ЖЭТФ, 2015, том 147, вып. 6, стр. 1271–1281

ИНТЕГРАЛ СТОЛКНОВЕНИЙ В КИНЕТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ РАЗРЕЖЕННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА С УЧЕТОМ ЕГО СПИН-ПОЛЯРИЗАЦИИ

П. В. Сасоров[a], *И. В. Фомин*[a,b*]

[a] *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук*
125047, Москва, Россия

[b] *Московский физико-технический институт*
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 6 октября 2014 г.

Приведен вывод интеграла столкновений в кинетическом уравнении для разреженного спин-поляризованного газа фермионов (электронов). Учитываются столкновения между этими фермионами и столкновения с гораздо более тяжелыми частицами (ионами), образующими случайно расположенный неподвижный фон (газ). Важным новым обстоятельством является то, что амплитуда рассеяния частиц друг на друге не предполагается малой, которую можно было бы получить, например, в первом борновском приближении. Полученный нами интеграл столкновений можно использовать в кинетическом уравнении, в том числе и для относительно холодной разреженной спин-поляризованной плазмы с характерной энергией электронов, меньшей $\alpha^2 m_e c^2$, где α — постоянная тонкой структуры.

DOI: 10.7868/S004445101506021X

1. ВВЕДЕНИЕ

Возможность спин-поляризации плазмы обычно не рассматривается при кинетическом и гидродинамическом описании ее динамики [1, 2]. Эта ситуация имеет место даже несмотря на то, что скорость релаксации макроскопической поляризации плазмы подавлена множителем порядка α^4 (где $\alpha = e^2/\hbar c$ — постоянная тонкой структуры) по сравнению с темпом установления максвелловской функции распределения в полностью ионизованной плазме. В случае, когда значительную роль играют нейтральные атомы (или ионы) и процессы рекомбинации–ионизации, отмеченное подавление имеет порядок α^3. Поэтому спин-поляризованное состояние плазмы должно быть более или менее типичным явлением при определенных способах ее создания. Причина отмеченного выше пренебрежения эффектами спин-поляризации состоит в их слабом влиянии на обычно рассматриваемые свойства плазмы.

Свойства поляризации газов и плазмы рассматривались в ряде работ. Было установлено [3, 4] воздействие оптической ориентации атомов на электропроводность плазмы и интенсивность ее излучения. Это явление было обнаружено в гелиевой плазме при оптической ориентации в ней метастабильных атомов гелия. Не исключено, что создание слабоионизованной плазмы с сильной степенью спин-поляризации, а значит, и с возможным избытком метастабильных по спину атомов и ионов может иметь существенное практическое значение. Дело в том, что избыток метастабильных атомов и ионов может приводить к своеобразной консервации энергии возбужденных атомов и ионов. Это, в свою очередь, может приводить к нестандартным каналам химических реакций в такой слабоионизованной плазме. Свойства подобной плазмы практически не обсуждались в литературе за исключением, может быть, работы [5]. Один из способов создания такой спин-поляризованной плазмы состоит в использовании ферромагнитных катодов в тлеющем разряде [6, 7].

Следует упомянуть, что создание и исследование очень холодных газов из метастабильных атомов, обязанных своим длительным существованием силь-

*E-mail: fominalsha@gmail.com

ной спиновой поляризации системы связанных электронов, является одним из важнейших направлений современных физических исследований (см., например, работы [8–11]). Такие газы проявляют богатые физические свойства. Исследованиям релаксации в таких системах посвящены десятки теоретических работ, например [12].

Нам представляется, что изучение спин-поляризованной плазмы частично сдерживается недостаточным теоретическим исследованием. Важным нерешенным вопросом является, например, скорость релаксации спин-поляризации плазмы. Мы задались вопросом получения надежной оценки скорости релаксации спин-поляризации в полностью ионизованной плазме, когда заряженные частицы взаимодействуют друг с другом в основном за счет кулоновского поля. Оказалось, что в литературе есть очевидный пробел, не позволяющий решить этот вопрос путем простого комбинирования результатов известных работ.

Причина такого состояния теории состоит в следующем. Стандартный вывод интеграла столкновений для кинетического уравнения на основе квантовомеханических амплитуд рассеяния с учетом спиновых переменных выполнен только для случая, когда эти амплитуды рассеяния могут быть получены в первом борновском приближении. В качестве примера мы ссылаемся на монографию [13]. Такая же ситуация складывается и для самой амплитуды рассеяния с учетом переворота спина. В классической серии работ [14–19] для получения конкретных выражений для этих амплитуд рассеяния используется, в конце концов, первое борновское приближение. В результате этого приближения полученные амплитуды не могут быть использованы в области, когда характерная энергия E_T электронов заметно меньше $\alpha^2 m_e c^2$.

Особняком от основной направленности данной работы стоит случай относительно холодной плотной квантовой жидкости [20], когда плотность возбужденных состояний невелика и имеются весьма эффективные методы теоретического исследования кинетики такой жидкости.

Для экспериментального исследования нетривиальных свойств спин-поляризованной плазмы, как ясно из сказанного в начале Введения, лучше всего подходит относительно холодная, почти идеальная плазма, для которой выполнены условия

$$e^2 n_e^{1/3} \ll E_T = p_T^2/2m_e \ll \alpha^2 m_e c^2.$$

Здесь n_e — объемная концентрация электронов, а E_T и p_T — их характерные энергии и импульсы. Из сказанного выше следует, что эту область параметров надо исследовать специально.

В результате возникают две отдельные задачи. Во-первых, надо вывести кинетическое уравнение для электронов с учетом того, что взаимодействие с электронами и ионами и самими электронами нельзя считать слабым в процессе столкновения. Во-вторых, необходимо вычислить амплитуду рассеяния заряженных частиц с учетом спин-орбитального взаимодействия.

Данная работа посвящена первому вопросу — выводу кинетического уравнения для электронов. Наша цель — вывод интеграла столкновений, применимого в области параметров плазмы $e^2 n_e^{1/3} \ll \ll E_T \ll \alpha^2 mc^2$. Это позволяет трактовать электроны плазмы как сильноразреженный невырожденный электронный газ, поскольку в указанной области энергий и плотностей числа заполнений электронных состояний малы. В этом случае мы можем пользоваться подходом одночастичной функции распределения (матрицы плотности). Сильное взаимодействие частиц происходит относительно редко, когда частицы сближаются, поэтому функция распределения, как и распределение спин-поляризации в фазовом пространстве, медленно меняются со временем.

Мы хотим проследить за спиновыми переменными рассеивающихся частиц. Мы выведем интеграл столкновений для кинетического уравнения электронов, пользуясь двумя предположениями: считаем медленным изменение одночастичной матрицы плотности при редких парных рассеяниях частиц и предполагаем известными квантовомеханические амплитуды рассеяния с учетом спиновых переменных.

