ЖЭТФ, 2015, том 147, вып. 6, стр. 1113–1119

ТЕОРИЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ АККРЕЦИИ ВЕЩЕСТВА С УЛЬТРАЖЕСТКИМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ НА ЧЕРНУЮ ДЫРУ

С. В. Чернов *

Астрокосмический центр, Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117997, Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 сентября 2014 г.

Рассматривается магнитогидродинамическая теория сферически-симметричной аккреции идеальной жидкости на черную дыру Шварцшильда с ультражестким уравнением состояния $p = \mu \sim \rho^2$, где p — давление, μ — суммарная плотность энергии, ρ — плотность жидкости. Выписывается приближенное аналитическое решение. Показано, что для вырожденного ультражесткого уравнения состояния вещества вместо двух критических поверхностей (быстрой и медленной магнитозвуковых поверхностей) образуется одна критическая звуковая поверхность, которая совпадает с горизонтом событий черной дыры.

DOI: 10.7868/S004445101506004X

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория магнитогидродинамической (МГД) аккреции имеет важное практическое значение для современного объяснения наблюдаемых проявлений во многих астрофизических системах. Спектр применения МГД-теории очень широк: от струйных выбросов из молодых звезд до сверхмассивных черных дыр в активных ядрах галактик [1, 2]. Хотя такие системы довольно различны, они одинаковым образом проявляют свою активность в виде струйных выбросов, джетов. Поэтому предполагается, что существует единственный механизм, который ответствен за выделения энергии в таких разнообразных системах. И все больше исследователей склоняются к тому, что именно МГД-механизм ответствен за ускорение частиц и коллимацию в джетах.

Задача аккреции на компактные объекты уже стала классической в астрофизике. Впервые такая задача рассматривалась в работах Бонди и Хойла [3, 4]. Они рассмотрели гидродинамическую теорию аккреции идеальной жидкости на точечный гравитирующий источник в ньютоновской механике. Обобщение на случай черной дыры Шварцшильда было выполнено в работе [5]. Хотя гидродинамическая задача проще, чем задача МГД-аккреции, найти точное аналитическое решение оказалось возможным только для некоторых уравнений состояний, например, для пыли, траектория движения которой совпадает с траекторией геодезической, для различного рода баротропных и политропных уравнений состояния, включая фотонный газ и ультражесткое уравнение состояния, о котором речь пойдет ниже. Удивительно, но для ультражесткого уравнения состояния оказалось возможным найти точное аналитическое решение в более сложной метрике, а именно, в метрике вращающейся и заряженной черной дыры Керра [6] и Керра–Ньюмена [7].

С теорией МГД-аккреции дело обстоит намного сложнее. Впервые задача МГД-аккреции была рассмотрена в работе [8]. Обобщение на случай черной дыры было выполнено во многих работах (см., например, [9]). Несмотря на всю сложность задачи, удалось найти аналитические решения в так называемом бессиловом приближении, где пренебрегается массой частиц [10, 11]. В последнее время в связи с развитием вычислительной техники такие задачи стали решаться численными методами [12, 13], тем не менее аналитические методы все еще могут пролить свет на некоторые вопросы теории МГД-аккреции [9, 14–17]. Хотя теория и согласуется с численными экспериментами, мы еще далеки от полного понимания всех физических процессов, происходящих при МГД-аккреции.

*E-mail: chernov@lpi.ru

С другой стороны, начиная с 1950-х гг. в связи с проблемой последней стадии эволюции звезды интенсивно изучаются уравнения сверхплотного состояния вещества, которые описывают ядерную материю [18, 19]. Из такой материи, как предполагалось, состоят к тому времени еще не открытые нейтронные звезды. Начиная с работы [20], строятся модели нейтронных звезд, которые описываются такими уравнениями сверхплотного состояния. На сегодняшний день нейтронные звезды являются самыми плотными телами из достоверно открытых объектов во Вселенной. Плотность вещества в центре нейтронной звезды может на порядок превышать ядерную плотность материи $\rho_0 = 2.8 \cdot 10^{14}$ г·см$^{-3}$ [21]. Физика нейтронных звезд — это бурно развивающийся раздел астрофизики, который описывает структуру нейтронной звезды с уравнением сверхплотного состояния [21, 22].

