного камня проверки адекватности теории на примере простейшего атома, и возможными астрофизическими аспектами, поскольку водород — самый распространенный элемент во Вселенной.

Помимо давно решенной задачи об определении спектра электромагнитного излучения водородоподобного атома, важное значение имеет и вычисление вероятностей $W^{(\gamma)}$ в единицу времени перехода электрона с излучением фотона из возбужденных состояний с соответствующим определением времени жизни $\tau^{(\gamma)} = [W^{(\gamma)}]^{-1}$ в этих возбужденных состояниях. Насколько нам известно, эта задача так полностью и не была решена в аналитической форме при использовании точных методов КЭД с лагранжианом взаимодействия

$$L = e[\bar{\Psi}_e \gamma^\mu \Psi_e] A_\mu. \tag{1}$$

Возможно, отчасти это связано с отсутствием в литературе приемлемого для практических расчетов решения Ψ ($\Psi_e = e^{-iEt}\Psi$) уравнения Дирака для электрона в поле точечного ядра (Ze).

Для оценок обычно используют получаемое на основании полуклассических соображений выражение вида (см., например, учебник [1])

$$W^{(\gamma)} = \frac{4}{3}\,\frac{\alpha \Delta E^3}{\hbar^3 c^2}\,|\langle n'|\mathbf{r}|n\rangle|^2, \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}, \quad \Delta E = E_n - E_{n'},\\ E \equiv E_n = -\frac{m(Ze^2)^2}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{(Z\alpha)^2}{2n^2}\,mc^2,\end{gathered} \tag{2a}$$

не учитывающее, естественно, спиновых эффектов.

Однако в рамках используемого в работе приближения полученное в разд. 2 выражение Ψ таково, что матричный элемент излучения поперечно-поляризованного фотона водородоподобным атомом

[*] E-mail: v.skobelev@inbox.ru

по лагранжиану (1) обращается в нуль. И этот вопрос, по нашему мнению, должен быть предметом дальнейших исследований с целью учета спиновых эффектов и выяснения соотношения этих двух подходов в задаче о фотонном излучении водородоподобного атома (см. также разд. 4, п. 3).

Излучение нейтрино водородоподобным атомом с использованием контактного лагранжиана

$$L = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\overline{\Psi}_e \gamma^\mu (C_V + C_A \gamma^5) \Psi_e\right] \left[\overline{\Psi}_\nu \gamma_\mu (1+\gamma^5) \Psi_\nu\right] \quad (3)$$

по малопонятным причинам вообще не рассматривалось ранее, хотя баланс низкоэнергетических нейтрино во Вселенной может быть в принципе обусловлен и этим эффектом в силу упомянутой распространенности водорода (и гелия); как показывают результаты конкретных расчетов (разд. 3), это на самом деле не имеет места. Мы можем сослаться лишь на наши работы. В работе [2] рассматривался процесс излучения нейтрино водородоподобным атомом в эффективно одномерном пространстве, генерируемом сверхсильным ($B \sim (>) 10^9$ Гс) магнитным полем, в работе [3] — резонансный эффект излучения аксионов [4] в этой же ситуации.

Заметим, что значения структурных констант $C_{V,A} \sim 1$ в лагранжиане (3) зависят, как известно, от типа нейтрино и выражаются через угол Вайнберга θ_W. Например, для электронных нейтрино они равны

$$C_V = \frac{1}{2} + \sin^2\theta_W, \quad C_A = \frac{1}{2}. \quad (3a)$$

Разумеется, представляет принципиальный интерес изучение этих же эффектов и в менее экзотической постановке вопроса, т. е. в отсутствие внешнего сверхсильного магнитного поля, хотя эта задача и представляется с математической точки зрения более сложной, чем в работах [2, 3], в которых влияние магнитного поля сводит ее к пространственно–одномерной задаче, а в релятивистской формулировке — к двумерной в двумерном пространстве-времени. Физической причиной этого является компенсация энергии нулевых колебаний в магнитном поле за счет отрицательного вклада в энергию при ориентации спинового магнитного момента электрона по этому полю.

В данной работе, в целом придерживаясь схемы изложения материала, принятой в наших работах [2, 3], мы рассматриваем излучение нейтринных пар водородоподобным атомом $(Ze)^* \to (Ze) + \nu\overline{\nu}$ по лагранжиану (3), для чего достаточно простыми и стандартными методами традиционного курса квантовой механики предварительно решаем уравнение Дирака для электрона в поле ядра (разд. 2) с получением удобного для практических расчетов (в том числе и в данной работе) вида решения, а в разд. 3 вычисляем физические характеристики процесса $(Ze)^* \to (Ze) + \nu\overline{\nu}$, который, в отличие от процесса излучения фотона $(Ze)^* \to (Ze) + \gamma$, может быть без проблем рассмотрен развиваемым в работе методом уже в первом неисчезающем (в рамках этого метода) приближении по параметру $(Z\alpha) \ll 1$ (разд. 3). В разд. 4 мы кратко формулируем результаты работы, а также обсуждаем перспективы развития и обобщения предложенного метода расчета эффектов излучения водородоподобным атомом, в частности, обычного однофотонного излучения.

2. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА И ЕГО РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ ЯДРА

Уравнение Дирака для электрона в поле ядра из соображений дальнейшего удобства представим в виде

$$D_- \Psi = 0, \quad (4)$$

где дираковский оператор равен

$$D_\mp = \left(E_r + \frac{(Ze^2)}{r}\right)\gamma^0 - i\hbar c \left(\boldsymbol{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \mp mc^2, \quad (5)$$

а релятивистская энергия $E_r = mc^2 + E$ (исходя из специфики рассматриваемого в данном разделе вопроса о структуре и взаимосвязи двух основных уравнений квантовой механики — Дирака и Шредингера — применительно к ее классической проблеме водородоподобного атома, мы сохраняем в соответствующих формулах постоянные $\hbar$, c, как и в первоначальной оригинальной формулировке этих уравнений).

Рассматривая далее, естественно, нерелятивистский случай $\delta \equiv |E|/mc^2 \ll 1$, ищем решение в виде

$$\Psi = D_+ \varphi, \quad (6)$$

следуя известному методу квадрирования исходного уравнения (4). После подстановки (6) в (4) с учетом (5) получаем после некоторых преобразований уравнение

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_r - \frac{(Ze^2)}{r} - \frac{E^2}{2mc^2} - \frac{(Ze^2)^2}{2mc^2 r^2} - {} \right. \\ \left. - i\frac{\hbar (Ze^2)}{2mc}\frac{\gamma^0(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r})}{r^3}\right]\varphi = E\varphi, \quad (7)$$

где Δ_r — оператор Лапласа. Здесь φ, разумеется, не сферический угол, а некоторый «вспомогательный» спинор, вид которого будет установлен ниже в этом разделе. Переходя далее для удобства к «безразмерным координатам» $\mathbf{r}'$ ($\mathbf{r} \to \mathbf{r}'$):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}\frac{\sqrt{2m(-E)}}{\hbar}, \tag{8}$$

имеем

$$\left[\Delta_{r'} + \sqrt{\frac{2}{\delta}}\,\frac{(Z\alpha)}{r'} - 1 + \frac{1}{2}\delta + \frac{(Z\alpha)^2}{r'^2} + {} \right.$$
$$\left. {} + i(Z\alpha)\frac{\gamma^0(\mathbf{r}'\cdot\boldsymbol{\gamma})}{r'^3}\right]\varphi = 0. \tag{9}$$

Первые три слагаемых в квадратных скобках уравнения (9) соответствуют преобразованному уравнению Шредингера (см. также ниже (11b)), и не содержат малого фактора $(Z\alpha) \ll 1$, а последние три описывают поправки порядка $(Z\alpha)^2$ по постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c$ по отношению к первым трем (относительно порядка последнего слагаемого в (9) см. также комментарий после формул (12b), (12c), (12d)). При этом параметр $\delta = -E/mc^2$ используемого нерелятивистского приближения с учетом известного значения E (2a) имеет порядок $(Z\alpha)^2$, так что второе слагаемое в квадратных скобках (9), как первое и третье, не содержит $(Z\alpha)$, а четвертое, как отмечено, имеет порядок $(Z\alpha)^2$ и также является поправочным. Отметим, кстати, что релятивистскими и спин-орбитальными поправками к значению E (2a) в нашем приближении можно пренебречь, поскольку они пропорциональны $(Z\alpha)^4$ [1]. Таким образом, при условии $(Z\alpha) \ll 1$ (а $(Z\alpha)^2 \lll 1$), которое при разумных значениях Z имеет место в рассматриваемом нами трехмерном пространстве, можно пренебречь поправочными членами в уравнении (9), оставаясь в рамках нерелятивистского приближения. В последнем замечании мы подразумеваем также, что в пространствах других измерений метод может быть неприменим, так как размерность и, естественно, величина элементарного заряда [5] будут иными, чем в трехмерном пространстве; безразмерный же параметр, аналогичный $(Z\alpha)$ в трехмерном пространстве, в квадрированных уравнениях типа (7), (9) может быть, в принципе, и не малым. В данной работе мы ограничиваемся реальным случаем трехмерного пространства, в котором метод можно применять без каких-либо дополнительных предположений относительно численных значений констант, поскольку последние, разумеется, известны и фиксированы.

В рассматриваемом нерелятивистском пределе $\delta \lll 1$ ($(Z\alpha) \ll 1$) оператор D_+ (5) в используемом в работе стандартном представлении γ-матриц [6] с точностью до несущественного из-за однородности уравнения (4) множителя равен

$$D_+ = \frac{1}{2}(\gamma^0 + 1) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $I, 0$ — единичная и нулевая матрицы 2×2.

Представим спинор φ в виде столбца:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

В соответствии со сказанным и с представлением решения в виде (6) с учетом (10) можно положить тогда в используемом приближении:

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \sim \Psi_{Sh}; \quad \varphi_3, \varphi_4 \to 0, \tag{11a}$$

где Ψ_{Sh} — нормированное решение уравнения Шредингера для водородоподобного атома [1, 7]. Другими словами, оператор (10) выделяет из более широкого класса решений квадрированных уравнений (7), (9) лишь те, которые удовлетворяют исходному уравнению (4). Именно, в главном приближении «по нерелятивизму», аналогично (10), оператор $D_- \sim \sim (\gamma^0 - 1)/2$, так что уравнение (4) с учетом (6) удовлетворяется тождественно: $D_- D_+ = 0$, а в следующем приближении приходим к уравнению на собственные функции Ψ_{Sh} и собственные значения E шредингеровского оператора:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta_r - \frac{(Ze^2)}{r}\right]\Psi_{Sh} = E\Psi_{Sh}. \tag{11b}$$