Рассеяние электронов на ионах и электронах рассматриваем отдельно друг от друга, так как в условиях разреженной плазмы, когда мала роль многократных столкновений, темпы отдельных неинтерферирующих друг с другом процессов можно просто складывать. Из-за малости отношения масс электронов и ионов мы считаем ионы неподвижными и случайно расположенными. Учет следующих членов разложения по параметру $\sqrt{m_e/m_i}$ не представляет, как известно, принципиальных трудностей. При выводе интеграла столкновения считаем плазму однородной. Неоднородность плазмы и наличие средних полей можно учесть в конечном результате путем учета поведения электрона в среднем поле. Как обычно, это накладывает ограничение на степень неоднородности плазмы. Характерный масштаб неоднородности плазмы должен быть больше дебаевского радиуса экранирования в плазме. Кроме того, мы считаем средние поля в плазме достаточно слабыми, чтобы не учитывать их в акте рассеяния.

В результате получается, что кроме обычного кинетического уравнения Больцмана – Власова [21] для полной плотности электронов в фазовом пространстве $n(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ (модифицированного влиянием зависимости сечения рассеяния от спиновых переменных), возникает второе кинетическое уравнение для описания эволюции вектора $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Этот вектор является плотностью в фазовом пространстве $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ вектора $\mathbf{s}$, определяющего поляризационную матрицу плотности [22]. Это дополнительное уравнение в некоторой степени аналогично уравнению Больцмана – Власова. Оно описывает перенос поляризации электронов в фазовом пространстве, в том числе и за счет кулоновских столкновений. Кроме того, это уравнение описывает процессы переворота спина за счет спин-орбитального и спин-спинового взаимодействий.

Основной целью настоящей работы является получение интеграла столкновений в уравнении для $d\mathbf{S}/dt$ для разреженного газа фермионов со спином $1/2$ с учетом процессов переворота спина в процессе рассеяния. Попутно мы получим и интеграл столкновения в уравнении для полной плотности фермионов в фазовом пространстве в рамках тех же самых предположений. Это является дополнительным результатом нашей работы.

Обсудим здесь исторический аспект получения кинетического уравнения для почти идеального газа фермионов в рамках квантовой механики. Последнее необходимо, поскольку одной из интересующей нас степенью свободы является спин, чисто квантовомеханическая степень свободы. Самый общий подход к выводу квантовомеханического кинетического уравнения был развит Ван Хофом и его последователями. Этот этап развития отражен, например, в книге [23]. В ней рассматривалась система с невозмущенным гамильтонианом H_0 с известными невырожденными уровнями энергии, возмущенная маленькой добавкой H_1 к гамильтониану. Теория строилась как теория возмущений с использованием малости H_1 по отношению к H_0. При этом главным в теории было доказательство того, что недиагональные элементы матрицы плотности в представлении по собственным состояниям гамильтониана H_0 являются относительно малыми.

В книге Силина [13] этот подход был значительно обобщен, чтобы можно было получить кинетическое уравнение типа Больцмана, но для газа тождественных фермионов со спином $1/2$. Это возможно в случае, когда длина пробега частиц много больше среднего расстояния между ними[1]. В терминах амплитуды f рассеяния это условие имеет вид

$$f^3 n_e \ll 1. \tag{1}$$

Под f здесь и ниже в аналогичных оценках мы имеем в виду типичные (максимальные) по спиновым переменным амплитуды рассеяния на угол порядка $\pi/2$. При попытке учета того, что средние населенности квантовомеханических состояний, $N_e \sim n_e \hbar^3 p_T^{-3}$, могут быть порядка единицы, возникает условие слабости парного взаимодействия, $f p_T \ll \hbar$. Заметим, что это условие совсем не совпадает с рассмотренным выше условием слабой неидеальности газа, но они следуют друг из друга при дополнительном условии $N_e \sim 1$. В рассмотренных условиях Силиным [13] был получен вывод кинетического уравнения для газа фермионов с учетом того важного обстоятельства, что состояния свободных электронов вырождены относительно направления спинов. Поэтому основными зависимыми переменными для кинетического уравнения являются не только усредненные по поляризации населенности состояний свободных электронов, но и, дополнительно, локальная в фазовом пространстве спиновая часть матрицы плотности. Ключевым моментом этой теории является то, что точная многочастичная матрица плотности приближенно распадется на произведения (с учетом тождественности) одночастичных матриц плотности. Для классического газа аналогичное свойство приближенной факторизации многочастичной функции распределения подробно обсуждается, например, в книге [24]. При конкретной реализации метода работы [13] не была учтена амплитуда переворота спина при рассеянии, а скалярный фактор в амплитуде рассеяния был положен зависящим только от модуля переданного импульса. Последнее всегда имеет место в первом борновском приближении.

Из сказанного выше становится ясным, что имеется еще одна область, когда газ является слабонеидеальным, $f^3 n_e \ll 1$. При этом газ должен быть сильноразреженным, $N_e \ll 1$, а парное взаимодействие частиц может быть произвольно сильным, $f p_T \sim \hbar$. Такая ситуация подходит для рассмотрения динамики спин-поляризации газа электронов в

[1] Это условие сформулировано для короткодействующего потенциала. В качественных оценках мы будем это неявно предполагать. Хорошо известно, что для плазмы аналогичное условие требует большого числа частиц в дебаевской сфере.

относительно холодной, но сильноразреженной плазме. Именно этот случай нас и должен интересовать в свете задач, рассмотренных выше. При этом учет переворота спина при рассеянии является основной целью нашей работы. Мы не будем интересоваться решением задачи парного рассеяния частиц, считая спинорные амплитуды рассеяния известными. Нам кажется, что этот предельный случай ближе к классическому способу получения уравнения Больцмана. Важно отметить, что, поскольку мы не накладываем никаких условий на $fp_T/\hbar$, области применимости рассмотренных тут двух подходов пересекаются. Это может быть использовано для контроля полученных результатов.

Статья построена следующим образом. Сначала получены интегралы столкновений в уравнениях для $n(\mathbf{x},\mathbf{p})$ и для $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ за счет электрон-ионных столкновений. Ионы считаются очень массивными по отношению к электронам, а их гиромагнитные факторы считаются равными нулю. Далее нами получены интегралы столкновений в уравнениях для $n(\mathbf{x},\mathbf{p})$ и для $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ за счет электрон-электронных столкновений. В Заключении сформулированы основные результаты данной работы.

Мы используем систему единиц, где $\hbar = m_e = 1$. Для восстановления вида уравнений в физической системе единиц, например СГС, достаточно соображений размерности. Тем не менее все исходные формулы, (2) и (22), все окончательные формулы, (19), (21), (30) и (31), и все формулы во Введении и в Заключении написаны в физической системе единиц. Последнее относится также ко всем сильным неравенствам во всем тексте, которые определяют сделанные предположения и область применимости полученных результатов.