В работе исследуется аналитическая теория сферически-симметричной МГД-аккреции идеальной жидкости с ультражестким уравнением состояния $p = \mu \sim \rho^2$, где p — давление, μ — суммарная плотность энергии, ρ — плотность жидкости, на черную дыру Шварцшильда. Такое уравнение состояния является вырожденным и отличается от барионной материи тем, что политропный индекс равен двум, $\gamma = 2$, тогда как для релятивистской барионной материи политропный индекс равен $\gamma = 4/3$, но тем не менее данная задача актуальна по следующим причинам. Во-первых, при аккреции идеальной жидкости непосредственно возле горизонта событий идеальная жидкость может становиться достаточно сверхплотной, что может приводить к изменению уравнения состояния вещества и соответственно к изменению структуры течения. Во-вторых, такое уравнение состояния позволяет точно находить особые критические поверхности и их форму, что определяет ход течения. Простейшим сверхплотным уравнением состояния является ультражесткое уравнение состояния. Одним из первых такое уравнение состояния рассматривал Зельдович [23]. Он показал, что это уравнение состояния вещества совместимо с требованиями общей теории относительности и построил пример релятивистски-инвариантной теории с такой материей. Затем такое уравнение состояния исследовалось во многих работах. В работе [24] изучалось ультражесткое уравнение состояния при высоких плотностях, а в работах [6, 7] рассматривалась гидродинамическая задача аккреции на черные дыры. Материя с таким уравнением состояния образуется при сверхвысоких плотностях, что как раз и характеризует процессы аккреции на черные дыры. Благодаря такому уравнению состояния в задаче происходит вырождение критических поверхностей, что значительно упрощает решение. Вместо быстрой и медленной магнитозвуковых поверхностей образуется только одна звуковая поверхность. Как будет показано ниже, медленная магнитозвуковая поверхность стремится к нулю и в предельном случае отсутствует, а быстрая магнитозвуковая поверхность переходит в звуковую поверхность, которая совпадает с горизонтом событий черной дыры. Хотя такое уравнение состояния вырождено, так как скорость звука в такой среде равна скорости света, однако в ней существуют трансзвуковые решения и так же, как в гидродинамике, фиксируется поток жидкости на критической звуковой поверхности [7].

В работе используется система единиц, в которой $G = c = \hbar = 1$.

2. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ МГД-УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим полную версию теории МГД-аккреции на черную дыру Шварцшильда, включая поля и частицы. Пространство-время вокруг черной дыры описывается метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2}dt^2 - \frac{r^2}{\Delta}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2, \qquad (1)$$

где $\Delta = r^2 - 2Mr$, M — масса черной дыры. Для описания МГД-свойств жидкости нам понадобится тензор энергии-импульса всей системы, который состоит из двух частей: тензора энергии-импульса идеальной жидкости и тензора энергии-импульса электромагнитного поля [25]:

$$T_\alpha^\beta = (p+\mu)u_\alpha u^\beta - p\delta_\alpha^\beta - \\ - \frac{1}{4\pi}\left(F_{\alpha\delta}F^{\beta\delta} - \frac{1}{4}\delta_\alpha^\beta F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta}\right), \qquad (2)$$

где u_α — четырехмерная скорость, p — давление, μ — суммарная плотность энергии, $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля. В дальнейшем будет рассматриваться сферически-симметричная теория аккреции. В такой постановке задачи θ-компонента четырехмерной скорости идеальной жидкости равна нулю, $u_\theta = 0$, и θ-компонента магнитного поля тоже равна нулю, $F_{r\phi} = 0$. Предполагается также, что данная задача обладает осевой симметрией, что означает равенство нулю частной производной $\partial/\partial\phi = 0$. И последнее приближение заключается в том, что будем искать стационарное решение, т. е. $\partial/\partial t = 0$.

