

# B-ФАЗА С ПОЛЯРНЫМ ИСКАЖЕНИЕМ В СВЕРХТЕКУЧЕМ ${}^3\text{He}$ В «УПОРЯДОЧЕННОМ» АЭРОГЕЛЕ

*В. В. Дмитриев\*, А. А. Сенин, А. А. Солдатов, Е. В. Суровцев, А. Н. Юдин*

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук  
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 июня 2014 г.

Методами ядерного магнитного резонанса исследованы свойства низкотемпературной сверхтекучей фазы  ${}^3\text{He}$  в «нематически упорядоченном» аэрогеле, в котором составляющие его нити практически параллельны друг к другу. Такая сильная анизотропия аэрогеля влияет на фазовую диаграмму  ${}^3\text{He}$  и структуру сверхтекучих фаз. Развита теоретическая модель B-фазы с полярным искажением. Показано, что эта модель хорошо описывает наблюдаемые свойства низкотемпературной фазы.

*Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 75-летию А. Ф. Андреева*

DOI: 10.7868/S0044451014120098

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время достигнуто достаточно глубокое понимание свойств объемного (т. е. свободного от примесей) сверхтекучего  ${}^3\text{He}$ , и теория в большинстве случаев не только качественно, но и количественно согласуется с экспериментом. В то же время большой интерес представляют исследования влияния примесей на сверхтекучесть  ${}^3\text{He}$ . Обычным образом ввести примеси в  ${}^3\text{He}$  невозможно, так как растворимость  ${}^4\text{He}$  в  ${}^3\text{He}$  при сверхнизких температурах пренебрежимо мала, а любые другие примеси вымерзают. Это, однако, можно сделать с помощью аэрогеля низкой плотности, погруженного в жидкий  ${}^3\text{He}$ .

Аэрогель — это высокопористаяnanoструктура, состоящая из нитей, которые образуют жесткий каркас. Для исследований сверхтекучести  ${}^3\text{He}$  представляют интерес аэрогели, в которых характерный диаметр нитей меньше длины когерентности сверхтекучего  ${}^3\text{He}$  (20–80 нм), так как в этом случае нити действительно можно рассматривать как примеси.

Для того чтобы аэрогель не полностью подавлял сверхтекучесть, требуется также, чтобы длина свободного пробега фермиевских квазичастиц превышала длину когерентности. Всем этим условиям удовлетворяют аэрогели из  $\text{SiO}_2$  с пористостью 97–99 %,

которые обычно и используют для экспериментов. В таких аэрогелях в слабых магнитных полях наблюдаются две сверхтекущие фазы  ${}^3\text{He}$  ( $A$ -подобная и  $B$ -подобная), параметры порядка которых соответствуют параметрам порядка  $A$ - и  $B$ -фаз объемного  ${}^3\text{He}$ , т. е. соответственно параметру порядка Андерсона–Бринкмана–Мореля (АБМ) и параметру порядка Бальяна–Вертхамера (БВ) [1–6].

Установлено, что даже небольшая глобальная анизотропия аэрогеля может существенно влиять на наблюдаемые свойства  ${}^3\text{He}$ , что, однако, связано с изменением пространственной структуры фаз, а не с изменением вида параметра порядка. В частности, параметр порядка  $A$ -подобной фазы соответствует параметру порядка АБМ, но, в зависимости от величины и типа анизотропии («растяжение» или «сжатие»), может находиться либо в пространственно-однородном состоянии, ориентированном анизотропией, либо в двумерном (или трехмерном) разупорядоченном состоянии Ларкина–Имри–Ма [5–8]. Анизотропию типа «сжатие» можно получить, сжав изначально изотропный образец аэрогеля. Растигивать же аэрогель практически нереально из-за его хрупкости. Поэтому до последнего времени использовались только растянутые на небольшую величину образцы аэрогеля, причем растяжение получалось неконтролируемым образом в процессе роста образца. Однако именно случай сильного растяжения представляет особый интерес, так как, согласно теории, в  ${}^3\text{He}$  в растянутом аэрогеле должны возни-

\*E-mail: dmitriev@kapitza.ras.ru

кать «полярные» искажения параметра порядка, а при сильном растяжении может наблюдаться и «чистая» полярная фаза [9].