2. ИНТЕГРАЛ СТОЛКНОВЕНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ С ИОНАМИ

Целью данного раздела является получение интеграла столкновений для электронного кинетического уравнения в разреженной плазме. Начнем с определения амплитуды рассеяния в стационарной нерелятивистской квантовомеханической теории рассеяния частицы со спином $1/2$ на тяжелой неподвижной бесспиновой частице (ионе)[2]. Амплитуда определяется асимптотикой системы стационарных волновых функций рассеяния (с фиксированным импульсом $\mathbf{p}$ и проекцией спина β до столкновения) на больших расстояниях от рассеивающего центра (тяжелого иона), расположенного в точке $x = 0$:

$$\bar{\psi}^{\alpha}_{\mathbf{p}\,\beta}(\mathbf{x}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)\delta^{\alpha}_{\beta} + \\ + \frac{1}{x}\, f^{\alpha}_{\beta}(\mathbf{p},\,\mathbf{p}')\exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right). \quad (2)$$

Здесь

$$f = f^{\alpha}_{\beta}(\mathbf{p},\,\mathbf{p}') \quad (3)$$

— амплитуда рассеяния, $\mathbf{p}'$ является функцией $\mathbf{x}$ и соответствует импульсу после столкновения,

$$\mathbf{p}' = p\,\frac{\mathbf{x}}{|x|}.$$

Формально амплитуда рассеяния определена только для $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$. Окончательное выражение для интеграла столкновений удобно записать в виде выражения, куда $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}$ входят симметрично. Поэтому мы будем мысленно продолжать амплитуду рассеяния по непрерывности в небольшую окрестность сферы $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$ в пространстве $\mathbf{p}'$.

Имеются сильные ограничения на вид амплитуды рассеяния в центральном поле с учетом спин-орбитального взаимодействия [22]. В данной работе мы не накладываем этих ограничений, сохраняя более общий вид получаемых результатов. Мы будем учитывать только унитарность рассеяния и закон сохранения энергии рассеиваемой частицы. Последнее уже использовано в записи выражений (2), (3). Далее мы не будем никак конкретизировать вид амплитуды рассеяния f. Поэтому все ниже следующее будет справедливо для комбинации любого фермиона со спином $1/2$ (далее просто «электрон») и любой гораздо более тяжелой частицы (далее просто «ион»). При этом роль процессов с переворотом спина может находиться в любой пропорции с процессами без переворота спина.

Рассмотрим теперь, как эволюционирует волновая функция электрона, имеющая в начальный момент времени $t = 0$ вид

$$e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\,a^{\alpha},$$

если фермион со спином $1/2$ (электрон) рассеивается на системе неподвижных ионов, расположенных в точках $\mathbf{x} = \mathbf{r}_j$ ($j = 1, 2, \ldots$). Здесь a^{α} — спинорная амплитуда падающей плоской волны. В дальнейшем будем предполагать, что ионы расположены случайно и некоррелированно с постоянной средней плотностью n_i, подразумевая необходимое усреднение по

[2] Мы считаем, что можно пренебречь спином тяжелых частиц в плазме из-за соответствующей малости гиромагнитного отношения.

статистическому ансамблю расположения ионов. В соответствии с исходной постановкой задачи будем считать концентрацию n_i ионов достаточно малой, так что $p_T \gg \hbar|f|^2 n_i$. В этом случае на большом интервале времени Δt, таком, что

$$m_e \hbar p_T^{-2} \ll \Delta t \ll \nu_{ei}^{-1}, \qquad (4)$$

где частоту столкновений ν_{ei} можно оценить как $p_T m_e^{-1}|f|^2 n_i$, эволюцию волновой функции электрона можно описать в виде

$$\psi_{\mathbf{p}}^{\alpha}(\mathbf{x},t) = \exp\left(-\frac{ip^2 t}{2}\right)\Bigg[\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})a^{\alpha}(\mathbf{p}) + \\ + \sum_{\mathbf{r}_j} \frac{f_{\beta}^{\alpha}\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'_j\right)a^{\beta}(\mathbf{p})\exp\left[i\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}_j + p|\mathbf{x}-\mathbf{r}_j|\right)\right]}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_j|} \times \\ \times \theta\left(pt - |\mathbf{x}-\mathbf{r}_j|\right)\Bigg], \qquad (5)$$

где

$$\mathbf{p}'_j = p\,\frac{\mathbf{x}-\mathbf{r}_j}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_j|},$$

а $\theta(w)$ — ступенчатая функция Хэвисайда. Считается, что все ионы одинаковы, поэтому амплитуды $f_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ также одинаковы. Выражение (5) является промежуточной асимптотикой, справедливость которой определяется сильными неравенствами (4). Его левая часть обеспечивает применимость асимптотики (2) для индивидуальных рассеивающих центров и возможность замены плавной переходной функции на ступенчатую θ-функцию. Правая часть неравенства (4) позволяет учитывать только однократные рассеяния на рассеивающих центрах. Вероятность многократного рассеяния заметно меньше на этих временах вероятности однократного рассеяния, которое полностью учтено в выражении (5)[3)].

Рассмотрим теперь смешанное начальное состояние, являющееся ансамблем состояний следующего вида:

$$\psi^{\alpha} = \int \psi_{\mathbf{p}}^{\alpha}(\mathbf{x}, t=0)\, d^3p = \int e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} a^{\alpha}(\mathbf{p})\, d^3p. \qquad (6)$$

Ансамбль таких состояний определяется тем, что a^{α} является гауссовым случайным процессом в импульсном пространстве, таким, что

$$\langle a^{\alpha}\rangle = 0, \quad \left\langle a^{\alpha}(\mathbf{p}_1)a^{\beta}(\mathbf{p}_2)\right\rangle = 0, \\ \left\langle a^{\alpha}(\mathbf{p}_1)\left(a^{\beta}(\mathbf{p}_2)\right)^*\right\rangle = n(\mathbf{p}_1)\rho_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{p}_1)\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2). \qquad (7)$$

Здесь мы рассматриваем пространственно-однородный ансамбль состояний электрона. Такой подход при вычислении интеграла столкновений в полном кинетическом уравнении оправдан, если характерный размер неоднородностей распределения превышает дебаевский радиус.

Локальная в импульсном пространстве спиновая матрица плотности ρ_{β}^{α} нормируется так, что

$$\rho_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{2}\delta_{\beta}^{\alpha} + \boldsymbol{\sigma}_{\beta}^{\alpha}\mathbf{s}(\mathbf{p}), \qquad (8)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ – вектор, составленный из матриц Паули, а $\mathbf{s}$ — обычный трехмерный вектор, по модулю не превышающий $1/2$, однозначно описывающий спиновую матрицу плотности. Важно отметить, что введенная таким образом величина $n(\mathbf{p})$ является плотностью частиц в фазовом пространстве $(\mathbf{x},\mathbf{p})$, просуммированной по состояниям спина[4)]. Она, согласно нашему предположению о пространственной однородности, не зависит от $\mathbf{x}$. Таким образом, начальное состояние нашего ансамбля однозначно определяется матрицей плотности:

$$R_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t=0) = \\ = \left\langle \psi^{\alpha}(\mathbf{x}_1,t=0)\left(\psi^{\beta}(\mathbf{x}_2,t=0)\right)^*\right\rangle = \\ = \left\langle \int \exp\left[i\left(\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_1 - \mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_2\right)\right] \times \\ \times a^{\alpha}(\mathbf{p}_1)a_{\beta}(\mathbf{p}_2)\, d^3p_1\, d^3p_2\right\rangle. \qquad (9)$$

Подставляя в это уравнение выражения (7), получим

$$R_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t=0) = \\ = \int \exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\right]\rho_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{p})\,n(\mathbf{p})\, d^3p. \qquad (10)$$

Эта формула означает, что пространственная зависимость матрицы плотности заключается в разности $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, как и должно быть. Тогда матрица плотности связана преобразованием Фурье с произведением спиновой матрицы плотности и плотности частиц, $\rho_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{p})\,n(\mathbf{p})$.