Запишем основные уравнения в рамках данного приближения. В первую очередь это уравнение непрерывности $(\rho u^\alpha)_{;\alpha}=0$, которое в развернутом виде имеет вид

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\rho u^r\right)=0. \tag{3}$$

После интегрирования получается простое выражение, которое означает закон сохранения потока жидкости:

$$r^2\sin\theta\rho u^r=\dot M(\theta). \tag{4}$$

Затем запишем условие нормировки $u_\alpha u^\alpha=1$, которое в развернутом виде представим как

$$u_t^2=u^{r2}+\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{u_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right). \tag{5}$$

Следующие уравнения — уравнения Максвелла

$$F_{\alpha\beta,\gamma}+F_{\beta\gamma,\alpha}+F_{\gamma\alpha,\beta}=0$$

и условие идеальной проводимости

$$F^{\mu\nu}u_\nu=0.$$

Из условия идеальной проводимости следует, что следующие компоненты тензора электромагнитного поля равны нулю, $F_{t\phi}=F_{tr}=0$, а уравнение Максвелла дает два условия $F_{t\theta,r}=0$, $F_{\phi\theta,r}=0$. Таким образом, получаем, что только следующие компоненты тензора электромагнитного поля $F_{t\theta}$, $F_{r\theta}$, $F_{\theta\phi}$ отличны от нуля. Из условия идеальной проводимости остается только θ-компонента, которая дает независимое уравнение:

$$\frac{r^4}{\Delta}F_{t\theta}u_t-\frac{u_\phi}{\sin^2\theta}F_{\phi\theta}-\Delta u_rF_{r\theta}=0. \tag{6}$$

И последние уравнения — это уравнения, которые содержат законы сохранения: $T^\alpha_{\beta;\alpha}=0$. Нам понадобятся только две компоненты этого уравнения: t- и ϕ-компоненты. Интегрируя соответствующие компоненты, получим два закона сохранения — энергии и углового момента:

$$\begin{aligned}&r^2\sin\theta(p+\mu)u_tu^r-\frac{r^2}{4\pi}\sin\theta F_{t\theta}F^{r\theta}=A(\theta),\\&r^2\sin\theta(p+\mu)u_\phi u^r-\frac{r^2}{4\pi}\sin\theta F_{\phi\theta}F^{r\theta}=B(\theta).\end{aligned} \tag{7}$$

Если в уравнениях (4)–(7) сделать следующую замену переменных:

$$\dot M(\theta)=\dot M\sin\theta,\quad u_\phi(r,\theta)=u_\phi(r)\sin\theta,$$

$$A(\theta)=A\sin\theta,\quad B(\theta)=B\sin^2\theta,$$

$$F_{\phi\theta}(r,\theta)=F_{\phi\theta}(r)\sin\theta,$$

то система окончательных уравнений перепишется в виде

$$\begin{gathered}r^2(p+\mu)u_tu^r-\frac{r^2}{4\pi}F_{t\theta}F^{r\theta}=A,\quad r^2\rho u^r=\dot M,\\ r^2(p+\mu)u_\phi u^r-\frac{r^2}{4\pi}F_{\phi\theta}F^{r\theta}=B,\quad F_{t\theta}=\mathrm{const},\\ u_t^2=u^{r2}+\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{u_\phi^2}{r^2}\right),\quad F_{\phi\theta}=\mathrm{const},\\ r^4F_{t\theta}u_t-\Delta u_\phi F_{\phi\theta}+r^6u^rF^{r\theta}=0.\end{gathered} \tag{8}$$

В этой системе уравнений отсутствует зависимость от угловой переменной θ, поэтому все величины зависят только от радиуса. Это неудивительно, ведь в силу сферической симметрии задачи все физические величины не должны зависеть от переменной θ.

Для того чтобы замкнуть систему уравнений (8), необходимо добавить уравнение состояния идеальной жидкости. Будем рассматривать политропное уравнение состояния $p=K\rho^\gamma$ [26, 27]. В этом случае суммарная плотность энергии выражается следующим соотношением: $\mu=\rho+p/(\gamma-1)$, где первое слагаемое соответствует энергии покоя, а второе слагаемое — тепловой энергии [5]. Скорость звука для политропного уравнения состояния выражается формулой

$$c_s^2=\frac{\rho}{p+\mu}\frac{dp}{d\rho}=\frac{\gamma K\rho^\gamma}{\rho+\dfrac{\gamma}{\gamma-1}K\rho^\gamma}. \tag{9}$$