Таким образом, волновую функцию Ψ_D уравнения Дирака в нашем приближении можно представить в виде

$$\Psi_D \equiv \Psi = \Psi_{Sh} u. \tag{12}$$

Здесь u — безразмерный спинор, который можно выбрать как собственную функцию матрицы-оператора проекции спина на ось 3 [6] (в Σ_3 здесь для простоты опущен множитель 1/2, который присутствует в книге [6]):

$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

поскольку он коммутирует с пропорциональным единичной матрице гамильтонианом уравнения Шредингера (11b), с которым имеем дело в нашем приближении; последнее слагаемое в квадратных скобках (9), поправочное к «безразмерному» гамильтониану Шредингера, равному первым двум слагаемым в (9), не сохраняет z-проекцию спина, но мы его в любом случае в принятом приближении и не учитываем. Тогда спиноры $u_\pm$ соответствуют ориентации спина по оси z (индекс «+»), либо против z («−»):

$$\begin{gathered} u \to u_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_3 u_+ = u_+; \\ u \to u_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_3 u_- = -u_-, \end{gathered} \tag{12a}$$

и обладают важными для дальнейшего изложения свойствами:

$$\begin{gathered} \overline{u}_\pm u_\pm = \overline{u}_\pm \gamma^0 u_\pm = 1, \quad \overline{u}_\pm \gamma^3\gamma^5 u_\pm = \mp 1, \\ \overline{u}_\pm \gamma^1\gamma^5 u_\mp = -1, \quad \overline{u}_\pm \gamma^2\gamma^5 u_\mp = \pm i, \end{gathered} \tag{12b}$$

$$\begin{aligned} \overline{u}_\pm \boldsymbol{\gamma} u_{\pm(\mp)} = \overline{u}_\pm u_\mp = \overline{u}_\pm \gamma^0 u_\mp = \\ = \overline{u}_\pm \gamma^0\gamma^5 u_{\pm(\mp)} = 0. \end{aligned} \tag{12c}$$

Различия правых частей $\sigma_j (= \mp 1, -1, \pm i)$ последних трех равенств (12b) не имеют значения — в окончательный результат разд. 3 неявно входит лишь $\sigma_j^*\sigma_j \equiv |\sigma_j|^2 = 1$, и их вклад в него одинаков (см. также (13d) и (23) с последующим комментарием).

В общем случае смешанного по проекции спина состояния волновая функция равна

$$\begin{gathered} \Psi = a_+ \Psi_D^{(+)} + a_- \Psi_D^{(-)}, \quad \Psi_D^{(\pm)} = \Psi_{Sh} u_\pm, \\ |a_+|^2 + |a_-|^2 = 1. \end{gathered} \tag{12d}$$

В силу первого соотношения (12c) в матричном элементе излучения фотона по лагранжиану (1) и в рассматриваемом приближении по параметру $(Z\alpha)$, когда имеют место соотношения (12a), (12b), (12c), «электронная скобка» равна нулю при значениях индекса $\mu = 1, 2, 3$, и для поперечно поляризованных фотонов эффект в данном приближении отсутствует, как и утверждалось во Введении. Для его рассмотрения необходим учет следующих членов разложения волновой функции Ψ_e по параметру $(Z\alpha)$, и при этом «векторная электронная скобка» $(\overline{\Psi}_e \boldsymbol{\gamma} \Psi_e)$ будет по крайней мере пропорциональна $(Z\alpha)$, но этот случай не входит в задачу данной работы. По этой же причине последнее слагаемое в квадратных скобках (9) при вычислении его матричных элементов на самом деле имеет порядок $(Z\alpha)^2$ (или, возможно, больший — это еще предстоит установить, см. также разд. 4) относительно первых трех, как и два предыдущих, что уже отмечалось в этом разделе.

Для процесса излучения нейтрино $(Ze)^* \to (Ze) + \nu\overline{\nu}$ (разд. 3) в соответствии с соотношениями (12b), (12c) и следующего из них (13d) (см. ниже) подобных затруднений не возникает из-за принципиально различной структуры лагранжианов (1), (3), о чем уже говорилось во Введении.

3. ИЗЛУЧЕНИЕ НЕЙТРИНО ВОДОРОДОПОДОБНЫМ АТОМОМ

Матричный элемент $\langle f|S|i\rangle$ процесса излучения нейтрино с импульсами q, q' водородоподобным атомом $(Ze)^* \to (Ze) + \nu\overline{\nu}$ при переходе атома из состояния с набором квантовых чисел $N = \{n, l, \tilde{m}, S_3\}$ в состояние с набором $N' = \{n', l', \tilde{m}', S_3'\}$ (квантовые числа $n, l, m \to \tilde{m}$ имеют обычный смысл [7], модификация последнего обозначения имеет целью избежать совпадения с используемым в работе обозначением массы m, а $S_3, S_3' = \pm$ характеризует проекцию спина на ось z) запишем в виде

$$\begin{gathered} \langle f|S|i\rangle = i\frac{1}{V\sqrt{2q_0 2q_0'}}\, 2\pi\delta(\Delta E - Q_0) M, \\ Q = q + q', \end{gathered} \tag{13}$$

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}}\, \tilde{M} F^{(e)^\alpha} F^{(\nu)}{}_\alpha, \tag{13a}$$

где «электронная» и «нейтринная» «скобки» с очевидными обозначениями равны

$$\begin{gathered} F^{(e)^\alpha} = \left[\overline{u}_{S_3'} \gamma^\alpha (C_V + C_A\gamma^5) u_{S_3}\right], \\ F^{(\nu)}{}_\alpha = \left[\overline{u}_\nu(q)\gamma_\alpha(1+\gamma^5)u_\nu(-q')\right], \end{gathered} \tag{13b}$$