---

3) Приведенная выше оценка частоты столкновений, $\nu_{ei} \sim p_T m_e^{-1}|f|^2 n_i$ справедлива, вообще говоря, только для короткодействующего потенциала взаимодействия. Для заряженных частиц в плазме, когда f достаточно быстро расходится при $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p} \to 0$, необходима, как хорошо известно, более аккуратная оценка. Эта оценка не меняет того факта, что $\nu_{ie} \to 0$ при $n_i \to 0$.

4) Заметим, что населенность квантовомеханических уровней с заданным импульсом $\mathbf{p}$ и проекцией спина α равна при таком определении $N_{\alpha} = (2\pi\hbar)^3\, n(\mathbf{p})\,\rho_{\alpha}^{\alpha}(\mathbf{p})$ (без суммирования!). Малость эффектов вырождения электронного газа означает, что $N_{\alpha} \ll 1$. Это условие у нас выполнено автоматически, если иметь в виду ту конкретную задачу, о которой говорится во Введении.

Вопрос теперь состоит в следующем: как эволюционирует статистический ансамбль, начальное состояние которого описано выше?

Мы покажем, что с малыми (пренебрежимыми) поправками статистический ансамбль состояний при $n_i(p_T t/m_e)^3 \gg 1$, определяемый начальными условиями (7), обладает статистически такими же свойствами, как и ансамбль начальных состояний, но уже с другими, зависящими от времени функциями $n(\mathbf{p},t)$ и $\rho^\alpha_\beta(\mathbf{p},t)$. При этом статистический ансамбль дополняется условием случайного, статистически однородного распределения рассеивающих центров. Под усреднением $\langle\ldots\rangle$ далее подразумевается не только усреднение по ансамблю начальных условий, но и усреднение по ансамблю различных расположений ионов. Если это так, то закон эволюции, определенный на интервале времен

$$n_i^{-1/3} p_T^{-1} m_e \ll t \ll \nu_{ei}^{-1}, \tag{11}$$

можно продолжить и далее на неопределенно большие t. Заметим, что левая часть последнего сильного неравенства сильнее, чем левая часть сильного неравенства (4), в условиях задачи, поставленной в Введении.

Для доказательства утверждения, сделанного в предыдущем абзаце, обратим внимание на то, что на отмеченном интервале времени решение уравнения Шредингера для волновой функции можно записать в виде

$$\psi^\alpha(\mathbf{x},t) = \int \psi^\alpha_{\mathbf{p}}(\mathbf{x},t)\, d^3p, \tag{12}$$

где нужно подставить $\psi^\alpha_{\mathbf{p}}(\mathbf{x},t)$ из (5), а амплитуды a^α удовлетворяют обсужденным выше соотношениям (7). При выполнении левой части сильного неравенства (11) в сумму, стоящую в правой части выражения (12), вносит вклад огромное число слагаемых, определяемых индивидуальными и некоррелированными друг с другом рассеивающими центрами $\mathbf{r}_j$. По этой причине главный член разложения матрицы плотности, определяемой только усреднением по начальному состоянию электрона, при $n_i(p_T t/m_e)^3 \to \infty$ будет определяться просто плотностью n_i рассеивающих центров с соответствующей заменой суммы на интеграл, а остаточный член — относительно слабыми флуктуациями средней плотности ионов на больших пространственных масштабах порядка $p_T t/m_e$. Таким образом, случайное гауссово поле $\psi^\alpha(\mathbf{x},t)$ в главном члене соответствующего разложения статистически независимо от конкретной реализации расположения ионов и полностью характеризуется своей матрицей плотности:

$$R^\alpha_\beta(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t) = \left\langle \psi^\alpha(\mathbf{x}_1,t)\left(\psi^\beta(\mathbf{x}_2,t)\right)^*\right\rangle, \tag{13}$$

где усреднение проводится и по ансамблю реализаций расположения ионов.

Проводя теперь подстановки (5) → (12) → (13) и выполняя соответствующие интегрирования и усреднения, получаем [5)]

$$\begin{aligned} R^\alpha_\beta(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t) &= \int \exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\right]\times \\ &\times n(\mathbf{p})\rho^\alpha_\beta(\mathbf{p})\, d^3p + 2\pi i t n_i \int n(\mathbf{p})\exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\right]\times \\ &\times\left[\rho^\gamma_\beta(\mathbf{p}) f^\alpha_\gamma(\mathbf{p},\mathbf{p}) - \rho^\alpha_\gamma(\mathbf{p}) f^{*\,\gamma}_\beta(\mathbf{p},\mathbf{p})\right] d^3p + \\ &+ t n_i \int n(\mathbf{p})\exp\left[i\mathbf{p}'\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\right]\rho^\gamma_\mu(\mathbf{p}) f^\alpha_\gamma(\mathbf{p},\mathbf{p}')\times \\ &\times f^{*\,\mu}_\beta(\mathbf{p},\mathbf{p}')\,\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right) d^3p'\, d^3p. \end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, оказывается, что при выполнении сильного неравенства (11) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R^\alpha_\beta(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)\Big|_{t=0} &= \\ &= 2\pi i n_i \int n(\mathbf{p})\exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\right]\times \\ &\times\left[\rho^\gamma_\beta(\mathbf{p}) f^\alpha_\gamma(\mathbf{p},\mathbf{p}) - \rho^\alpha_\gamma(\mathbf{p}) f^{*\,\gamma}_\beta(\mathbf{p},\mathbf{p})\right] d^3p + \\ &+ n_i \int n(\mathbf{p})\exp\left[i\mathbf{p}'\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\right]\rho^\gamma_\mu(\mathbf{p}) f^\alpha_\gamma(\mathbf{p},\mathbf{p}')\times \\ &\times f^{*\,\mu}_\beta(\mathbf{p},\mathbf{p}')\,\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right) d^3p'\, d^3p. \end{aligned} \tag{15}$$

Это уравнение означает, в частности, что если в момент времени $t = t_0$ состояние электрона в поле случайно расположенных ионов описывается матрицей плотности (10) с заменой $t = 0$ на $t = t_0$, то в моменты времени $t_0 + \Delta t$, где Δt удовлетворяет сильному неравенству (11), состояние электрона будет оставаться таким же, но с другими $n(\mathbf{p},t)$ и $\rho^\alpha_\beta(\mathbf{p},t)$. Продолжая итерационно это рассуждение дальше по времени, получаем из уравнения (15) следующее уравнение, описывающее эволюцию $n(\mathbf{p},t)$ и $\rho^\alpha_\beta(\mathbf{p},t)$:

[5)] Далее обозначаем $\left(f^\alpha_\beta\right)^* = f^{*\,\beta}_\alpha$.