Нас будет интересовать случай, когда скорость звука равна скорости света, что в принятой в данной работе системе единиц означает $c_s^2=1$. Этого можно добиться несколькими способами. Например, можно показать, что для гидродинамического течения в случае, когда $\gamma=3$ и давление на бесконечности $p_\infty=0$, скорость звука равна единице, $c_s^2=1$. В данной работе рассмотрим другой случай. Если считать, что тепловая энергия много больше энергии покоя, $\rho\ll K\rho^\gamma$, то скорость звука будет равна $c_s^2=\gamma-1$, и для ультражесткого уравнения состояния, когда $\gamma=2$, получаем, что скорость звука равна скорости света, $c_s^2=1$. С другой стороны, на горизонте событий черной дыры физическая скорость падения идеальной жидкости должна также равняться скорости света и, следовательно, скорость падения идеальной жидкости на горизонте событий равна скорости звука, поэтому звуковая поверхность совпадает с горизонтом событий. Ниже докажем это утверждение математически строго.

Такие жесткие уравнения состояния рассматривают не только в теории гидродинамической аккреции [6, 7], но и в физике нейтронных звезд [21]. Хотя физическая суть в этих двух задачах различна, но с помощью таких уравнений состояния удается исследовать некоторые вопросы.

3. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим сначала частный случай, когда $F_{t\theta} = 0$ и $\gamma = 2$. Сведем приведенную выше систему уравнений (8) к двум уравнениям

$$\begin{gathered} r^2\rho u^r = \dot{M}, \\ \rho^2\left[u^{r2} + 1 - \frac{2M}{r}\right] = \rho_\infty^2 \times \\ \times\left[1 - \frac{L^2\Delta r^{-4}E^{-2}}{\left(1 - \dfrac{\Delta F_{\phi\theta}^2}{8\pi K r^6\rho^2 u^{r2}}\right)^2}\right], \end{gathered} \tag{10}$$

где $E = A/\dot{M}$, $L = B/\dot{M}$. Нетрудно видеть, что $E = 2K\rho_\infty$. Следуя работе [5], найдем звуковую поверхность:

$$\frac{du^r}{u^r}\left[1 - \frac{u^{r2}}{u^{r2}+1-\dfrac{2M}{r}}\right] + \frac{dr}{r}\left[2 - \frac{\dfrac{M}{r}}{u^{r2}+1-\dfrac{2M}{r}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\rho_\infty^2 L^2(r-3M) - \dfrac{\rho_\infty^2 L^2\Delta(r-M)F_{\phi\theta}^2}{8\pi K r^2\dot{M}^2}}{\rho^2 r^3 E^2\left(u^{r2}+1-\dfrac{2M}{r}\right)\left(1 - \dfrac{\Delta F_{\phi\theta}^2}{8\pi K r^2\dot{M}^2}\right)^3}\right]. \tag{11}$$

Приравнивая условия в квадратных скобках к нулю, получаем, что для ультражесткого уравнения состояния существует всего одна звуковая поверхность $r_* = 2M$, а не две, как в обычной МГД-теории, быстрая и медленная магнитозвуковые поверхности. Зная положение звуковой поверхности, можно зафиксировать поток $\dot{M} = 4M^2\rho_\infty$. Таким образом определяется неизвестная постоянная интегрирования $\dot{M}$. Окончательное решение легко получить из системы уравнений (10). Решение имеет вид

$$\frac{\rho^2}{\rho_\infty^2} = 1 + \frac{2M}{r} + \frac{4M^2}{r^2} + \frac{8M^3}{r^3} - \\ - \frac{L^2 r^{-2}E^{-2}}{\left(1 - \dfrac{\Delta F_{\phi\theta}^2}{128\pi K r^2\rho_\infty^2 M^4}\right)^2}. \tag{12}$$

В предельном случае, когда $L = 0$, это решение совпадает с гидродинамическим решением из работы [6]. Зная распределение плотности, из уравнения (10) можно получить распределение радиальной скорости. Из системы уравнений (8) найдем угловую скорость вращения жидкости:

$$u_\phi = \frac{B}{r^2(p+\mu)u^r - \dfrac{\Delta F_{\phi\theta}^2}{4\pi r^4 u^r}}. \tag{13}$$