а «шредингеровский» матричный элемент (здесь $N = \{n, l, \tilde{m}\}$, $N' = \{n', l', \tilde{m}'\}$, $\Psi_{Sh} \to \Psi_{Sh}{}^{(N)}$)

$$\begin{aligned} \tilde{M} \equiv \langle N'| \exp(i(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}))|N\rangle = \\ = \int \Psi_{Sh}{}^{(N')^*} \exp(i(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}))\Psi_{Sh}{}^{(N)}\, dV. \end{aligned} \tag{13c}$$

С учетом свойств (12b) выражение для $F^{(e)^\alpha}$ можно записать в виде

$$F^{(e)^\alpha} = g^\alpha{}_0 C_V + \left(\sum_{j=1,2,3} \sigma_j g^\alpha{}_j\right) C_A, \tag{13d}$$

причем значения параметров σ_j определены после формулы (12c), а каждому из слагаемых в (13d), согласно (12b), соответствует значение S_3', однозначно определяемое значением S_3 (первое и второе равенства (12b) описывают процесс без переворота спина $S_3' = S_3$ — это первое слагаемое и слагаемое $j = 3$ в (13d), а третье и четвертое — с переворотом $S_3' = -S_3$, это слагаемые $j = 1, 2$ в (13d), т. е. «правила отбора» по S_3 имеют вид $\pm \to \pm$, $\pm \to \mp$).

При этом начальное и конечное состояния для простоты считаем имеющими определенные значения z-проекции спина (12), (12a). Обобщение конечных результатов на случай смешанных состояний (12d) представляется очевидным.

Дальнейшие расчеты проводим в дипольном приближении[1)] $|\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}|_{eff} \ll 1$, так что с учетом представления волновой функции [1, 7]

$$\Psi_{Sh}{}^{(N)} = \Theta_{l\tilde{m}}(\theta)\Phi_{\tilde{m}}(\varphi)R_{nl}(r)$$

находим:

$$\begin{aligned}\tilde{M} = i|\mathbf{Q}| \int R_{n'l'}{}^*(r)\Theta_{l'\tilde{m}'}{}^*\Phi_{\tilde{m}'}{}^*(\varphi)\times \\ \times [\cos\theta_Q \cos\theta + \sin\theta_Q \sin\theta \cos\varphi] \times \\ \times R_{nl}(r)\Theta_{l\tilde{m}}(\theta)\Phi_{\tilde{m}}(\varphi)\, d\varphi\, \sin\theta\, d\theta\, r^3 dr. \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом вида

$$\Phi_{\tilde{m}}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{i\tilde{m}\varphi}$$

и правил отбора по квантовому числу $\tilde{m}' = \tilde{m}, \tilde{m}\pm 1$ (которые, впрочем, очевидным образом получаются и из (14)) имеем

$$\tilde{M} = i|\mathbf{Q}|F(\theta_Q), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} F(\theta_Q) = \Big\{ \cos\theta_Q I_{nl,n'l'}{}^{(3)} J_{l\tilde{m},l'\tilde{m}'}{}^{(3)} \delta_{\tilde{m}',\tilde{m}} + \\ + \frac{1}{2}\sin\theta_Q \Big[I_{nl,n'l'}{}^{(1)} J_{l\tilde{m},l'\tilde{m}'}{}^{(1)} \delta_{\tilde{m}',\tilde{m}+1} + \\ + I_{nl,n'l'}{}^{(2)} J_{l\tilde{m},l'\tilde{m}'}{}^{(2)} \delta_{\tilde{m}',\tilde{m}-1} \Big] \Big\}, \end{aligned} \quad (15a)$$

$$J_{l\tilde{m},l'\tilde{m}'}{}^{(3)} \equiv J_{l\tilde{m},l'\tilde{m}}{}^{(3)} = = \int_0^\pi \Theta_{l'\tilde{m}}{}^*(\theta)\cos\theta\sin\theta\,\Theta_{l\tilde{m}}(\theta)\,d\theta, \quad (16a)$$

$$J_{l\tilde{m},l'\tilde{m}'}{}^{(1,2)} \equiv J_{l\tilde{m},l'\tilde{m}\pm1}{}^{(1,2)} = = \int_0^\pi \Theta_{l'\tilde{m}\pm1}{}^*(\theta)\sin^2\theta\,\Theta_{l\tilde{m}}(\theta)\,d\theta, \quad (16b)$$

$$I_{nl,n'l'} \equiv I_{nl,n'l'}{}^{(3)} = I_{nl,n'l'}{}^{(1,2)} = = \int_0^\infty R_{n'l'}{}^*(r)R_{nl}(r)r^3 dr. \quad (17)$$

Функция $\Theta_{l\tilde{m}}(\theta)$ в (16a), (16b) выражается через присоединенные полиномы Лежандра [1, 7]:

$$\Theta_{l\tilde{m}}(\theta) = (-1)^{\tilde{m}}\tilde{C}_{l\tilde{m}}P_l^{\tilde{m}}(\cos\theta), \quad (18)$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{l\tilde{m}} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-\tilde{m})!}{2(l+\tilde{m})!}}, \\ P_l^{\tilde{m}}(x) = (1-x^2)^{\tilde{m}/2}\frac{d^{l+\tilde{m}}}{dx^{l+\tilde{m}}}\left[\frac{(x^2-1)^l}{2^l l!}\right].\end{aligned} \quad (18a)$$