$$\frac{1}{2}\delta_\beta^\alpha\left(\frac{dn(\mathbf{p})}{dt}\right)_{st}^{(ei)}+\boldsymbol{\sigma}_\beta^\alpha\left(\frac{d\mathbf{S}(\mathbf{p})}{dt}\right)_{st}^{(ei)}=$$
$$=2\pi i n_i n\,(\mathbf{p})\,\left[\rho_\beta^\gamma(\mathbf{p})f_\gamma^\alpha\,(\mathbf{p},\mathbf{p})-\rho_\gamma^\alpha(\mathbf{p})f_\beta^{*\,\gamma}\,(\mathbf{p},\mathbf{p})\right]+$$
$$+\,n_i\int n\,(\mathbf{p}')\,\rho_\mu^\gamma\,(\mathbf{p}')\,f_\gamma^\alpha\,(\mathbf{p}',\mathbf{p})\,f_\beta^{*\,\mu}\,(\mathbf{p}',\mathbf{p})\;\times$$
$$\times\,\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p',\quad(16)$$

где $\mathbf{S}(\mathbf{p})=n(\mathbf{p})\mathbf{s}(\mathbf{p})$ — плотность спиновой поляризации электронов. При переходе от (15) к (16) использовалось преобразование Фурье.

Унитарность рассеяния означает, в частности, что

$$4\pi\,\mathrm{Im}\,f_\beta^\alpha\,(\mathbf{p},\mathbf{p})=$$
$$=\int f_\beta^\gamma\,(\mathbf{p},\mathbf{p}')\,f_\gamma^{*\,\alpha}\,(\mathbf{p},\mathbf{p}')\,\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'.\quad(17)$$

Вычисляя след уравнения (16) и используя (17), получаем интеграл столкновений в уравнении для dn/dt:

$$\left(\frac{dn(\mathbf{p})}{dt}\right)_{st}^{(ei)}=n_i\int\Big[n\,(\mathbf{p}')\,\rho_\mu^\gamma\,(\mathbf{p}')\,f_\gamma^\beta\,(\mathbf{p}',\mathbf{p})\,\times$$
$$\times\,f_\beta^{*\,\mu}\,(\mathbf{p}',\mathbf{p})-n\,(\mathbf{p})\,\rho_\mu^\gamma\,(\mathbf{p})\,f_\gamma^\beta\,(\mathbf{p},\mathbf{p}')\,f_\beta^{*\,\mu}\,(\mathbf{p},\mathbf{p}')\Big]\;\times$$
$$\times\,\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'.\quad(18)$$

Возможна дальнейшая конкретизация этого уравнения путем подстановки $n\,(\mathbf{p})\,\rho_\beta^\alpha\,(\mathbf{p})\;=\;n\,(\mathbf{p})\,\delta_\beta^\alpha/2\,+$ $+\,\boldsymbol{\sigma}_\beta^\alpha\mathbf{S}\,(\mathbf{p})$:

$$\left(\frac{dn(\mathbf{p})}{dt}\right)_{st}^{(ei)}=$$
$$=\frac{1}{m_e}\,\frac{n_i}{2}\int\Big[n\,(\mathbf{p}')\,f_\gamma^\beta\,(\mathbf{p}',\mathbf{p})\,f_\beta^{*\,\gamma}\,(\mathbf{p}',\mathbf{p})\,-$$
$$-\,n\,(\mathbf{p})\,f_\gamma^\beta\,(\mathbf{p},\mathbf{p}')\,f_\beta^{*\,\gamma}\,(\mathbf{p},\mathbf{p}')\Big]\,\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'\,+$$
$$+\,\frac{1}{m_e}\,n_i\int\Big[\mathbf{S}\,(\mathbf{p}')\,\boldsymbol{\sigma}_\mu^\gamma f_\gamma^\beta\,(\mathbf{p}',\mathbf{p})\,f_\beta^{*\,\mu}\,(\mathbf{p}',\mathbf{p})\,-$$
$$-\,\mathbf{S}\,(\mathbf{p})\,\boldsymbol{\sigma}_\mu^\gamma f_\gamma^{*\,\beta}\,(\mathbf{p},\mathbf{p}')\,f_\beta^\mu\,(\mathbf{p},\mathbf{p}')\Big]\;\times$$
$$\times\,\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'.\quad(19)$$

Умножая матрично уравнение (16) на $\boldsymbol{\sigma}_\lambda^\beta$ и производя свертку по спинорным индексам, получаем

$$\left(\frac{d\mathbf{S}(\mathbf{p})}{dt}\right)_{st}^{(ei)}=$$
$$=\pi i n_i n\,(\mathbf{p})\;\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\beta\left[\rho_\beta^\gamma(\mathbf{p})f_\gamma^\alpha\,(\mathbf{p},\mathbf{p})-\rho_\gamma^\alpha(\mathbf{p})f_\beta^{*\,\gamma}\,(\mathbf{p},\mathbf{p})\right]+$$
$$+\,\frac{n_i}{2}\int n\,(\mathbf{p}')\,\rho_\mu^\gamma\,(\mathbf{p}')\,\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\beta\,f_\gamma^\alpha\,(\mathbf{p}',\mathbf{p})\;f_\beta^{*\,\mu}\,(\mathbf{p}',\mathbf{p})\;\times$$
$$\times\,\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'.\quad(20)$$

Подставляя сюда выражение $n\,(\mathbf{p})\,\rho_\beta^\alpha\,(\mathbf{p})\;=$ $=\;n\,(\mathbf{p})\,\delta_\beta^\alpha/2\,+\,\boldsymbol{\sigma}_\beta^\alpha\mathbf{S}\,(\mathbf{p})$ и учитывая соотношение

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\beta\,\left(\boldsymbol{\sigma}_\beta^\gamma\cdot\mathbf{S}\right)=\mathbf{S}\,\delta_\alpha^\gamma+i\mathbf{S}\times\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\gamma,$$

получаем окончательный вид интеграла столкновений в кинетическом уравнении для эволюции распределения плотности вектора поляризации электронов в фазовом пространстве с учетом столкновений электронов с ионами:

$$\left(\frac{d\mathbf{S}\,(\mathbf{p})}{dt}\right)_{st}^{(ei)}=-\frac{2\pi\hbar}{m_e}\,\mathbf{S}\,(\mathbf{p})\times\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\beta\,\mathrm{Re}\,f_\beta^\alpha\,(\mathbf{p},\mathbf{p})\;n_i\,+$$
$$+\,\frac{n_i}{2\,m_e}\int\Big[\left(\boldsymbol{\sigma}_\mu^\gamma\cdot\mathbf{S}\,(\mathbf{p}')\right)\;f_\gamma^\alpha\,(\mathbf{p}',\mathbf{p})\,\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\beta f_\beta^{*\,\mu}\,(\mathbf{p}',\mathbf{p})\,-$$
$$-\,\mathbf{S}\,(\mathbf{p})\,f_\beta^\alpha\,(\mathbf{p},\mathbf{p}')\,f_\alpha^{*\,\beta}\,(\mathbf{p},\mathbf{p}')\Big]\,\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'\,+$$
$$+\,\frac{n_i}{4m_e}\int\Big[n\,(\mathbf{p}')\,f_\mu^\alpha\,(\mathbf{p}',\mathbf{p})\;\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\beta\,f_\beta^{*\,\mu}\,(\mathbf{p}',\mathbf{p})\,-$$
$$-\,n\,(\mathbf{p})\,f_\mu^{*\,\alpha}\,(\mathbf{p},\mathbf{p}')\;\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\beta\,f_\beta^\mu\,(\mathbf{p},\mathbf{p}')\Big]\;\times$$
$$\times\,\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'.\quad(21)$$

