ЖЭТФ, 2014, том 146, вып. 3 (9), стр. 429–438

ВЫРОЖДЕНИЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ РЕЗОНАНСОВ В КИРАЛЬНОМ АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩЕМ ЦИЛИНДРЕ, ЗАПОЛНЕННОМ МЕТАМАТЕРИАЛОМ

А. П. Анютин*, И. П. Коршунов**, А. Д. Шатров

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова Российской академии наук 141190, Фрязино, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 16 января 2014 г.

Рассмотрена двумерная задача возбуждения нитями электрического и магнитного токов цилиндра, заполненного метаматериалом, с анизотропной проводимостью поверхности вдоль винтовых линий. Исследованы высокодобротные резонансы, возникающие в малых по сравнению с длиной волны цилиндрах, магнитная проницаемость которых близка к минус единице. Обнаружен эффект вырождения колебаний, имеющих различные значения индекса m в законе $\cos(m\varphi)$, описывающем азимутальную зависимость резонансных полей. Установлена область параметров задачи, в которой существуют вырожденные колебания. Исследованы пространственная и поляризационная структуры электромагнитных полей. Предложено аналитическое описание резонансных полей в квазистатическом приближении.

DOI: 10.7868/S0044451014090028

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы интенсивно развивается электродинамика искусственных сред, у которых относительные диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости являются отрицательными величинами [1–6]. Такие искусственные среды принято называть метаматериалами [7]. Электромагнитные поля, возбуждаемые источниками, расположенными вблизи тел из метаматериалов, обладают рядом необычных свойств [8]. Так, в работе [9] при исследовании излучения дипольных источников на сферических частицах из метаматериала обнаружены эффекты резонансного возбуждения мод шара электрического или магнитного типов. Из работы [9] следует, что если параметры материала близки к величинам $\varepsilon = -1 - 1/m$ или $\mu = -1 - 1/m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, то эти резонансы являются квазистатическими, т. е. существуют в частицах электрически малых размеров. Таких резонансов нет в объектах из обычных магнитодиэлектриков.

В работе [10] обнаружены квазистатические высокодобротные резонансы в цилиндрах, выполненных из метаматериалов, у которых ε или μ близки к минус единице. Упомянутые цилиндры можно рассматривать как кольцевые резонаторы на сильно замедленных поверхностных волнах, распространяющихся вдоль границы метаматериала. При этом поле на резонансной частоте описывается единственной азимутальной гармоникой $\cos(m\varphi)$. В работе [11] исследованы спектральные и поляризационные свойства полей в многозаходной спирали, заполненной метаматериалом. Спираль моделировалась поверхностью с идеальной анизотропной проводимостью вдоль винтовых линий. В такой структуре поверхностные волны формируются как границей раздела сред, так и проволочной решеткой, расположенной на этой границе. В данной работе будет показано, что при определенных сочетаниях параметров задачи происходит вырождение квазистатических резонансов. В частности, показано, что возможны случаи, когда поле описывается функцией $\cos(m\varphi)$, имеющей различные значения индекса m в ближней и дальней зонах.

Из близких по тематике исследований отметим также работу [12], в которой рассматривалось излучение оптически активных молекул, расположенных вблизи сферических частиц из киральных метаматериалов, которые характеризовались тремя величинами ε, μ и η, где η — параметр киральности. Иссле-

*E-mail: anioutine@mail.ru

**E-mail: korip@ms.ire.rssi.ru

дованы особенности резонансных явлений, обязанные как отрицательности величин ε и μ, так и киральности среды. В отличие от [12], в данной работе рассматриваются цилиндрические, а не сферические рассеиватели, при этом киральность объекта из метаматериала обусловлена свойствами его границы, а не свойствами вещества, из которого он состоит. Спиральная геометрия проводников — это наиболее простой способ реализации киральных электродинамических объектов из метаматериалов при создании новой элементной базы в дециметровом и сантиметровом диапазонах волн. Двумерность рассмотренной модельной задачи позволяет, используя более простой математический аппарат, получить аналитическое описание исследуемых явлений вырождения собственных мод.

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматривается задача возбуждения нитевидным источником кругового цилиндра, выполненного из метаматериала с параметрами ε и μ. Используется цилиндрическая система координат (r, φ, z) (см. рис. 1). Предполагаем, что на поверхности цилиндра $r = a$ выполняются двухсторонние граничные условия идеальной анизотропной проводимости вдоль винтовых линий [13]:

$$E_z^+ = E_z^-, \quad E_\varphi^+ = E_\varphi^-, \quad E_z \cos\psi + E_\varphi \sin\psi = 0, \tag{1}$$

$$(H_z^+ - H_z^-)\cos\psi + (H_\varphi^+ - H_\varphi^-)\sin\psi = 0, \tag{2}$$

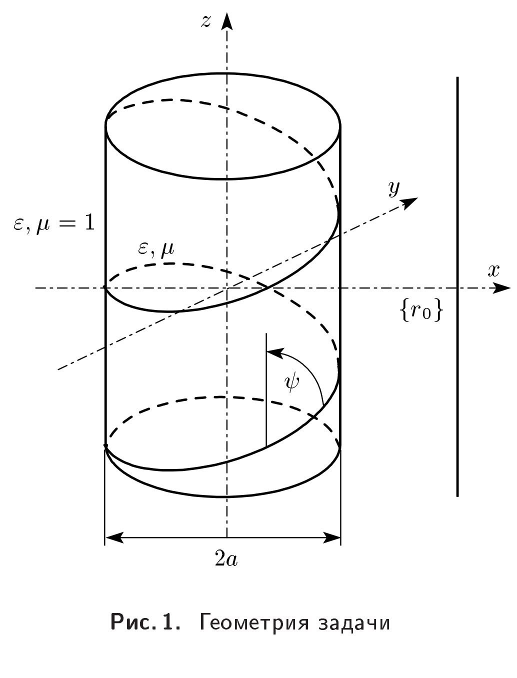

Рис. 1. Геометрия задачи

где знаки «плюс» и «минус» соответствуют внешней $(r > a)$ и внутренней $(r < a)$ сторонам поверхности, ψ — угол скрутки спирали. Для определенности винтовые линии полагаются правыми $(0 < \psi < \pi/2)$. Модель цилиндрической поверхности с анизотропной проводимостью «винтового» типа хорошо описывает проволочные спирали (однозаходные и многозаходные), если расстояние между осями соседних проводников много меньше длины волны, а величина зазоров лежит в определенном интервале [13, 14].