При выполнении условия нормировки

$$\int_0^\infty |R_{nl}|^2 r^2 dr = 1$$

и с переходом к безразмерной переменной [7]

$$\rho = \frac{m(Ze^2)}{\hbar^2}\, r, \quad (19)$$

которая связана с введенной ранее (8) соотношением $\rho = nr'$, имеем также

$$I_{nl,n'l'} = \frac{\hbar^2}{m(Ze^2)}\,\tilde{I}_{nl,n'l'}, \quad (19a)$$

где безразмерная величина

$$\tilde{I}_{nl,n'l'} = \int_0^\infty R_{n'l'}{}^*(\rho)R_{nl}(\rho)\rho^3 d\rho, \quad (19b)$$

а радиальная функция $R_{nl}(\rho)$ может быть выражена либо через обобщенные полиномы Лагерра $L_{n+l}{}^{2l+1}(\rho)$, либо через вырожденную гипергеометрическую функцию [7], причем

$$\begin{aligned} R_{nl}(\rho) = C_{nl}\exp\left(-\frac{\rho}{n}\right)\left(\frac{2\rho}{n}\right)^l \times \\ \times F\left(-n+l+1, 2l+2, \frac{2\rho}{n}\right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$C_{nl} = \frac{2}{n^2(2l+1)!}\sqrt{\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}}.$$

[1)] В обычных единицах $|\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}|_{eff} \to |\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}|_{eff}/\hbar \sim Qr/\hbar$. Учитывая также, что $Q \sim |E|/c$, $r \sim \rho\hbar^2/m(Ze^2)$ (8), (19), и $\rho \sim 1$ (20), (21) для не очень больших значений n и (или) $n'(\sim (<)10)$, получаем $|\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}|_{eff} \sim (Z\alpha)$, и в нашем случае при $(Z\alpha) \ll 1$ дипольное приближение с достаточной (во всяком случае, для оценок) степенью точности справедливо.

Тогда выражение (19b) записывается в виде

$$\tilde{I}_{nl,n'l'} = \left(\frac{2}{n}\right)^l \left(\frac{2}{n'}\right)^{l'} C_{nl}C_{n'l'}\times \\ \times \int\limits_0^\infty F\left(-n+l+1, 2l+2, \frac{2\rho}{n}\right)\times \\ \times F\left(-n'+l'+1, 2l'+2, \frac{2\rho}{n'}\right)\times \\ \times \exp\left\{-\rho\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right)\right\}\rho^{3+l+l'}d\rho. \quad (21)$$

Рецепт вычисления матричных элементов (16a), (16b) с правилами отбора $l' = l \pm 1$ приведен в книгах [1, 7] с соответствующими значениями индекса l' в остальных выражениях. При этих вычислениях используются также рекуррентные соотношения [1]

$$\sin\theta\,\Theta_{l\tilde{m}\pm 1} = A_\pm \Theta_{l-1\tilde{m}} + B_\pm \Theta_{l+1\tilde{m}},$$

$$\cos\theta\,\Theta_{l\tilde{m}} = A\Theta_{l-1\tilde{m}} + B\Theta_{l+1\tilde{m}}$$

и интегралы от квадратичных комбинаций полиномов Лежандра [8] — эту процедуру ввиду ее известности в литературе и как не имеющую принципиального значения для целей данной работы мы опускаем (см. также формулу (23d) ниже и предшествующий комментарий).

Алгоритм вычисления интеграла вида (21) с помощью рекуррентных соотношений сформулирован в книге [7]. Окончательный результат, как и в книге [7], мы не приводим из-за громоздкости соответствующего выражения, что для нас опять-таки не имеет принципиального значения.

Выражение для вероятности будет содержать интеграл по фазовому объему нейтрино от «квадрата нейтринной скобки» $\left(F_\alpha{}^{(\nu)}\right)^* F_\beta{}^{(\nu)}$ с учетом фактора $|\tilde{M}|^2$ (15), (15a):

$$I_{\alpha\beta} = \int \frac{d^3q}{2q_0}\,\frac{d^3q'}{2q'_0}\,\delta(\Delta E - q_0 - q'_0)|\tilde{M}|^2\times \\ \times \left(F_\alpha{}^{(\nu)}\right)^* F_\beta{}^{(\nu)}, \quad (22)$$

который можно переписать в виде

$$I_{\alpha\beta} = \int\limits_{|\mathbf{Q}|^2\le\Delta E^2} d^3Q|\tilde{M}|^2 \int \frac{d^3q}{2q_0}\,\frac{d^3q'}{2q'_0}\times \\ \times \delta^{(0,1,2,3)}(Q-q-q')\times \\ \times \left(F_\alpha{}^{(\nu)}\right)^* F_\beta{}^{(\nu)}, \quad Q_0 = \Delta E. \quad (22a)$$

Второй интеграл в этом выражении является инвариантом, равным, как известно из теории μ-распада, (см. также [2])

$$\frac{4\pi}{3}(Q_\alpha Q_\beta - Q^2 g_{\alpha\beta}) \quad (22b)$$

(массой нейтрино m_ν, как и в [2], в этом разделе пренебрегаем; это вполне оправдано, поскольку ее возможное значение в диапазоне 10^{-3} эВ–1 эВ много меньше величин $\Delta E \equiv E_n - E_{n'}$ для не очень больших значений квантовых чисел n, n' — см. также предшествующую сноску 1). После свертки (22a) с «квадратом электронной скобки» (13d) и с учетом (15) это выражение приобретает вид

$$\tilde{I} \equiv F^{(e)^\alpha}[F^{(e)^\beta}]^* I_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{3}\int\limits_{|\mathbf{Q}|\le\Delta E} d^3Q|\mathbf{Q}|^2 F(\theta_Q)\times \\ \times F^*(\theta_Q)\left[|\mathbf{Q}|^2 C_V{}^2 + Q_0^2 C_A{}^2\right]\Big|_{Q_0=\Delta E}, \quad (23)$$

причем в квадратных скобках мы опустили комбинации вида $Q_\alpha Q_\beta$, $\alpha \ne \beta$, не дающие вклада в $\tilde{I}$; аналогично, слагаемые с разными верхними индексами (15a) в произведении $F(\theta_Q)F^*(\theta_Q)$ не интерферируют.