Обратим внимание, что последние, «перекрестные» слагаемые в уравнениях (19) и (21) обладают определенной симметрией. Это необходимо для выполнимости теоремы Онзагера для систем, близких к термодинамическому равновесию. Заметим попутно, что мы не учитывали вращательную симметрию и симметрию по отношению к обращению времени в амплитудах рассеяния. Поэтому полученный вид интегралов столкновений несколько более общий, чем при произвольной амплитуде рассеяния электронов на бесспиновых частицах. Например, в указанных довольно общих физических случаях первое слагаемое в уравнении (21), описывающее когерентное вращение вектора $\mathbf{S}$, тождественно обращается в нуль.

3. ИНТЕГРАЛ СТОЛКНОВЕНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ С ЭЛЕКТРОНАМИ

В этом разделе мы рассмотрим рассеяние электронов на электронах и вклад этих процессов в интегралы столкновений, входящие в уравнения для dn/dt и в $d\mathbf{S}/dt$. Основная аргументация и вычисления будут в значительной мере повторять то, что сказано в предыдущем разделе. Поэтому мы позволим себе сильно сократить изложение. Отметим ключевое, но типичное упрощение, которое используется для получения интеграла столкновения, $\nu_{ee} \ll n_e^{1/3} p_T m_e^{-1}$. При этом многоэлектронная матрица плотности при усреднении по характерным временам Δt, таким, что $\nu_{ee}^{-1} \gg \Delta t \gg n_e^{-1/3} p_T^{-1}\, m_e$, приближенно факторизуется как произведение одночастичных матриц плотности. Мы не будем рассматривать здесь это общее свойство разреженных систем статистической физики, ссылаясь, например, на [24]. Отметим, что оно позволяет нам рассмотреть только одну пару электронов в заданном объеме V при усреднении по состояниям одного электрона из этой пары.

Единственная используемая нами информация о квантовомеханическом рассеянии электронов друг на друге — это асимптотическое выражение для парной волновой функции стационарной теории рассеяния (нетождественных) частиц:

$$\bar{\psi}^{\alpha\beta}_{\mathbf{p}_1\delta;\mathbf{p}_2\gamma}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{P}_{12}\cdot\mathbf{X}_{12}\right) \times \times \left[\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_{12}\cdot\mathbf{x}_{12}\right)\delta^\alpha_\delta\delta^\beta_\gamma + \frac{1}{x_{12}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_{12}x_{12}\right) \times \times f^{\alpha\beta}_{\delta\gamma}\left(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}'_1,\mathbf{p}'_2\right)\right], \quad (22)$$

где

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}_{12} = \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{2}, \quad \mathbf{X}_{12} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}, \quad \mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad (23)$$

$$\mathbf{p}'_{12} = p\,\frac{\mathbf{x}_{12}}{x_{12}}, \quad \mathbf{p}'_1 = \frac{1}{2}\mathbf{P}_{12} + \mathbf{p}'_{12}, \quad \mathbf{p}'_2 = \frac{1}{2}\mathbf{P}_{12} - \mathbf{p}'_{12}, \quad (24)$$

$\mathbf{x}_1$, α, $\mathbf{x}_2$, β — пространственные и спинорные координаты электронов, а $\mathbf{p}_{1,2}$, δ и γ — квантовые числа состояния, описываемого данной волновой функцией. Соотношения (23) и (24) вводят удобные обозначения, связанные с системой центра инерции: полный и приведенный импульсы, координату центра инерции и приведенную координату, импульсы после рассеяния, определенные направлением рассеяния в системе центра инерции и т. п.

Тогда общая нестационарная волновая функция пары электронов из рассматриваемого ансамбля (с учетом тождественности электронов) приобретает вид

$$\psi^{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t) = = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \exp\left[i\left(\mathbf{P}_{12}\cdot\mathbf{X}_{12} - \frac{t}{2}\left(p_1^2+p_2^2\right)\right)\right] \times \times \left[\exp(i\mathbf{p}_{12}\cdot\mathbf{x}_{12})\delta^\alpha_m\delta^\beta_n - \exp(-i\mathbf{p}_{12}\cdot\mathbf{x}_{12})\delta^\beta_m\delta^\alpha_n + + \frac{\exp(ip_{12}x_{12})}{x_{12}}\,F^{\alpha\beta}_{mn}\left(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}'_1,\mathbf{p}'_2\right)\theta(2pt - x_{12})\right] \times \times a^m(\mathbf{p}_1)b^n(\mathbf{p}_2)\,d^3p_1d^3p_2, \quad (25)$$

где случайные, некоррелированные друг с другом амплитуды $a^\alpha\left(\mathbf{p}\right)$ и $b^\alpha\left(\mathbf{p}\right)$ определяются соотношениями, аналогичными уравнениям (7). При этом

$$F^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}'_1,\mathbf{p}'_2) = f^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}'_1,\mathbf{p}'_2) - - f^{\beta\alpha}_{\gamma\delta}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}'_2,\mathbf{p}'_1).$$

Общий численный множитель в выражении (25) определяется нормировкой на единицу этой волновой функции в объеме V, при том что

$$V\int n\left(\mathbf{p}\right)\,d^3p = 2.$$

Начальная одночастичная матрица плотности, соответствующая выражению (25), равна[6]:

$$R^\alpha_\beta(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,0) = = \sum_\mu \int \left\langle \psi^{\alpha\mu}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_3,t)\left[\psi^{\beta\mu}(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,t)\right]^*\right\rangle_{t=0} d^3x_3 = = \frac{1}{2}\int n(\mathbf{p})\rho^\alpha_\beta(\mathbf{p})\exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\right]\,d^3p. \quad (26)$$

Зависимости $n(\mathbf{p},t)$ и $\rho^\alpha_\beta(\mathbf{p},t) = \delta^\alpha_\beta/2 + \boldsymbol{\sigma}^\alpha_\beta\mathbf{s}(\mathbf{p},t)$ ($s \le$ $\le 1/2$) от времени t определяются временной эволюцией волновой функции (25) и следующим выражением, обобщающим уравнение (26) на $t > 0$:

[6] При этом вычислении, как и всюду ниже, мы последовательно используем приближение $N_\alpha(\mathbf{p}) = (2\pi\hbar)^3\,n(\mathbf{p}) \ll 1$. Напомним, что только в этом случае кинетическое уравнение для электронов имеет смысл, когда $fp \sim \hbar$.