Цилиндр возбуждают нитями электрического и магнитного токов, которые расположены вне цилиндра в точке $r_0 > a$, $\varphi_0 = 0$ (рис. 1). Предполагаем, что возбуждающие токи не зависят от координаты z. В этом случае рассматриваемая задача является двумерной, но двухпотенциальной. В качестве потенциалов выберем функции

$$U_1(r,\varphi) = E_z(r,\varphi), \quad U_2(r,\varphi) = H_z(r,\varphi). \tag{3}$$

Далее будем использовать векторные обозначения, например:

$$\mathbf{U} = \{U_1, U_2\}. \tag{4}$$

Векторная функция $\mathbf{U}(r,\varphi)$ удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2\varepsilon(r)\mu(r)\right]\mathbf{U}(r,\varphi) = = -\frac{4i}{r}\,\mathbf{A}\delta(r-r_0)\delta(\varphi), \tag{5}$$

где k — волновое число в свободном пространстве, функции $\varepsilon(r)$ и $\mu(r)$ определены формулами

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon, & 0 < r < a, \\ 1, & r > a, \end{cases} \qquad \mu(r) = \begin{cases} \mu, & 0 < r < a, \\ 1, & r > a, \end{cases} \tag{6}$$

$\delta(\ldots)$ — дельта-функция Дирака, компоненты A_1 и A_2 вектора $\mathbf{A}$ задают амплитуды электрического и магнитного возбуждающих токов.

Величины E_φ и H_φ, входящие в граничные условия (1) и (2), а также радиальные компоненты электромагнитного поля выражаются через U_1 и U_2 по формулам, вытекающим из уравнений Максвелла:

$$E_\varphi = -\frac{1}{ik\varepsilon(r)}\frac{\partial U_2}{\partial r}, \quad H_\varphi = \frac{1}{ik\mu(r)}\frac{\partial U_1}{\partial r}, \tag{7}$$

$$E_r = \frac{1}{ik\varepsilon(r)r}\frac{\partial U_2}{\partial \varphi}, \quad H_r = -\frac{1}{ik\mu(r)r}\frac{\partial U_1}{\partial \varphi}. \tag{8}$$

Поле $\mathbf{U}(r,\varphi)$ должно также удовлетворять условию излучения, т. е. иметь при $kr\to\infty$ следующий вид:

$$\mathbf{U}(r,\varphi)=\mathbf{\Phi}(\varphi)\left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2}\exp\left(-ikr+\frac{i\pi}{4}\right). \quad (9)$$

Возбуждающее поле $\mathbf{U}^0$ является решением неоднородного уравнения Гельмгольца в свободном пространстве и определено по формуле

$$\mathbf{U}^0(r,\varphi)=\mathbf{A}H_0^{(2)}\left(k\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\varphi}\right), \quad (10)$$

где $H_0^{(2)}$ — функция Ганкеля. Диаграмма направленности поля $\mathbf{U}^0(r,\varphi)$ имеет вид

$$\mathbf{\Phi}^0(\varphi)=\mathbf{A}\exp\left(ikr_0\cos\varphi\right). \quad (11)$$

Полное поле вне цилиндра $\mathbf{U}$ состоит из возбуждающего $\mathbf{U}^0$ и рассеянного $\mathbf{U}^s$ полей. Через $\mathbf{\Phi}^s(\varphi)$ будем обозначать диаграмму рассеяния, т. е. диаграмму направленности поля $\mathbf{U}^s$.

Уравнение (5), граничные условия (1), (2) и условия излучения (9) полностью определяют краевую задачу для поля $\mathbf{U}(r,\varphi)$.

Сформулированная задача допускает аналитическое решение методом разделения переменных [11]. Приведем окончательные выражения для волновых полей. Введем векторы $\mathbf{L}^{(m)}$, $\mathbf{M}^{(m)}$, $\mathbf{N}^{(m)}$ и скаляр $W^{(m)}$:

$$\mathbf{L}^{(m)}=\left\{H_m^{(2)'}(ka)\sin\psi, iH_m^{(2)}(ka)\cos\psi\right\}, \quad (12)$$

$$\mathbf{M}^{(m)}=\left\{H_m^{(2)'}(ka)\sin\psi, -iH_m^{(2)}(ka)\cos\psi\right\}, \quad (13)$$

$$\mathbf{N}^{(m)}=\left\{\frac{n}{\varepsilon}J_m'(kna)\sin\psi, iJ_m(kna)\cos\psi\right\}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned}W^{(m)}&=H_m^{(2)}(ka)J_m(kna)\left[\frac{n}{\varepsilon}H_m^{(2)}(ka)J_m'(kna)-\right.\\&\left.-H_m^{(2)'}(ka)J_m(kna)\right]\cos^2\psi+\\&+\frac{n}{\varepsilon}H_m^{(2)'}(ka)J_m'(kna)\left[\frac{n}{\mu}H_m^{(2)}(ka)J_m'(kna)-\right.\\&\left.-H_m^{(2)'}(ka)J_m(kna)\right]\sin^2\psi, \quad (15)\end{aligned}$$

где

$$n=\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad (16)$$

$J_m(kna)$ — функции Бесселя, штрих означает дифференцирование по аргументу.