Простое вычисление с учетом (15a), (19a), (19b) после суммирования по $\tilde{m}'$ дает

$$\tilde{I} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2\left[\frac{1}{7}C_V{}^2 + \frac{1}{5}C_A{}^2\right]A_{nl\tilde{m}}\Delta E^7, \quad (23a)$$

$$A_{nl\tilde{m}} = \left[\frac{\hbar^2}{m(Ze^2)}\right]^2 \tilde{A}_{nl\tilde{m}}, \quad (23b)$$

с безразмерной величиной

$$\tilde{A}_{nl\tilde{m}} = \sum_{l'=l\pm1}\left\{|\tilde{I}_{nl,n'l'}|^2\left[\left|J_{l\tilde{m},l'\tilde{m}}{}^{(3)}\right|^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{2}\left(\left|J_{l\tilde{m},l'\tilde{m}+1}{}^{(1)}\right|^2 + \left|J_{l\tilde{m},l'\tilde{m}-1}{}^{(2)}\right|^2\right)\right]\right\}. \quad (23c)$$

Из-за отмеченной громоздкости общих выражений и для оценки величин $\tilde{A}_{nl\tilde{m}}$ приведем в качестве важного частного случая этот фактор (23c) для первого возбужденного состояния с учетом правил отбора, т. е. его значения $\tilde{A}_{2,1,0}$, $\tilde{A}_{2,1,\pm1}$ ($l' = 0$, $\tilde{m}' = 0$) для перехода $n = 2 \to n' = 1$:

$$\tilde{A}_{2,1,0} = 2^5\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0.55, \\ \tilde{A}_{2,1,\pm1} = 2^6\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 1.11. \quad (23d)$$

Во введенных обозначениях выражение суммарной вероятности излучения нейтрино водородоподобным атомом в единицу времени при переходах

$$|N \equiv \{n, l, \tilde{m}, S_3\}\rangle \to \sum_{l', \tilde{m}', S_3'} \langle N' \equiv \{n', l', \tilde{m}', S_3'\}|$$

равно

$$W_{Nn'} = \frac{G^2}{2(2\pi)^5}\, \tilde{I}. \tag{24}$$

Тогда выражение (24) с учетом (2a), (23a), (23b), (23c) можно переписать в виде

$$W_{Nn'} = \frac{(Gm_p{}^2)^2}{9(2\pi)^3 2^6} \left(\frac{m}{m_p}\right)^4 (Z\alpha)^{12} \times \\ \times \tilde{A}_{nl\tilde{m}} \left[\frac{1}{7}\, C_V{}^2 + \frac{1}{5}\, C_A{}^2\right] \times \\ \times \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)^7 \frac{c}{\lambda_C}, \quad \lambda_C = \frac{\hbar}{mc}. \tag{24a}$$

Соответствующая «интенсивность» $S_{Nn'} = \Delta E \times \times W_{Nn'}$ равна

$$S_{Nn'} = \frac{(Gm_p{}^2)^2}{9(2\pi)^3 2^7} \left(\frac{m}{m_p}\right)^4 (Z\alpha)^{14} \times \\ \times \tilde{A}_{nl\tilde{m}} \left[\frac{1}{7}\, C_V{}^2 + \frac{1}{5}\, C_A{}^2\right] \times \\ \times \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)^8 mc^2 \frac{c}{\lambda_C}. \tag{25}$$

Как следует из комментария к формуле (13d), в этих выражениях фактически уже проведено суммирование и по конечным спиновым состояниям, а не только по квантовым числам l', $\tilde{m}'$ с соответствующими правилами отбора.

Полная вероятность излучения в единицу времени при переходах с энергетического уровня n с набором квантовых чисел N на все «лежащие ниже», $n' < n$, очевидно, равна

$$W_N \equiv W_n = \sum_{n'=1}^{n-1} W_{Nn'}, \tag{25a}$$

а полная интенсивность нейтринного излучения совокупностью атомов —

$$S = \sum_N N_n \sum_{n'=1}^{n-1} S_{Nn'}, \tag{25b}$$

где N_n — число атомов в состоянии с квантовым числом n, которое, очевидно, не зависит от остальных квантовых чисел из набора N. Распределение $N_n(T)$ приведено в нашей работе [2]. При этом зависимость $S(T)$ в принципе может быть найдена численными методами и представлена графически, как и в работе [2], но для целей данной работы, в которой в основном мы иллюстрируем общие принципы расчета по нашей методике, это не представляет интереса.