$$R^{\alpha}_{\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = \\ = \sum_{\mu} \int \left\langle \psi^{\alpha\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, t) \left[\psi^{\beta\mu}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, t)\right]^* \right\rangle d^3x_3 = \\ = \frac{1}{2} \int n(\mathbf{p}, t) \rho^{\alpha}_{\beta}(\mathbf{p}, t) \exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\right] d^3p. \quad (27)$$

Нам нужно провести все интегрирования во втором выражении уравнения (27) при подстановке туда (25). Эта процедура довольно громоздка, но не встречает никаких принципиальных трудностей при выполнении условия, аналогичного (11). Детали этих вычислений мы опускаем. В результате получаем[7)]

$$R^{\alpha}_{\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = R^{\alpha}_{\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, 0) + \\ + it\frac{\pi}{2} \int d^3p_1 d^3p_2\, n(\mathbf{p}_1) n(\mathbf{p}_2) \times \\ \times \Big\{ \exp\left(i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_{12}\right) \rho^{\gamma}_{\beta}(\mathbf{p}_1) \rho^{\delta}_{\mu}(\mathbf{p}_2) \times \\ \times \left[F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - F^{\alpha\mu}_{\delta\gamma}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)\right] - \\ - \exp\left(i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_{12}\right) \rho^{\alpha}_{\epsilon}(\mathbf{p}_1) \rho^{\mu}_{\xi}(\mathbf{p}_2) \times \\ \times \left[F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - F^{*\,\xi\epsilon}_{\beta\mu}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)\right]\Big\} + \\ + \frac{t}{2} \int d^3p'_1 d^3p'_2\; d^3p_1 d^3p_2 \times \\ \times \Bigg[n(\mathbf{p}_1) n(\mathbf{p}_2) \rho^{\gamma}_{\epsilon}(\mathbf{p}_1) \rho^{\delta}_{\xi}(\mathbf{p}_2) \exp\left(i\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{x}_{12}\right) \times \\ \times F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) \times \\ \times \delta\left(\frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} - \frac{p_1^{'2}}{2} - \frac{p_2^{'2}}{2}\right) \delta\left(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2\right)\Bigg]. \quad (28)$$

Приравнивая это выражение последнему выражению в уравнении (27), получаем (после применения преобразования Фурье) следующее уравнение, определяющее эволюцию $n(\mathbf{p}, t)$ и $\mathbf{S}(\mathbf{p}, t)$:

$$\frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta} \left(\frac{dn(\mathbf{p}_1)}{dt}\right)^{(ee)}_{st} + \boldsymbol{\sigma}^{\alpha}_{\beta} \left(\frac{d\mathbf{S}(\mathbf{p}_1)}{dt}\right)^{(ee)}_{st} = \\ = i\pi \int n(\mathbf{p}_1) n(\mathbf{p}_2) \Big\{ \rho^{\gamma}_{\beta}(\mathbf{p}_1) \rho^{\delta}_{\mu}(\mathbf{p}_2) \times \\ \times \left[F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - F^{\alpha\mu}_{\delta\gamma}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)\right] - \\ - \rho^{\alpha}_{\epsilon}(\mathbf{p}_1) \rho^{\mu}_{\xi}(\mathbf{p}_2) \Big[F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - \\ - F^{*\,\xi\epsilon}_{\beta\mu}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)\Big]\Big\} d^3p_2 + \\ + \int n(\mathbf{p}'_1) n(\mathbf{p}'_2) \rho^{\gamma}_{\epsilon}(\mathbf{p}'_1) \rho^{\delta}_{\xi}(\mathbf{p}'_2) \times \\ \times F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \times \\ \times \delta\left(\frac{p_1^{'2}}{2} + \frac{p_2^{'2}}{2} - \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2}\right) \times \\ \times \delta\left(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\right) d^3p'_2\, d^3p'_1\, d^3p_2. \quad (29)$$

Расщепляя, как и ранее для e–i-столкновений, последнее выражение на уравнения для dn/dt и для $d\mathbf{S}/dt$, получаем следующие выражения для интегралов e–e-столкновений:

$$\left(\frac{dn(\mathbf{p}_1)}{dt}\right)^{(ee)}_{st} = \\ = \frac{1}{m_e} \int \Big[n(\mathbf{p}'_1) n(\mathbf{p}'_2) \rho^{\gamma}_{\epsilon}(\mathbf{p}'_1) \rho^{\delta}_{\xi}(\mathbf{p}'_2) \times \\ \times F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) F^{*\,\epsilon\xi}_{\alpha\mu}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - \\ - n(\mathbf{p}_1) n(\mathbf{p}_2) \rho^{\gamma}_{\epsilon}(\mathbf{p}_1) \rho^{\delta}_{\xi}(\mathbf{p}_2) F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) \times \\ \times F^{*\,\epsilon\xi}_{\alpha\mu}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)\Big] \times \\ \times \delta\left(\frac{p_1^{'2}}{2} + \frac{p_2^{'2}}{2} - \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2}\right) \times \\ \times \delta\left(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\right) d^3p'_2\, d^3p'_1\, d^3p_2, \quad (30)$$

и

$$\left(\frac{d\mathbf{S}(\mathbf{p}_1)}{dt}\right)^{(ee)}_{st} = i\frac{\pi\hbar}{2m_e} \int n(\mathbf{p}_1) n(\mathbf{p}_2) \boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha} \times \\ \times \Big\{ \rho^{\gamma}_{\beta}(\mathbf{p}_1) \rho^{\delta}_{\mu}(\mathbf{p}_2) \Big[F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - \\ - F^{\alpha\mu}_{\delta\gamma}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)\Big] - \rho^{\alpha}_{\epsilon}(\mathbf{p}_1) \rho^{\mu}_{\xi}(\mathbf{p}_2) \times \\ \times \left[F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - F^{*\,\xi\epsilon}_{\beta\mu}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)\right]\Big\} d^3p_2 + \\ + \frac{1}{2m_e} \int n(\mathbf{p}'_1) n(\mathbf{p}'_2) \boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha} \rho^{\gamma}_{\epsilon}(\mathbf{p}'_1) \rho^{\delta}_{\xi}(\mathbf{p}'_2) \times \\ \times F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \times \\ \times \delta\left(\frac{p_1^{'2}}{2} + \frac{p_2^{'2}}{2} - \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2}\right) \times \\ \times \delta\left(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\right) d^3p'_2\, d^3p'_1\, d^3p_2. \quad (31)$$

В первом из этих уравнений было использовано, дополнительно для упрощения записи, условие унитарности. Отметим, что в (30) и (31) возможно дальнейшее уточнение с помощью подстановки $n(\mathbf{p})\rho^{\alpha}_{\beta}(\mathbf{p}) = \delta^{\alpha}_{\beta} n(\mathbf{p})/2 + \boldsymbol{\sigma}^{\alpha}_{\beta} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{p})$. В отличие от случая с ионами (см. выражения (19) и (21)), эта подстановка не при-

[7)] Здесь и далее мы используем следующее сокращенное обозначение: $\left(F^{\delta\gamma}_{\alpha\beta}\right)^* = F^{*\,\alpha\beta}_{\delta\gamma}$.