Полное поле $\mathbf{U}(r,\varphi)$ внутри цилиндра ($r<a$) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta_m H_m^{(2)}(kr_0)\times\\ \times\mathbf{B}^{(m)}J_m(knr)\cos(m\varphi), \quad (17)\end{aligned}$$

где

$$\delta_m=\begin{cases}1, & m=0,\\ 2, & m\geq 1,\end{cases} \quad (18)$$

$$\mathbf{B}^{(m)}=\frac{2i\left(\mathbf{A},\mathbf{M}^{(m)}\right)}{\pi kaW^{(m)}}\mathbf{N}^{(m)}. \quad (19)$$

Через $(\mathbf{A},\mathbf{M}^{(m)})$ в (19) обозначено скалярное произведение

$$(\mathbf{A},\mathbf{M}^{(m)})=A_1M_1^{(m)}+A_2M_2^{(m)}. \quad (20)$$

Поле вне цилиндра ($r>a$) представляется в виде двух слагаемых — падающего и рассеянного полей:

$$\mathbf{U}(r,\varphi)=\mathbf{U}^0(r,\varphi)+\mathbf{U}^s(r,\varphi). \quad (21)$$

Рассеянное поле выражается формулой

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^s(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta_m H_m^{(2)}(kr_0)\left(\mathbf{C}^{(m)}+\mathbf{D}^{(m)}\right)\times\\ \times H_m^{(2)}(kr)\cos(m\varphi), \quad (22)\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{C}^{(m)}=\left\{-A_1\frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)}, -A_2\frac{J_m'(ka)}{H_m^{(2)'}(ka)}\right\}, \quad (23)$$

$$\mathbf{D}^{(m)}=\frac{2i\left(\mathbf{A},\mathbf{M}^{(m)}\right)\dfrac{n}{\varepsilon}J_m(kna)J_m'(kna)}{\pi kaH_m^{(2)}(ka)H_m^{(2)'}(ka)W^{(m)}}\mathbf{L}^{(m)}. \quad (24)$$

Диаграмма направленности рассеянного поля $\mathbf{\Phi}^s(\varphi)$ представляется в виде ряда:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}^s(\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta_m(i)^m H_m^{(2)}(kr_0)\times\\ \times\left(\mathbf{C}^{(m)}+\mathbf{D}^{(m)}\right)\cos(m\varphi). \quad (25)\end{aligned}$$

Формулы (17), (22) применимы как для цилиндров из обычных материалов ($\varepsilon>0$, $\mu>0$), так и для цилиндров из метаматериалов ($\varepsilon<0$, $\mu<0$). Показатель преломления n (см. (16)) для этих случаев будем считать положительным.

Разложения (17) и (22) сходятся при любых вещественных значениях параметров ε и μ, что легко устанавливается с помощью асимптотических представлений Дебая для цилиндрических функций J_m и $H_m^{(2)}$ при $m\to\infty$ [15]. Функция $W^{(m)}$, стоящая в знаменателях формул (19) и (24), являясь комплексной функцией параметра ka, не обращается в нуль при вещественных значениях частоты ka. Поэтому рассмотренная задача дифракции на цилиндре имеет решение при любых вещественных значениях материальных параметров, в том числе для $\varepsilon = \mu = -1$, в то время, как задача дифракции поля точечного источника на полупространстве $\varepsilon = \mu = -1$ в отсутствие тепловых потерь неразрешима [8].

Далее будем рассматривать только электрически малые цилиндры:

$$ka \ll 1, \quad nka \ll 1. \tag{26}$$

В знаменателях выражений (17), (22) содержатся резонансные функции $W^{(m)}(ka)$, определяемые формулой (15). Исследуем зависимость этих знаменателей от частоты. При выполнении условий (26) вещественная часть выражения (15) значительно превышает его мнимую часть. Вещественная часть функций $W^{(m)}(ka)$ обращается в нуль в точках, которые и являются резонансными частотами. Таким образом, уравнение для резонансных частот имеет вид

$$\mathrm{Re}\left[W^{(m)}(ka)\right] = 0. \tag{27}$$

На резонансных частотах в разложениях (17), (22) будет доминировать единственная азимутальная гармоника $\cos(m\varphi)$.

Преобразуем уравнение (27), используя асимптотические разложения цилиндрических функций при малых значениях аргумента [15]:

$$\begin{gathered} J_m(x) = \frac{x^m}{2^m m!}\left[1 - \frac{x^2}{4(m+1)} + \ldots\right], \\ H_m^{(2)}(x) = \frac{i\cdot 2^m (m-1)!}{\pi x^m}\left[1 + \frac{x^2}{4(m-1)} + \ldots\right], \\ m \ge 2. \end{gathered} \tag{28}$$

Учитывая (28) и сохраняя в (27) члены нулевого и первого порядков по степеням малого параметра $(ka)^2$, получим следующее выражение для резонансных частот:

$$(ka)^2 = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{\mu}\right)\sin^2\psi}{\dfrac{1+\varepsilon}{m^2}\cos^2\psi + \dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{1}{m-1} + \dfrac{\varepsilon}{m+1}\right)\sin^2\psi}, \quad m \ge 2. \tag{29}$$

Напомним, что выражение (29) справедливо только при выполнении условия $ka \ll 1$. Для этого необходимо, чтобы было выполнено любое из неравенств

$$\psi \ll 1, \tag{30}$$

$$|\mu + 1| \ll 1. \tag{31}$$

При $\psi \ll 1$ формула (29) применима и для цилиндра из обычного материала ($\varepsilon > 0$, $\mu > 0$). Для метаматериала правая часть соотношения (29) может быть малой за счет выполнения условия (31). В этом случае формула (29) справедлива для структур с любыми углами скрутки винтовых линий проводимости.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Представленные ниже численные результаты получены путем суммирования рядов (17), (22), а также при помощи модифицированного метода дискретных источников [16, 17]. Результаты расчетов, полученные этими двумя методами, совпадают.

Вычисления были проведены в области параметров, удовлетворяющих условиям (26), (31). Во всех расчетах координата источника полагалась равной $r_0 = 1.2a$.