Равенство нулю знаменателя этого выражения определяет альфвеновскую поверхность

$$r_a = \frac{2MF_{\phi\theta}^2}{F_{\phi\theta}^2 - 8\pi K\dot{M}^2}, \tag{14}$$

что совпадает с предыдущими результатами (формула (4.56) книги [1]). Для прохождения этой особенности надо, чтобы и числитель выражения (13) был равен нулю, но он отличен от нуля. Поэтому для того, чтобы система уравнений (8) не имела особенностей, альфвеновский радиус должен быть под горизонтом событий, $r_a < 2M$. Это накладывает некоторое условие на радиальное магнитное поле: $F_{\phi\theta}^2 < 8\pi K\dot{M}^2$. Ниже будет рассмотрен более общий случай, когда $F_{t\theta} \neq 0$, в котором как числитель, так и знаменатель выражения для угловой скорости равны нулю.

Для того чтобы показать предельные переходы быстрой магнитозвуковой поверхности в звуковую поверхность и медленной магнитозвуковой поверхности в нуль, рассмотрим более общий случай, когда $\gamma \neq 2$, а потом совершим предельный переход $\gamma \to 2$. Действуя аналогично предыдущему случаю, выпишем сразу условия на звуковой поверхности:

$$\frac{du^r}{u^r}\left[\frac{(\gamma-2)r^8 u^{r2}\dfrac{F^{r\theta 2}}{4\pi\rho}}{\left(u^{r2}+1-\dfrac{2M}{r}\right)\left(\dfrac{\Delta F_{\phi\theta}^2}{4\pi\rho} - \dfrac{\gamma}{\gamma-1}K\rho^{\gamma-1}r^6 u^{r2}\right)} + \right.$$
$$\left. + \gamma - 1 - \frac{u^{r2}}{u^{r2}+1-\dfrac{2M}{r}}\right] + [\ldots]\frac{dr}{r} = 0. \tag{15}$$

Здесь нам понадобится только условие при слагаемом du^r. Как легко проверить, из этого условия можно получить значения радиальной 4-скорости на критических поверхностях. Эти значения, как и должно быть, совпадают с быстрой и медленной магнитозвуковыми скоростями (формула (4.63) книги [1]):

$$u^{r2} = \frac{1-\dfrac{2M}{r}}{2}\left[\frac{c_s^2}{1-c_s^2} + \frac{1}{r^4}Wu_{ap}^2 \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{\left(\frac{c_s^2}{1-c_s^2} + \frac{1}{r^4}Wu_{ap}^2\right)^2 - \frac{4c_s^2}{1-c_s^2}\,\frac{u_{ap}^2}{r^4}}\right], \quad (16)$$

где

$$W = 1 + \frac{r^6}{1-\dfrac{2M}{r}}\,\frac{F^{r\theta 2}}{F_{\phi\theta}^2}, \quad u_{ap}^2 = \frac{F_{\phi\theta}^2}{4\pi\dfrac{\gamma}{\gamma-1}K\rho^\gamma}.$$

Но если теперь рассмотреть предельный переход $\gamma \to 2$, то из-за вырождения остается всего одна критическая поверхность, которая совпадает с горизонтом событий черной дыры. Таким образом, при МГД-аккреции идеальной жидкости с ультражестким уравнением состояния существует всего одна критическая звуковая поверхность.

4. МЕТОД ГРЭДА – ШАФРАНОВА

Покажем, как с помощью метода Грэда – Шафранова получить решение (12). Для этого приведем уравнение (10) к виду

$$\frac{E^2}{\left(\dfrac{p+\mu}{\rho}\right)^2} = \frac{\dot{M}^2}{r^4} + \left(1-\frac{2M}{r}\right)\rho^2 +$$
$$+ \frac{\Delta L^2 r^{-4}}{\left(\dfrac{p+\mu}{\rho^2} - \dfrac{\Delta F_{\phi\theta}^2}{4\pi\dot{M}^2 r^2}\right)^2}. \quad (17)$$