водит к упрощению формулы, а лишь загромождает ее.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены интегралы столкновений (19), (21), (30) и (31), входящие в кинетические уравнения для полной плотности электронов в фазовом пространстве $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ и для плотности параметра $\mathbf{s}$ в том же пространстве, определяющего спиновую часть одночастичной матрицы плотности. Первые два интеграла столкновений, (19) и (21), относятся к столкновениям электронов с ионами, а вторые два, (30) и (31), к столкновениям электронов с электронами. При выводе этих интегралов столкновений не использовалась малость амплитуды рассеяния. Допускалось, что $p_T f \sim \hbar$, а вместо условия малости амплитуды использовалось условие достаточной разреженности плазмы,

$$n_e \ll f^{-3}. \tag{32}$$

В таком случае возникает дополнительное требование, чтобы населенности N_e электронных квантово-механических состояний были бы малы. Поэтому реально мы использовали сильное ограничение

$$N_\alpha \ll 1. \tag{33}$$

Последнее означает, в частности, что электронная система далека от фермиевского вырождения. Полученные выражения справедливы и при малых средних энергиях электронов, $E_T < \alpha^2 m_e c^2$, что типично для не очень горячей плазмы.

Отметим, что в статье учитывались не все свойства амплитуды рассеяния фермиона в центральном поле, а лишь свойство унитарности рассеяния и закон сохранения энергии. В частности, никак не использовалось то, что взаимодействие между электронами и электронами, а также между электронами и ионами полностью определено. Таким образом, полученный нами интеграл столкновений описывает произвольные нерелятивистские фермионы с определенными ограничениями (33).

Наиболее распространенной и интересной областью применения этих интегралов столкновений является плазма. Для этого требуется вычислить амплитуды рассеяния электронов на электронах и ионах с учетом спин-орбитального взаимодействия в области параметров, где $E_T < \alpha^2 m_e c^2$. Можно заранее предположить сильное упрощение внешнего вида полученных интегралов столкновений для плазмы. В этом случае главная по величине часть интегралов столкновений сведется, скорее всего, к форме Ландау [1]. Аналогичное упрощение возможно и в тех частях интегралов столкновений (21) и (31), которые относятся к перевороту спина при рассеянии.

Применение интегралов столкновений из монографии [13] для водородной плазмы с параметрами, например, $T \approx 3$ эВ и плотность $\rho \sim$ $\sim (1–3) \cdot 10^{-7}$ г/см^3, не является, строго говоря, обоснованным, в отличие от интегралов столкновений, полученных в нашей работе[8]. В полной мере это касается только интеграла столкновений в уравнении для динамики спин-поляризации. Не исключено, что слагаемые, описывающие релаксацию спин-поляризации, полученные методами работы [13], дадут сильно искаженные результаты в отмеченной области параметров. Именно с ориентацией на такую разреженную плазму и была выполнена эта работа. Подчеркнем, во избежание недоразумений, что для использования полученных нами интегралов столкновений в общем виде для плазменных задач необходимо закончить вычисления соответствующих амплитуд рассеяния, определенных в (2) и (22), как это было объяснено во Введении.

Интегралы столкновений, полученные здесь и в монографии [13], имеют общую область применимости, когда $N_e \ll 1$ и $f p_T \ll \hbar$. Следует отметить, что хотя методы монографии [13] имеют широкую область применимости, окончательные результаты для интегралов столкновений приведены только при следующих двух дополнительных ограничениях. Первое их них состоит в том, что не учитываются взаимодействия, влияющие непосредственно на спиновые переменные. Второе — в том, что отброшены эффекты обменного взаимодействия. Чтобы из наших более общих выражений получить интегралы столкновений с такими ограничениями, мы положили для этого сравнения в наших выражениях, что $f^{\alpha\beta}_{\gamma\mu} = \delta^\alpha_\gamma \delta^\beta_\mu A(|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1|)$, причем $A p_T/\hbar \to 0$. Кроме того, для того чтобы избавиться от эффектов обменного взаимодействия, которые автоматически учтены в выражениях (30) и (31), мы положили, что вектор спин-поляризации $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ параллелен, например, оси z вне зависимости от импульса $\mathbf{p}$. После таких упрощений в наших выражениях для интегралов столкновений они совпали (в пределе $f p_T \ll \hbar$) с интегралами столк-

[8] Напомним, что методы работы [13] сориентированы на относительно горячую плазму с температурой заметно большей, чем 27 эВ, причем ее плотность может быть и большой, вплоть до $N_\alpha \sim 1$. В этой области параметров адекватность подхода работы [13] не подлежит сомнению.

новений из работы [13] в пределе $N_e \ll 1$. Это сопоставление обеспечивает взаимную проверку наших результатов и результатов монографии [13]. Следует попутно отметить, что обменные эффекты являются наиболее сильными (в общем случае) и интересными в пределе $Ap_T/\hbar \to 0$. Данные эффекты были частично рассмотрены Силиным [13].

Авторы благодарны рецензенту, ценные критические замечания которого позволили, на наш взгляд, сделать нашу статью интересной для большего числа потенциальных читателей. Один из авторов (П. С.) благодарен В. В. Янькову. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант №15-01-6195).

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
3. В. Н. Севастьянов, Р. А. Житников, ЖЭТФ **56**, 1508 (1969).
4. Р. А. Житников, УФН **104**, 168 (1971).
5. V. V. Yankov, Phys. Scripta **57**, 460 (1998).
6. А. Б. Ваганов, УФН **119**, 257 (1976).
7. C. K. Sinclair, P. A. Adderley, B. M. Dunham et al., Phys. Rev. ST AB **10**, 023501 (2007).
8. J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels et al., Science **292**, 476 (2001).
9. D. S. Naik and C. Raman, Phys. Rev. A **71**, 033617 (2005).
10. E. W. Streed, A. P. Chikkatur, T. L. Gustavson et al., Rev. Sci. Instrum. **77**, 023106 (2006).
11. D. Comparat, A. Fioretti, G. Stern et al., Phys. Rev. A **73**, 043410 (2006).
12. P. O. Fedichev, M. W. Reynolds, U. M. Rahmanov et al., Phys. Rev. A **53**, 1447 (1996).
13. В. П. Силин, *Введение в кинетическую теорию газов*, Либерком, Москва (2013).
14. N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. London A **124**, 425 (1929); **135**, 429 (1932).
15. C. Möller, Ann. der Phys. **406**, 531 (1932).
16. Н. Мотт, Г. Месси, *Теория атомных столкновений*, Изд-во иностр. лит., Москва (1951).
17. W. H. McMaster, Amer. J. Phys. **22**, 351 (1954).
18. G. Ford and C. Mullen, Phys. Rev. **108**, 447 (1957).
19. P. Stehle, Phys. Rev. **110**, 1458 (1958).
20. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, УФН **66**, 177 (1958).
21. А. А. Власов, УФН **93**, 444 (1967).
22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика* (*нерелятивистская теория*), Физматлит, Москва (2004).
23. A. Isihara, *Statistical Physics*, Acad. Press, New York (1971).
24. Ю. Л. Климонтович, *Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы*, Наука, Москва (1975).