Исследуем амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) цилиндра, под которой будем понимать зависимость модуля поля в точке $r = 0.99a$, $\varphi = \pi$ от безразмерного параметра ka, пропорционального частоте. На рис. 2 изображена АЧХ для случая $\varepsilon = -1.3$, $\mu = -1.00009775$, $\psi = 1.3$. Кривыми *1* и *2* показаны АЧХ цилиндра при двух условиях возбуждения. На рисунке приведены только графики для компоненты поля U_1, так как значения компоненты U_2 оказались на два порядка меньше. Кривая *1* на этом рисунке соответствует возбуждению ни-

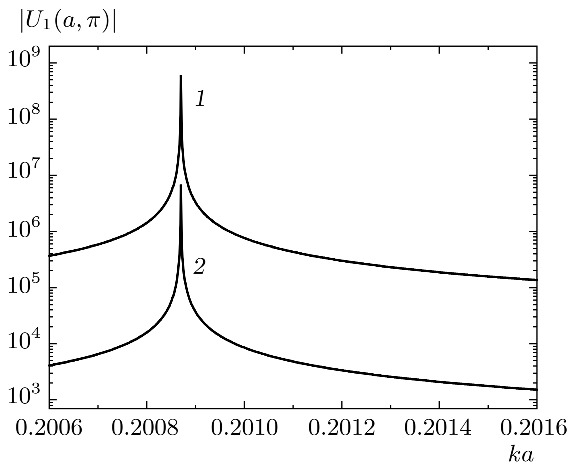

Рис. 2. АЧХ метаматериального, анизотропно проводящего цилиндра при $\varepsilon = -1.3$, $\mu = -1.00009775$, $\psi = 1.3$: *1* — $A_1 = 1$, $A_2 = 0$; *2* — $A_1 = 0$, $A_2 = 1$

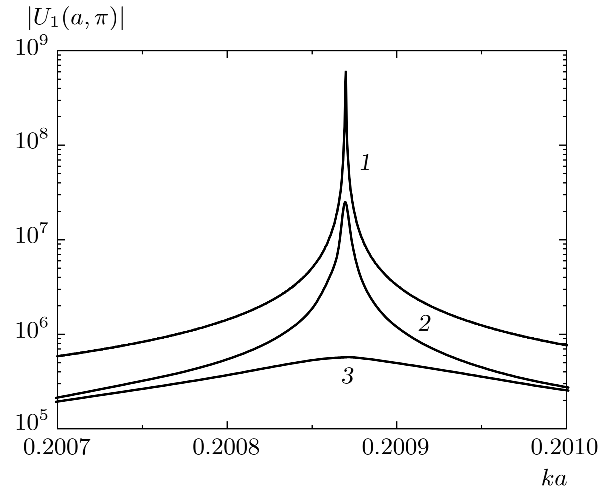

Рис. 3. АЧХ метаматериального, анизотропно проводящего цилиндра с параметрами $\varepsilon' = -1.3$, $\mu = -1.00009775$, $\psi = 1.3$ при различных значениях диэлектрических потерь: $\varepsilon'' = 10^{-8}$ (*1*), 10^{-7} (*2*), 10^{-5} (*3*)

тью электрического тока ($A_1 = 1$, $A_2 = 0$), а кривая *2* — нитью магнитного тока ($A_1 = 0$, $A_2 = 1$). Из сравнения кривых *1* и *2* следует, что эффективность возбуждения колебаний в цилиндре магнитным током на два порядка меньше, чем электрическим. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только компоненту U_1, полагая $A_1 = 1$, $A_2 = 0$. Расчеты показали, что при резонансной частоте $ka = 0.20087$ поле на поверхности цилиндра и диаграмма рассеяния описываются одной гармоникой $\cos(5\varphi)$ с весьма большими амплитудами, порядка 10^8 и 10^4 соответственно.

Для исследования влияния тепловых потерь на добротность резонансов был использован модифицированный метод дискретных источников [16, 17]. На рис. 3 приведено семейство кривых, которые описывают АЧХ рассматриваемой структуры в окрестности резонансной частоты $ka = 0.20087$ при различных значениях величины ε'', определяющей диэлектрические потери среды ($\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$). Из рисунка видно, что увеличение тепловых потерь приводит к уменьшению добротности резонанса

$$Q = \frac{ka}{\Delta ka_{0.7}}$$

($\Delta ka_{0.7}$ — ширина резонансной кривой на уровне 0.707). Кривая *1* на рис. 3 ($\varepsilon'' = 10^{-8}$) практически совпадает с кривой *1* на рис. 2, соответствующей отсутствию тепловых потерь ($Q \sim 10^6$). При $\varepsilon'' = 10^{-5}$ добротность уменьшается до величины $Q \sim 10^3$.

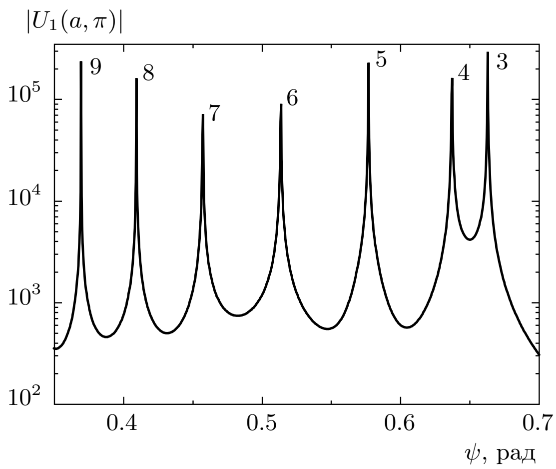

Рис. 4. Зависимость модуля поля $U_1(a,\pi)$ от угла скрутки спирали для $ka = 0.2\ldots$, $\varepsilon = -1.3$, $\mu = -0.999$; цифры соответствуют азимутальному индексу m резонанса

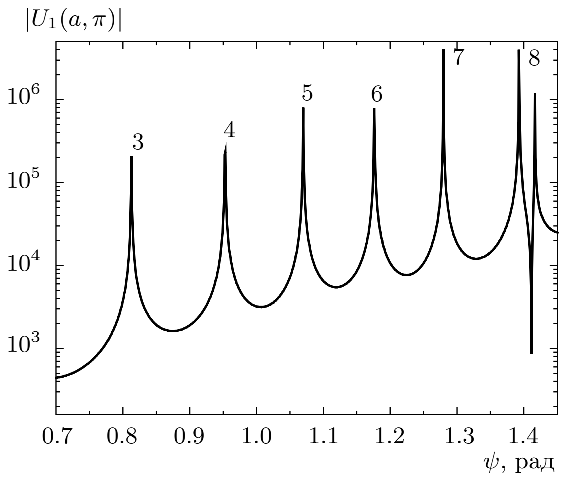

Рис. 5. Зависимость модуля поля $U_1(a,\pi)$ от угла скрутки спирали для $ka = 0.2\ldots$, $\varepsilon = -1.3$, $\mu = -0.99999$; цифры соответствуют азимутальному индексу m резонанса