Случай сильной анизотропии типа «растяжение» можно получить, если использовать принципиально новый «нематически упорядоченный» аэрогель на основе  $\text{Al}_2\text{O}_3$  [10]. В этом аэрогеле нити  $\text{Al}_2\text{O}_3$  имеют диаметр примерно от 6 до 10 нм [11] и практически параллельны на макроскопических расстояниях, т. е. этот аэрогель соответствует случаю бесконечно растянутого изначально изотропного обычного аэрогеля. В первых экспериментах с  ${}^3\text{He}$  в таком аэрогеле было установлено, что фазовая диаграмма сверхтекучих фаз сильно отличается от случая объемного  ${}^3\text{He}$  и от случая  ${}^3\text{He}$  в аэргелях на основе  $\text{SiO}_2$  [12]. Обнаружено, что при охлаждении из нормальной фазы сначала происходит переход в высокотемпературную сверхтекучую фазу, в которой магнитная восприимчивость не зависит от температуры, а параметр порядка соответствует параметру порядка АБМ с сильным полярным искажением, причем величина этого искажения зависит от температуры и давления.

При дальнейшем охлаждении происходит переход первого рода в низкотемпературную (НТ) фазу, магнитная восприимчивость которой уменьшается при понижении температуры. Систематических исследований НТ-фазы проведено не было, но было предположено, что ее параметр порядка соответствует параметру порядка БВ с полярным искажением (т. е.  $B$ -фазе с полярным искажением). В данной работе описана теоретическая модель  $B$ -фазы с полярным искажением и приведены результаты экспериментальных исследований НТ-фазы  ${}^3\text{He}$  в «нематически упорядоченном» аэрогеле, которые сравниваются с этой моделью.

## 2. ТЕОРИЯ

### 2.1. Параметр порядка $B$ -фазы с полярным искажением

Чтобы понять, чем определяется вид параметра порядка сверхтекучего  ${}^3\text{He}$  в «нематически упорядоченном» аэрогеле, воспользуемся выражением для свободной энергии Гинзбурга–Ландау. Квадратичные по параметру порядка члены запишем в виде

$$\Delta F^{(2)} = \alpha A_{\mu j} A_{\mu j}^* + \eta_{jl} A_{\mu j} A_{\mu l}^* - \frac{1}{2} \Delta \chi_{\mu\nu} H_\mu H_\nu + U_D, \quad (1)$$

где  $A_{\mu j}$  — комплексная матрица  $3 \times 3$ , определяющая вид параметра порядка,  $\alpha = N_{eff}(T/T_{c0} - 1)$ ,  $N_{eff}$  — эффективная плотность состояний,  $T_{c0}$  — температура сверхтекучего перехода объемного  ${}^3\text{He}$ ,

$$\eta_{jl} = N_{eff} [\eta_0 \delta_{jl} + \kappa (3u_j u_l - \delta_{jl})] \quad (2)$$

— тензор, описывающий взаимодействие с аэрогелем [13, 14],  $\kappa$  определяет расщепление температуры перехода для разных проекций орбитального момента куперовской пары,  $\eta_0$  дает средний сдвиг  $T_c$ , одинаковый для всех орбитальных проекций,  $\mathbf{u}$  — единичный вектор вдоль оси анизотропии аэрогеля (т. е. вдоль нитей аэрогеля),

$$\Delta \chi_{\mu\nu} \sim \chi_N \frac{1}{T_{c0}^2} A_{\mu j} A_{\nu j}^* \quad (3)$$