Если из формулы (17) выразить плотность и подставить значение для потока, то после элементарных преобразований получим решение (12). В таком виде данное выражение (17) в точности совпадает с релятивистским уравнением Бернулли

$$\gamma^2 - u_{\hat\phi}^2 = u_p^2 + 1,$$

которое в развернутом виде есть формула (4.50) из книги [1] (формула приведена в обозначениях книги [1], которые немного отличаются от принятых в данной статье). Таким образом, из релятивистского уравнения Бернулли легко получить решение (12). Формулы для четырехмерной скорости u_t и u_ϕ совпадают с формулами (4.45) и (4.46) из книги [1]. Остается только найти решение уравнения Грэда – Шафранова, которое в данном случае запишется в виде (формула (4.69) в обозначениях книги [1])

$$\frac{1}{\alpha}\nabla_k\left[\frac{\alpha^2-\mathcal{M}^2}{\alpha\varpi^2}\nabla^k\Psi\right] = 0. \quad (18)$$

Для данного уравнения состояния величина $\mathcal{M}$, которая является отношением квадрата числа Маха полоидальной скорости к полоидальной альфвеновской скорости, является постоянной величиной. Распишем уравнение Грэда – Шафранова

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(1-\frac{2M}{r}-\mathcal{M}^2\right)\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right] +$$
$$+ \frac{\sin\theta}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1-\dfrac{2M}{r}-\mathcal{M}^2}{\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right] = 0. \quad (19)$$

Как нетрудно видеть, в сферически-симметричном случае решение $\Psi = \Psi_0(1-\cos\theta)$ удовлетворяет этому уравнению. Таким образом, оба решения совпадают.

Сделаем несколько важных замечаний, которые касаются применения сферически-симметричного приближения. На первый взгляд кажется, что решение (12) является точным. На самом деле это не совсем так. Связано это с тем, что при наличии угловой скорости u_ϕ или, другими словами, углового момента L, приближение сферической симметрии будет нарушено. Радиальная компонента и θ-компонента законов сохранения $T^\beta_{\alpha;\beta} = 0$ не будут выполняться точно, а лишь приближенно при малых значениях параметра L. В рамках метода Грэда – Шафранова это означает, что мы не можем пренебречь в уравнении Грэда – Шафранова членом вида $\partial L/\partial\Psi$ (которым по умолчанию пренебрегалось), так как угловой момент не будет постоянной величиной, а будет функцией потока. Тем не менее релятивистское уравнение Бернулли (17) для ультражесткого уравнения состояния дает точное и явное выражение для плотности, для произвольного вида аккреции (не только сферически-симметричного) с единственной оговоркой, что интегралы движения $E(\Psi)$, $L(\Psi)$ (а также $\eta(\Psi)$, $\Omega_F(\Psi)$) будут функциями потока Ψ (а не постоянными величинами, как здесь предполагалось), который определяется из общего решения уравнения Грэда – Шафранова.

5. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Теперь рассмотрим общий случай, когда $F_{t\theta} \neq 0$. Система уравнений усложняется и примет вид

$$\begin{gathered} r^2(p+\mu)u_t u^r = A + \frac{\Delta u_\phi F_{t\theta}F_{\phi\theta}}{4\pi r^4 u^r} - \frac{u_t F_{t\theta}^2}{4\pi u^r}, \\ r^2(p+\mu)u_\phi u^r = B + \frac{\Delta u_\phi F_{\phi\theta}^2}{4\pi r^4 u^r} - \frac{F_{t\theta}F_{\phi\theta}u_t}{4\pi u^r}, \\ r^2\rho u^r = \dot{M}, \quad u_t^2 = u^{r2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{u_\phi^2}{r^2}\right). \end{gathered} \tag{20}$$