Заметим, что при произвольно заданном угле спирали ψ в рассматриваемом диапазоне частот ka резонанса, вообще говоря, может и не быть. Резонансы появятся лишь в том случае, если углы ψ будут лежать в узких интервалах, вблизи вполне определенных дискретных значений ψ_m, и этим дискретным значениям будут соответствовать резонансы с различными азимутальными индексами m. Для пояснения этой ситуации на рис. 4–6 приведены зависимости модуля поля $U_1(r,\varphi)$ в точке $r = 0.99a$,

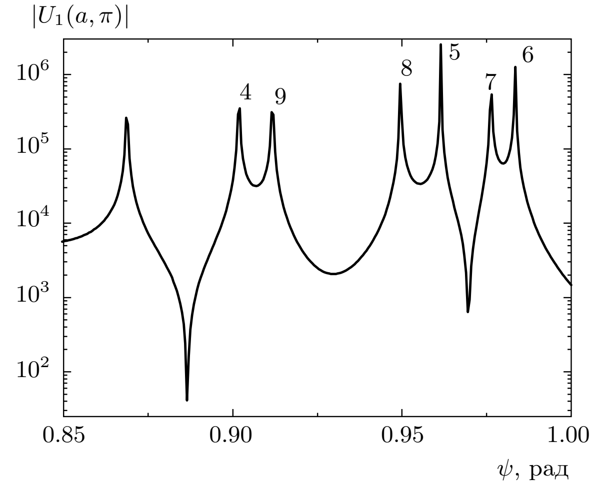

Рис. 6. Зависимость модуля поля $U_1(a,\pi)$ от угла скрутки спирали для $ka = 0.2\ldots$, $\varepsilon = -1.3$, $\mu = -0.9999$; цифры соответствуют азимутальному индексу m резонанса

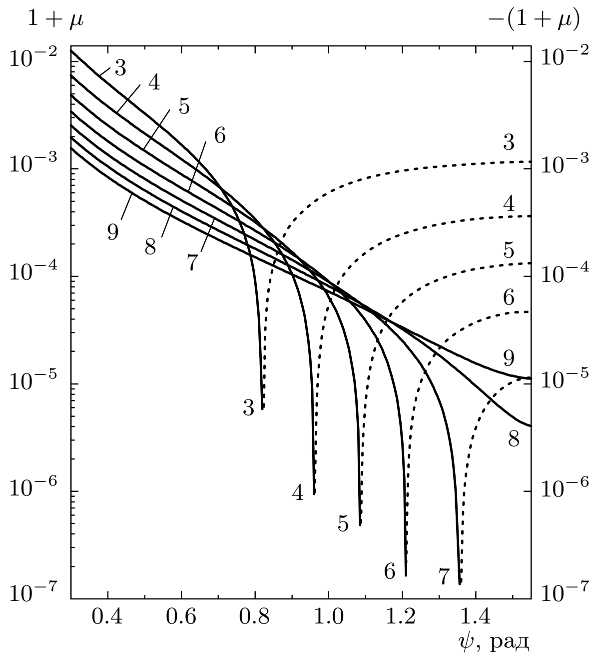

Рис. 7. Траектории резонансных параметров мод с индексом m в плоскости (μ,ψ) при $ka = 0.2\ldots$, $\varepsilon = -1.3$; номера кривых соответствуют азимутальным индексам m резонансов. Сплошные кривые: $1+\mu > 0$ (левая шкала); пунктирные кривые: $1+\mu < 0$ (правая шкала)

$\varphi = \pi$ от угла скрутки спирали ψ на частоте $ka = 0.20087$ для трех значений магнитной проницаемости: $\mu + 1 = 10^{-5}$, 10^{-4}, 10^{-3}. При этом значение диэлектрической проницаемости составляло $\varepsilon = -1.3$. Видно, что кривые на рис. 4–6 имеют резонансный характер. Индекс резонансного угла ψ_m совпадает с номером азимутальной гармоники, доминирующей в поле резонансного колебания. Заметим, что при $\mu + 1 = 10^{-5}$ (рис. 5) резонансные углы ψ_m возрастают с увеличением номера m, а при $\mu + 1 = 10^{-3}$ (рис. 4) — убывают. Для случая $\mu + 1 = 10^{-4}$ монотонная зависимость от номера исчезает и пары резонансов ψ_m с номерами «4, 9», «8, 5» и «7, 6» сближаются, образуя «дуплеты» (см. рис. 6).

Покажем, что такое поведение резонансных параметров связано с пересечением дисперсионных кривых, соответствующих различным азимутальным индексам m, т.е. с вырождением колебаний. На рис. 7 изображено семейство кривых, описывающих связь между резонансным значением угла скрутки ψ_m и магнитной проницаемостью цилиндра μ для случая $ka = 0.2\ldots$, $\varepsilon = -1.3$. Различным кривым соответствуют разные значения азимутального индекса m. Кривые на рис. 7 представляют собой траектории перемещения максимума модуля поля в двумерной области (ψ,μ) для заданных значений ka и ε. Кривые получены в результате вычисления выражения (17) в окрестности резонансных всплесков волнового поля. Сплошные кривые соответствуют положительным значениям величины $1+\mu$, а пунктирные — отрицательным значениям $1+\mu$. Из рис. 7 следует, что существует область значений параметра $1+\mu$, где дисперсионные кривые пересекаются.

Заметим, что построенные по формуле (29) зависимости магнитной проницаемости от угла скрутки с графической точностью совпадают с кривыми, изображенными на рис. 7.