Если округлить численные факторы до порядка величины и опустить факторы порядка единицы (с учетом значений $C_{V,A} \sim 1$), оставляя лишь характерные множители, в основном определяющие порядок этих величин и их размерность, то в такой упрощенной записи выражения (24a), (25), (25a) могут быть представлены в форме

$$W \to W^{(\nu)} \sim 10^{-5} (Gm_p{}^2)^2 \left(\frac{m}{m_p}\right)^4 \times \\ \times (Z\alpha)^{12} \frac{c}{\lambda_C} \sim 10^{-53} Z^{12} \frac{c}{\lambda_C}, \tag{26a}$$

$$S \to S^{(\nu)} \sim 10^{-6} (Gm_p{}^2)^2 \left(\frac{m}{m_p}\right)^4 \times \\ \times (Z\alpha)^{14} mc^2 \frac{c}{\lambda_C} \sim 10^{-58} Z^{14} mc^2 \frac{c}{\lambda_C}. \tag{26b}$$

Согласно (26a), время жизни $\tau^{(\nu)} = [W^{(\nu)}]^{-1}$ атома водорода в возбужденном состоянии относительно «слабого перехода» $(Ze)^* \to (Ze) + \nu\overline{\nu}$ на много порядков превышает возраст Вселенной, так что вкладом этого процесса в баланс низкоэнергетических нейтрино в ней можно практически пренебречь.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

1. Методом разложения по параметру $(Z\alpha) \ll 1$ в основном по нему приближении найдена волновая функция Ψ_D, являющаяся нерелятивистским решением уравнения Дирака для электрона в поле ядра (Ze). Показано, что Ψ_D можно выбрать как собственную функцию матричного оператора Σ_3 проекции спина на ось 3 и она выражается через соответствующее нормированное решение уравнения Шредингера Ψ_{Sh}: $\Psi_D = \Psi_{Sh} u_\pm$, где $u_\pm$ — собственная функция-спинор оператора Σ_3: $\Sigma_3 u_\pm = \pm u_\pm$, $\overline{u}_\pm u_\pm = 1$.

2. С использованием этого решения и контактного лагранжиана слабого $ee\nu\nu$-взаимодействия получены выражения для вероятности $W^{(\nu)}$ в единицу времени и интенсивности $S^{(\nu)}$ нейтринного излучения водородоподобным атомом $(Ze)^* \to (Ze) + \nu\overline{\nu}$, оказавшиеся пропорциональными соответственно $(Z\alpha)^{12}$, $(Z\alpha)^{14}$.

3. В этом же приближении по $(Z\alpha)$, в котором найдена волновая функция Ψ_D, соответствующие характеристики фотонного излучения $(Ze)^* \to \to (Ze) + \gamma$, в отличие от нейтринного, обращаются в нуль. При дальнейшем развитии метода возможен и расчет характеристик процесса фотонного излучения по лагранжиану (1) с учетом спиновых эффектов. Предварительно можно привести следующие соображения относительно возможного вида формул типа (26a), (26b) для фотонного излучения. Во-первых, фактор $(Gm_p{}^2)^2(m/m_p)^4/2$, очевидно, должен быть заменен на α, во-вторых, матричный элемент $(\overline{\Psi}_e\boldsymbol{\gamma}\Psi_e)$ по лагранжиану (1), равный нулю (как отмечено в разд. 2) в используемом приближении по $(Z\alpha)$, в следующем приближении должен быть пропорционален $(Z\alpha)$. Наконец, в-третьих, из соображений размерности вместо ΔE^7 в формуле вида (23a) будет ΔE^3, поскольку: а) «квадрат нейтринной скобки» $(F_\alpha{}^{(\nu)})^* F_\beta{}^{(\nu)}$ с размерностью квадрата импульса заменяется на безразмерную комбинацию векторов поляризации $e_\alpha{}^* e_\beta$, б) в выражении вероятности будет только один интеграл по фазовому объему, а не два, как при излучении нейтринных пар. По этим причинам а), б) степень $(Z\alpha)$ в формулах типа (26a), (26b) для фотонного излучения уменьшится на 8:

$$\left[(Z\alpha)^k\right]^{(\nu)} \to \left[(Z\alpha)^{k-8}\right]^{(\gamma)}.$$

Далее, с учетом значения матричного элемента

$$|\langle n'|\mathbf{r}|n\rangle|^2 = \left[\hbar^2/m(Ze^2)\right]^2 |\langle n'|\boldsymbol{\rho}|n\rangle|^2$$

(см. также (19), (23b)) выражение (2) можно для удобства представить в виде

$$W^{(\nu)} = \frac{1}{6}(Z\alpha)^4 |\langle n'|\boldsymbol{\rho}|n\rangle|^2 \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)^3 \frac{c}{\lambda_C}, \qquad (27)$$

причем безразмерный матричный элемент $|\langle n'|\boldsymbol{\rho}|n\rangle|$ должен вычисляться по безразмерным радиальным функциям $R_{nl}(\rho)$ и по шаровым функциям $Y_{l\tilde{m}} = = \Theta_{l\tilde{m}}(\theta)\Phi_{\tilde{m}}(\varphi)$, со значением $|\langle n'|\boldsymbol{\rho}|n\rangle|^2$ вида (23c), не зависящим от $(Z\zeta)$.