Из системы уравнений (20) легко выразить временную и угловую компоненты четырехмерной скорости через радиус и плотность. В результате получим

$$\begin{gathered} u_\phi = \frac{\left(\dfrac{p+\mu}{\rho^2} + \dfrac{F_{t\theta}^2 r^2}{4\pi\dot{M}^2}\right)L - \dfrac{EF_{t\theta}F_{\phi\theta}r^2}{4\pi\dot{M}^2}}{\dfrac{p+\mu}{\rho}\left[\dfrac{p+\mu}{\rho^2} + \dfrac{F_{t\theta}^2 r^2}{4\pi\dot{M}^2} - \dfrac{\Delta F_{\phi\theta}^2}{4\pi r^2\dot{M}^2}\right]}, \\ u_t = \frac{\left(\dfrac{p+\mu}{\rho^2} - \dfrac{\Delta F_{\phi\theta}^2}{4\pi r^2\dot{M}^2}\right)E + \dfrac{L\Delta F_{t\theta}F_{\phi\theta}}{4\pi r^2\dot{M}^2}}{\dfrac{p+\mu}{\rho}\left[\dfrac{p+\mu}{\rho^2} + \dfrac{F_{t\theta}^2 r^2}{4\pi\dot{M}^2} - \dfrac{\Delta F_{\phi\theta}^2}{4\pi r^2\dot{M}^2}\right]}. \end{gathered} \tag{21}$$

Легко видеть, что выражения вида ρu_t и ρu_ϕ не зависят от плотности, а зависят только от радиуса. Следуя работе [5], аналогично найдем звуковую поверхность для случая $\gamma = 2$. В результате получаем

$$\begin{gathered} \frac{du^r}{u^r}\left[\frac{2M}{r} - 1\right] + \frac{dr}{r}\left[\frac{5M}{r} + \frac{3Mu_\phi^2}{r^3} - \frac{u_\phi^2}{r^2} - 2u^{r2} - 2 + \right. \\ + \frac{u^{r2} + 1 - \frac{2M}{r}}{2\pi\dot{M}^2}\,\frac{F_{t\theta}^2 r^2 - F_{\phi\theta}^2\dfrac{M}{r}}{\dfrac{p+\mu}{\rho^2} + \dfrac{F_{t\theta}^2 r^2}{4\pi\dot{M}^2} - \dfrac{\Delta F_{\phi\theta}^2}{4\pi r^2\dot{M}^2}} + \\ + \frac{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)u_\phi\rho}{2\pi\dot{M}^2(p+\mu)}\,\frac{LF_{t\theta}^2 - EF_{t\theta}F_{\phi\theta}}{\dfrac{p+\mu}{\rho^2} + \dfrac{F_{t\theta}^2 r^2}{4\pi\dot{M}^2} - \dfrac{\Delta F_{\phi\theta}^2}{4\pi r^2\dot{M}^2}} - \\ \left. - \frac{\rho u_t M}{2\pi r\dot{M}^2(p+\mu)}\,\frac{LF_{t\theta}F_{\phi\theta} - EF_{\phi\theta}^2}{\dfrac{p+\mu}{\rho^2} + \dfrac{F_{t\theta}^2 r^2}{4\pi\dot{M}^2} - \dfrac{\Delta F_{\phi\theta}^2}{4\pi r^2\dot{M}^2}}\right]. \end{gathered} \tag{22}$$

Приравнивая условия в квадратных скобках нулю, получаем одну звуковую поверхность $r_* = 2M$, которая также совпадает с горизонтом событий черной дыры. Поток идеальной жидкости определяется формулой

$$\dot{M}^2 = \frac{4M^2\rho^2}{p+\mu}\left(A - \frac{F_{t\theta}^2}{4\pi}\right).$$

Зная поток жидкости, легко найти общее аналитическое решение:

$$\rho^2 = \frac{\rho^2 u_t^2 - \dfrac{\dot{M}^2}{r^4}}{1 - \dfrac{2M}{r}} - \frac{\rho^2 u_\phi^2}{r^2}. \tag{23}$$

В выражении (23) слагаемые $\rho^2 u_t^2$ и $\rho^2 u_\phi^2$ не зависят от плотности, а зависят только от радиуса. Также можно показать, что в первом слагаемом никакой особенности на горизонте событий нет. Она сокращается.