Исследуем пространственную структуру резонансного поля при параметрах $\mu = -0.9999\ldots$, $\psi = 0.899\ldots$, которые обеспечивают вырождение колебаний с азимутальными индексами $m = 4$ и $m = 9$. На рис. 8 изображено распределение поля на поверхности цилиндра; оно описывается функцией $\cos(9\varphi)$. На рис. 9 представлена диаграмма рассеяния рассматриваемого цилиндра; она содержит единственную гармонику $\cos(4\varphi)$. На рис. 10 изображено распределение модуля полного поля $|U_1|$ по радиальной координате, вдоль направления $\varphi = \pi$. Видно, что кривая содержит три участка: $kr < 0.6$, $0.6 < kr < 3$, $kr > 3$, на которых поле описывается функциями соответственно $|U_1| \sim (kr)^{-9}$, $|U_1| \sim (kr)^{-4}$, $|U_1| \sim (kr)^{-1/2}$. Первый участок соот-

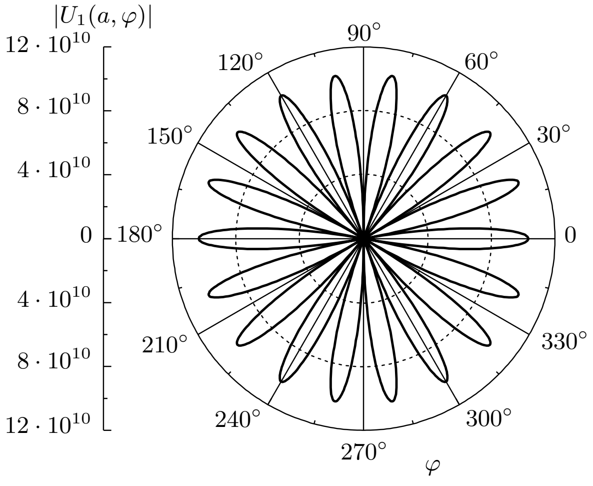

Рис. 8. Распределение модуля поля $U_1(a,\varphi)$ в точке вырождения «4, 9» при $ka = 0.2\ldots$, $\varepsilon = -1.3$, $\mu = -0.999895\ldots$, $\psi = 0.8993626\ldots$

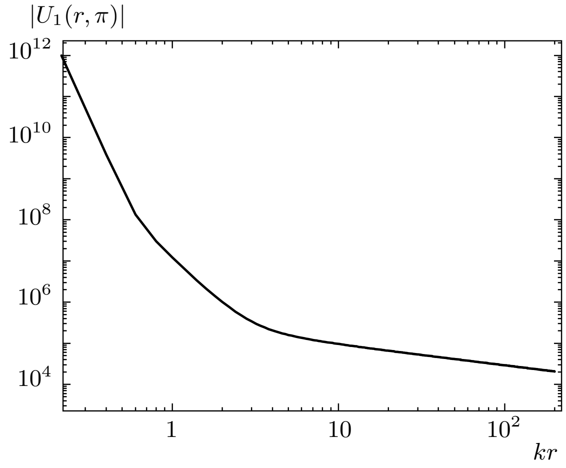

Рис. 10. Распределение модуля поля $U_1(r,\pi)$ вне цилиндра, в точке вырождения «4, 9» при $ka = 0.2\ldots$, $\varepsilon = -1.3$, $\mu = -0.999895\ldots$, $\psi = 0.8993626\ldots$

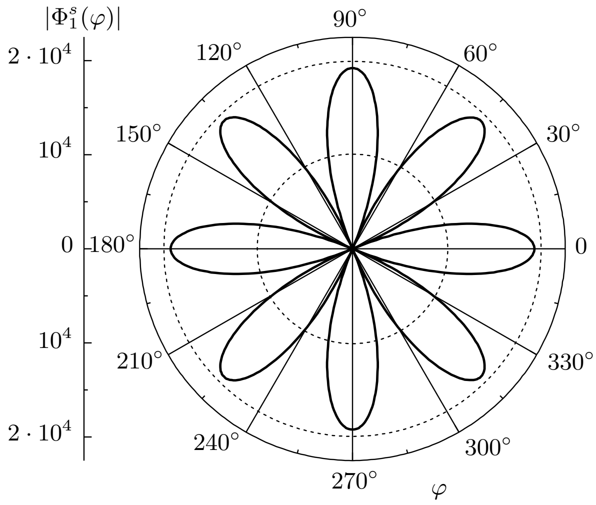

Рис. 9. Модуль диаграммы рассеяния $\Phi_1^s(\varphi)$ поля на цилиндре, в точке вырождения «4, 9» при $ka = 0.2\ldots$, $\varepsilon = -1.3$, $\mu = -0.999895\ldots$, $\psi = 0.8993626\ldots$

ветствует ближнему полю; на нем преобладает гармоника с $m = 9$. Второй участок также соответствует ближнему полю, но при доминировании гармоники с $m = 4$. И наконец, третий участок соответствует дальнему полю.

Общее представление о пространственном распределении модуля поля $|U_1|$ на плоскости (x, y) дает рис. 11. Следует иметь в виду, что перепад амплитуд поля в рассматриваемой пространственной области весьма велик (см. также рис. 10). Видно, что в окрестности цилиндра ($kr \approx 0.2$) интерференционная картина содержит 18 радиальных полос; при $kr > 0.7$ число полос уменьшается до 8.

В окрестности точки $kr \approx 0.6$ согласно рис. 10 происходит смена законов убывания резонансного поля по радиальной координате. В кольцевой области $0.5 < kr < 0.7$ в результате сложения двух гармоник $\cos(4\varphi)$ и $\cos(9\varphi)$, имеющих соизмеримые амплитуды, возникает достаточно сложная интерференционная картина.

Следует подчеркнуть, что аналогичным образом ведут себя поля во всех точках вырождения, т. е. в точках пересечения кривых, изображенных на рис. 7, а именно, в поле на контуре преобладает старшая азимутальная гармоника, а в дальнем поле — младшая.