Таким образом, степень $(Z\alpha)$ по лагранжиану (1) будет совпадать с (2), (27) лишь в случае независимости $(\overline{\Psi}_e\boldsymbol{\gamma}\Psi_e) \neq 0$ от $(Z\alpha)$, однако, как было отмечено, это не так. В связи с этим возможен и другой вариант. Именно, при переходе во втором слагаемом в (5) к сферическим координатам с безразмерной переменной ρ (19) можно убедиться, что оно пропорционально $(Z\alpha)$, являясь следующей по $(Z\alpha)$ поправкой к основному вкладу (10); при вычислении же Ψ по формуле (6) по собственным функциям $\varphi = \Psi_{Sh} u$ (11), (11a), (12), (12a) оператора Σ_3 «нижние» компоненты Ψ оказываются пропорциональными $(Z\alpha)$ и производным по сферическим координатам от Ψ_{Sh} с зависящими от них коэффициентами:

$$\Psi_{down} \sim (Z\alpha) K_{\rho,\theta,\varphi}(\rho, \cos\theta, \varphi)\partial\Psi_{Sh}/\partial\rho, \partial\cos\theta, \partial\varphi,$$

и при этом

$$(\overline{\Psi}_e\boldsymbol{\gamma}\Psi_e) \sim (\Psi'_{down})^* \Psi_{Sh}, {\Psi'_{Sh}}^* \Psi_{down},$$

где сомножители относятся к начальному и конечному состояниям и не являются, естественно, ортогональными (ортогональны ${\Psi'_{Sh}}^*$ и Ψ_{Sh}). Тогда при использовании разложения по малому параметру $\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} \sim (Z\alpha)$ (см. также сноску) «фотонного экспоненциального фактора» $\exp[i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})] = 1 + i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) + \ldots$ отличный от нуля лидирующий вклад дает не второй член разложения (обычно именуемый дипольным приближением), как это получено в данной работе для излучения нейтрино, а первый. Это приводит при прочих равных условиях к уменьшению степени $(Z\alpha)$ в матричном элементе на единицу. В итоге, как можно видеть, будет иметь место та же связь между степенью $(Z\alpha)$ в выражениях для вероятности для нейтринного и фотонного излучения $W^{(\nu)} \sim (Z\alpha)^k$, $W^{(\gamma)} \sim (Z\alpha)^{k-8}$, которые приведены выше. Как установлено, $k = 12$, поэтому $W^{(\gamma)} \sim \sim (Z\alpha)^4$, что совпадает с (27). Нетрудно получить, что другой характерный фактор — число π, как и в (27), также будет отсутствовать в конечном результате при вычислениях нашим методом. Таким образом, по этим двум характерным факторам $(Z\alpha)$ и π оба подхода идентичны. Различие может состоять в функциональной зависимости амплитуд от квантовых чисел, а также в появлении «новых» интегралов по $d\theta$, кроме интегралов типа (16a), (16b), содержащих, как отмечено, производные $d\Theta_{l\tilde{m}}(\theta)/d\cos\theta$, $d\Theta_{l'\tilde{m}'}/d\cos\theta$, или интегралов типа (16a), (16b), но с другими «нестандартными» комбинациями тригонометрических функций. В результате в принципе могут измениться обычные правила отбора [1] по квантовому числу l. Предварительные расчеты показывают, что вполне возможны и другие нечетные значения Δl, кроме ±1, причем правила отбора по m при вычислениях этим методом не меняются: $\Delta\tilde{m} = 0, \pm1$. Однако точные результаты для фотонного излучения по лагранжиану (1) в первом неисчезающем приближении по $(Z\alpha)$ вида (24a), (25) для нейтринного, со строгим доказательством наличия или отсутствия этих других значений Δl, в данной работе мы не приводим — это предмет для отдельного исследования по причине возникающих и пока непреодоленных вычислительных трудностей.

4. Заметим еще, что в рамках метода возможно и рассмотрение излучения аксионов водородоподобным атомом $(Ze)^* \to (Ze) + a$, обусловленное взаимодействием [9]

$$L = \frac{c_2}{2f}(\overline{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi)\frac{\partial a}{\partial x^\mu}, \quad c_2 \sim 1, \tag{28}$$

причем матричный элемент, как и в рассмотренном случае нейтринного излучения, отличен от нуля уже в рассмотренном в работе порядке по $(Z\alpha)$. Однако этот процесс в простейшем варианте по лагранжиану (28) не представляет интереса из-за малости константы взаимодействия $c_2/2f$. Это отчасти может быть компенсировано резонансным эффектом по малой массе аксиона, обусловленным петлевыми вставками в комбинированную внешнюю линию, который, например, имеет место в сильном магнитном поле [3]. В связи с этим вполне возможно резонансное излучение аксиона водородоподобным атомом (если такой резонанс вообще существует в отсутствие магнитного поля — на данном этапе это пока неясно), но для этого, вообще говоря, следует найти функцию Грина электрона в поле точечного ядра в используемом приближении по $(Z\alpha)$, соответствующую уравнению (4), — эта задача тоже нами пока не решена.

5. Рассмотренный в работе процесс генерации нейтрино водородоподобными атомами не может влиять на баланс низкоэнергетических нейтрино во Вселенной. Предварительные оценки показывают, что этот вывод остается в силе и при обобщении результатов на случай генерации нейтрино при переходах электронов в любых атомах $({X_Z}^A)^* \to {X_Z}^A + \nu\overline{\nu}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Соколов, Ю. М. Лоскутов, И. М. Тернов, *Квантовая механика*, Учпедгиз, Москва (1962).

2. В. В. Скобелев, ТМФ **161**, 74 (2009).

3. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **137**, 241 (2010).

4. R. D. Peccei and H. R. Quinn, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977).

5. В. В. Скобелев, Изв. вузов, физика **58**(2), 23 (2015).

6. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Релятивистская квантовая теория*, ч. 1, Наука, Москва (1968).

7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. III, *Квантовая механика, Нерелятивистская теория*, Физматлит, Москва (1963).

8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).

9. G. G. Raffelt, Phys. Rev. D **37**, 1356 (1988).