Из формул (21) можно вычислить альфвеновский радиус, который определяется выражением

$$r_a = \frac{2M\left(LF_{t\theta}F_{\phi\theta} - EF_{\phi\theta}^2\right)}{4\pi\dot{M}^2 E\dfrac{p+\mu}{\rho^2} + LF_{t\theta}F_{\phi\theta} - EF_{\phi\theta}^2}. \tag{24}$$

Легко видеть, что в данном случае альфвеновский радиус может находиться как под горизонтом событий черной дыры ($r_a < 2M$), так и вне горизонта событий ($r_a > 2M$). Но в любом случае система уравнений (8) не имеет особенностей на альфвеновском радиусе, так как числитель и знаменатель выражений (21) взаимно сокращаются. Таким образом, можно сделать вывод, что при МГД-аккреции с ультражестким уравнением состояния вещества вместо двух критических поверхностей образуется всего одна звуковая поверхность, которая совпадает с горизонтом событий черной дыры, а альфвеновская поверхность в зависимости от параметров задачи может располагаться как вне, так и внутри черной дыры.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе аналитически исследовалась сферически-симметричная теория идеальной МГД-аккреции вещества на черную дыру Шварцшильда с ультражестким уравнением состояния. Такое вещество является вырожденным, тем не менее оно может встречаться в природе, например, в сверхплотных нейтронных звездах или в непосредственной близости возле черной дыры. Для такого уравнения состояния удалось найти общее решение для произвольного вида аккреции, которое выражается через интегралы движения (17). Для частного сферически-симметричного вида аккреции было выписано аналитическое решение в приближении постоянства углового момента вдоль силовой линии $L(\Psi) \approx L = \text{const}$. МГД-системы с вырожденным уравнением состояния значительно упрощают систему уравнений, что позволяет понять многие физические процессы, происходящие в сложных астрофизических системах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 140200831, 150208476а), НШ 4235.2014.2 и программы 9 Президиума РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Бескин, *Осесимметричные стационарные течения в астрофизике*, Физматлит, Москва (2005).
2. В. С. Бескин, УФН **180**, 1241 (2010).
3. H. Bondi and F. Hoyle, Month. Not. Roy. Astron. Soc. **104**, 273 (1944).
4. H. Bondi, Month. Not. Roy. Astron. Soc. **112**, 195 (1952).
5. F. C. Michel, Astrophys. Space Sci. **15**, 153 (1972).
6. L. Petrich, S. Shapiro, and S. Teukolsky, Phys. Rev. Lett. **60**, 1781 (1988).
7. E. Babichev, S. Chernov, V. Dokuchaev, and Yu. Eroshenko, Phys. Rev. D **78**, 104027 (2008).
8. L. J. Davis and E. J. Weber, Astrophys. J. **148**, 217 (1967).
9. M. Takahashi, Astrophys. J. **570**, 264 (2002).
10. R. D. Blandford and R. L. Znajek, Month. Not. Roy. Astron. Soc. **179**, 433 (1977).
11. Ya. N. Istomin and V. I. Pariev, Month. Not. Roy. Astron. Soc. **267**, 629 (1994).
12. A. Tchekhovskoy, J. McKinney, and R. Narayan, Astrophys. J. **699**, 1789 (2009).
13. A. Tchekhovskoy, R. Narayan, and J. McKinney, Astrophys. J. **711**, 50 (2010).
14. M. Takahashi, S. Nitta, Y. Tatematsu, and A. Tomimatsu, Astrophys. J. **363**, 206 (1990).
15. В. С. Бескин, В. И. Парьев, УФН **163**, 95 (1993).
16. V. S. Beskin and E. E. Nokhrina, Month. Not. Roy. Astron. Soc. **367**, 375 (2006).
17. V. S. Beskin and E. E. Nokhrina, Month. Not. Roy. Astron. Soc. **397**, 1486 (2009).
18. A. G. W. Cameron, Astrophys. J. **130**, 884 (1959).
19. E. E. Salpeter, Ann. Phys. **11**, 393 (1960).
20. В. А. Амбарцумян, Г. С. Саакян, Астроном. ж. **37**, 193 (1960).
21. А. Ю. Потехин, УФН **180**, 1279 (2010).
22. P. Haensel, A. Y. Potekhin, and D. G. Yakovlev, *Neutron Stars: Equation of State and Structure*, Springer, New York (2007).
23. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ **41**, 1609 (1961).
24. V. Canuto, Annual Rev. Astron. Astrophys. **13**, 335 (1975).
25. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
26. R. F. Tooper, Astrophys. J. **140**, 434 (1964).
27. R. F. Tooper, Astrophys. J. **142**, 1541 (1965).