4. СТРУКТУРА РЕЗОНАНСНЫХ ПОЛЕЙ В СТАТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим более подробно вопрос о пространственной и поляризационной структурах полей в условиях резонанса. Описанные в предыдущем разделе резонансы являются квазистатическими. Электромагнитное поле сосредоточено в статической области $kr \ll 1$ и быстро убывает с удалением от поверхности цилиндра. В этой области компоненты электромагнитного поля E_z и H_z приближенно удовлетворяют уравнению Лапласа. Легко получить

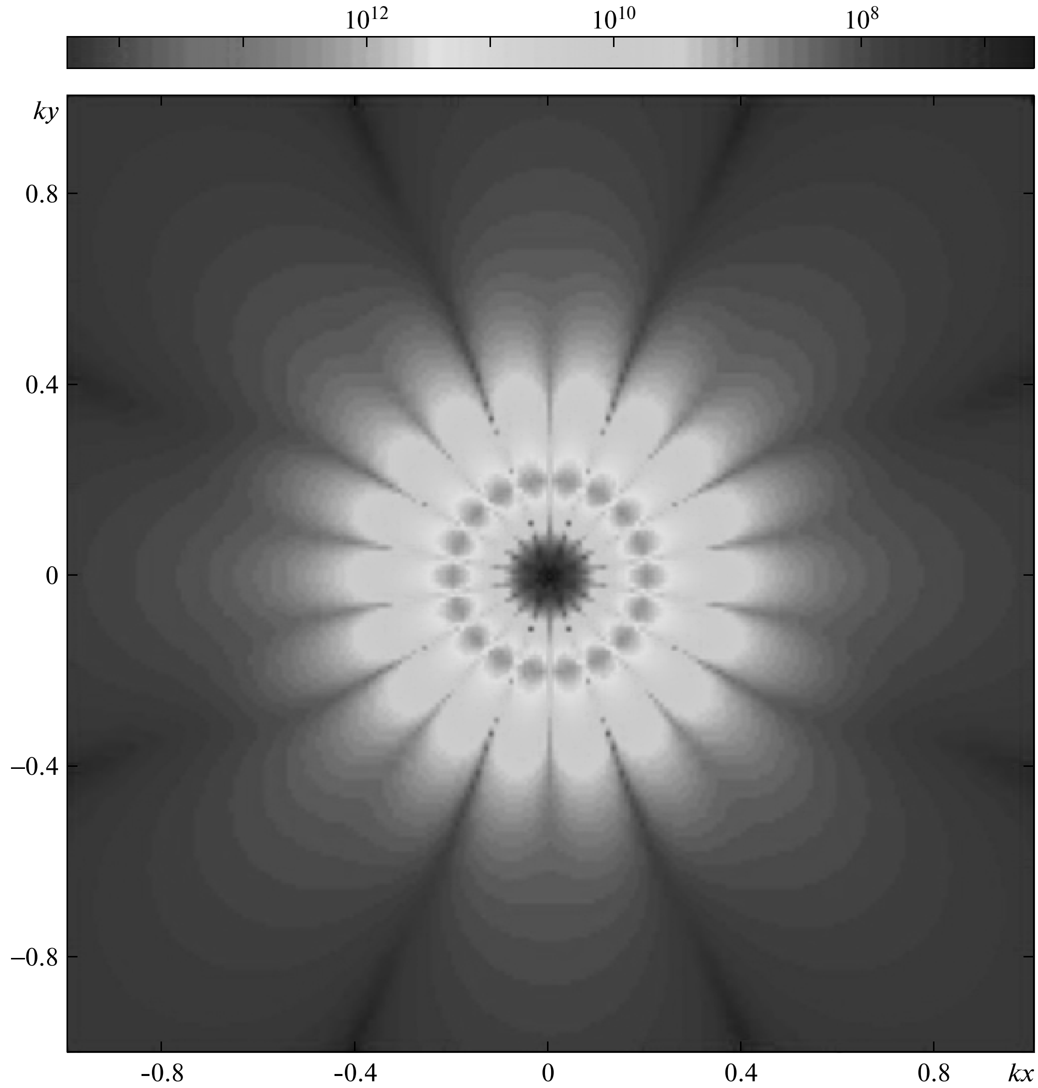

Рис. 11. Пространственное распределение функции $|U_1|$ в плоскости (x, y) при $ka = 0.2\ldots$, $\varepsilon = -1.3$, $\mu = -0.999895\ldots$, $\psi = 0.8993626\ldots$

следующие выражения для колебаний с номером m в квазистатическом приближении:

$$E_z = \begin{cases} \dfrac{ka}{m}\left(\dfrac{r}{a}\right)^m \exp(im\varphi), & r < a, \\ \dfrac{ka}{m}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{-m} \exp(im\varphi), & r > a, \end{cases} \tag{32}$$

$$E_r = \begin{cases} i\dfrac{ka}{m}\operatorname{ctg}\psi\left(\dfrac{r}{a}\right)^{m-1} \exp(im\varphi), & r < a, \\ -i\dfrac{ka}{m}\operatorname{ctg}\psi\left(\dfrac{r}{a}\right)^{-m-1} \exp(im\varphi), & r > a, \end{cases} \tag{33}$$

$$E_\varphi = \begin{cases} -\dfrac{ka}{m}\operatorname{ctg}\psi\left(\dfrac{r}{a}\right)^{m-1} \exp(im\varphi), & r < a, \\ -\dfrac{ka}{m}\operatorname{ctg}\psi\left(\dfrac{r}{a}\right)^{-m-1} \exp(im\varphi), & r > a, \end{cases} \tag{34}$$

$$H_z = \begin{cases} i\left(\dfrac{ka}{m}\right)^2 \varepsilon\operatorname{ctg}\psi\left(\dfrac{r}{a}\right)^m \exp(im\varphi), & r < a, \\ -i\left(\dfrac{ka}{m}\right)^2 \operatorname{ctg}\psi\left(\dfrac{r}{a}\right)^{-m} \exp(im\varphi), & r > a, \end{cases} \tag{35}$$

$$H_r = \begin{cases} -\dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{m-1}\exp(im\varphi), & r < a, \\ -\left(\dfrac{r}{a}\right)^{-m-1}\exp(im\varphi), & r > a, \end{cases} \tag{36}$$

$$H_\varphi = \begin{cases} -\dfrac{i}{\mu}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{m-1}\exp(im\varphi), & r < a, \\ i\left(\dfrac{r}{a}\right)^{-m-1}\exp(im\varphi), & r > a. \end{cases} \tag{37}$$

Электрическое поле, определяемое формулами (32)–(34), удовлетворяет уравнению электростатики

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \tag{38}$$

и граничным условиям (1). Магнитное поле (35)–(37) с учетом условий (31) приближенно удовлетворяет как уравнению магнитостатики,

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{39}$$

так и граничному условию (2). Выражения (32)–(37) удовлетворяют также соотношениям (7), (8).

Заметим, что угол скрутки спирали ψ не предполагался малым и, следовательно, величина $\operatorname{ctg}\psi$ не может принимать больших значений. Поэтому, учитывая условие $ka \ll 1$, заключаем, что в поле (32)–(37) преобладает магнитная составляющая $|\mathbf{H}| \gg |\mathbf{E}|$. При этом выполняются соотношения

$$|E_z| \gg |H_z|, \tag{40}$$

$$|H_r| = |H_\varphi| \gg |H_z|. \tag{41}$$

Таким образом, можно считать, что магнитное поле перпендикулярно оси z (рис. 1). Условие (40), т. е. $|U_1| \gg |U_2|$, согласуется с результатами численных расчетов, представленных в предыдущем разделе.

Обсудим поляризационную структуру полей собственных колебаний. Из формул (32), (34) следует, что компонента электрического поля, касательная к цилиндрическим поверхностям $r = \text{const}$, имеет линейную поляризацию, при этом

$$\frac{E_\varphi}{E_z} = -\frac{a}{r}\operatorname{ctg}\psi. \tag{42}$$

Таким образом, силовые линии электрического поля на поверхности цилиндра $r = \text{const}$ являются винтовыми линиями. Из соотношения (42) следует, что на границе $r = a$ цилиндра из метаматериала эти линии ортогональны проводникам спирали. При увеличении радиуса r угол скрутки силовых линий электрического поля уменьшается.

Компоненты электрического и магнитного полей, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра, имеют круговые поляризации: $E_r = \pm iE_\varphi$, $H_r = \pm iH_\varphi$. При этом вне и внутри цилиндра $r = a$ эти поля с круговой поляризацией имеют противоположные направления вращения. Отмеченные свойства характерны для киральных объектов [13].

Уравнение для собственных частот квазистатических колебаний может быть получено из следующего соотношения, которое выражает равенство энергий, запасенных электрическим и магнитным полями рассматриваемой резонансной структуры:

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi} \mu(r)\left[|H_r(r,\varphi)|^2 + |H_\varphi(r,\varphi)|^2\right] r\,dr\,d\varphi = \\ = \int_0^\infty\int_0^{2\pi} \varepsilon(r)\left[|E_z(r,\varphi)|^2 + |E_r(r,\varphi)|^2 + |E_\varphi(r,\varphi)|^2\right] \times \\ \times r\,dr\,d\varphi. \tag{43}$$

Это свойство хорошо известно из теории объемных резонаторов [18]. В формуле (43) компонентой H_z пренебрегли в силу соотношения (41). Поскольку электромагнитное поле сконцентрировано в статической области, в (43) можно использовать формулы (32)–(34), (36), (37). Выполнив затем интегрирование, получим уравнение (29). Таким образом, это уравнение по своему физическому смыслу является аналогом формулы Томсона $\omega^2 = 1/LC$, определяющей резонансную частоту LC-контура.

5. ВЫВОДЫ

Проведено численное исследование задачи возбуждения нитями электрического и магнитного токов цилиндрической многозаходной проволочной спирали, заполненной метаматериалом. В малых по сравнению с длиной волны цилиндрах, магнитная проницаемость которых близка к минус единице, обнаружен эффект вырождения высокодобротных резонансов.

Исследована динамика вырождения собственных колебаний кирального цилиндра, заполненного метаматериалом. Показано, что существуют колебания, у которых азимутальная зависимость поля $\cos(m\varphi)$ имеет разные значения индекса m в ближнем и дальнем полях. В квазистатическом приближении дано аналитическое описание резонансов. Получено явное выражение для собственных частот цилиндрического кирального цилиндра, заполненного метаматериалом.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-02-00062-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Веселаго, УФН **92**, 517 (1967).

2. К. Ю. Блиох, Ю. П. Блиох, УФН **174**, 439 (2004).

3. D. R. Smith, J. B. Pendry, and M. C. K. Wiltshire, Science **305**, 788 (2004).

4. А. А. Жаров, И. Г. Кондратьев, А. И. Смирнов, Изв. вузов. Радиофизика **48**, 978 (2005).

5. А. Б. Петрин, Письма в ЖЭТФ **87**, 550 (2008).

6. А. А. Жаров, Н. А. Жарова, Р. Е. Носков, ЖЭТФ **136**, 853 (2009).

7. A. Sihvola, Metamaterials **1**, 2 (2007).

8. А. П. Анютин, И. П. Коршунов, А. Д. Шатров, ЖЭТФ **145**, 35 (2014).

9. V. V. Klimov, Opt. Comm. **211**, 183 (2002).

10. A. P. Anyutin, I. P. Korshunov, and A. D. Shatrov, in *CD-ROM Proc. of 7th Int. Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics (META′ 2013)*, Bordeaux, France (2013), p. PSIII25.

11. А. П. Анютин, И. П. Коршунов, А. Д. Шатров, Радиотехн. и электрон. **59**, 437 (2014).

12. D. V. Guzatov and V. V. Klimov, New J. Phys. **14**, 123009 (2012).

13. Б. З. Каценеленбаум, Е. Н. Коршунова, А. Н. Сивов, А. Д. Шатров, УФН **167**, 1201 (1997).

14. И. П. Коршунов, Е. Н. Коршунова, А. Н. Сивов, А. Д. Шатров, Радиотехн. и электрон. **52**, 389 (2007).

15. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).

16. А. Г. Кюркчан, С. А. Минаев, А. Л. Соловейчик, Радиотехн. и электрон. **46**, 666 (2001).

17. А. П. Анютин, А. Г. Кюркчан, С. А. Минаев, Радиотехн. и электрон. **47**, 955 (2002).

18. B. Z. Katsenelenbaum, *High-Frequency Electrodynamics*, Wiley-VCH, Weinheim (2006).