— отличие тензора магнитной восприимчивости сверхтекучей фазы от магнитной восприимчивости  $\chi_N$  нормальной фазы,  $\mathbf{H}$  — магнитное поле,

$$U_D = \frac{1}{5} N_{eff} \lambda_D (A_{\mu\mu} A_{\nu\nu}^* + A_{\mu\nu} A_{\nu\mu}^*) \quad (4)$$

— дипольная энергия,  $\lambda_D \sim 10^{-6}$  — дипольная постоянная. Для «нематически упорядоченного» аэрогеля  $\kappa < 0$ . При этом, согласно микроскопической теории,  $\eta_0 + 2\kappa > 0$  [15], что эквивалентно условию  $T_{ca} \leq T_{c0}$  ( $T_{ca}$  — температура сверхтекучего перехода в аэрогеле).

Величины  $\kappa$  и  $\eta_0$  можно оценить как  $\eta_0 \sim |\kappa| \sim \sim (1-p)\xi_0/r_0$  [15], где  $p$  — пористость аэрогеля,  $r_0$  — радиус нитей,  $\xi_0$  — длина когерентности сверхтекучего  ${}^3\text{He}$ , т. е.  $|\kappa| \sim 10^{-2} - 10^{-1}$ . Магнитное поле в рассматриваемых ниже экспериментах порядка 300 Э, поэтому  $(\mu_n H)^2/T_c^2 \sim 10^{-4}$  ( $\mu_n$  — ядерный магнетон). Таким образом, получается следующая оценка для параметров, входящих в выражение (1):

$$\kappa \gg \chi_N H^2 / (T_c^2 N_{eff}) \gg \lambda_D.$$

Отсюда следует, что при определении вида параметра порядка можно не учитывать магнитную и дипольную энергию, а ограничиться лишь членом, описывающим взаимодействие с аэрогелем.

Как показано в [14, 16], в  ${}^3\text{He}$  в «нематически упорядоченном» аэрогеле ниже температуры

$$T_{cB} = T_{c0} [1 - \eta_0 - \kappa (1 + \beta_{12}/\beta_{345})]$$

возможно существование  $B$ -фазы с полярным искажением, имеющей параметр порядка вида

$$A_{\mu j}^0 = \Delta_\perp \delta_{\mu j} + (\Delta_\parallel - \Delta_\perp) u_\mu u_j, \quad (5)$$

где  $\Delta_{\parallel}$  и  $\Delta_{\perp}$  — размеры щели вдоль и поперек оси анизотропии  $\mathbf{u}$ ,  $|\Delta_{\parallel}| > |\Delta_{\perp}|$ ,  $\beta_i$  — коэффициенты перед членами четвертого порядка в разложении свободной энергии Гинзбурга–Ландау,  $\beta_{12} = \beta_1 + \beta_2$  и т. п. Предполагая пространственную однородность параметра порядка, можем найти температурные зависимости для  $\Delta_{\parallel}$  и  $\Delta_{\perp}$  в рамках теории Гинзбурга–Ландау [14]:

$$\Delta_{\perp}^2(T) = \frac{T_{cB} - T}{T_{c0}} \frac{1}{3\beta_{12} + \beta_{345}}, \quad (6)$$

$$\Delta_{\parallel}^2(T) = \Delta_{\perp}^2 - \frac{3\kappa}{\beta_{345}}. \quad (7)$$

Без учета дипольной и магнитной энергий параметр порядка вырожден относительно независимых ортогональных преобразований орбитальной и спиновой частей параметра порядка. При этом вид второго члена в выражении (1) ограничивает набор преобразований орбитальной части параметра порядка вращением вокруг оси анизотропии  $\mathbf{u}$ , а также операцией инверсии этой оси,  $\hat{I}_u \mathbf{u} = -\mathbf{u}$ . Таким образом, более общий вид параметра порядка имеет вид

$$A_{\mu j} = R_{\mu\nu}^S R_{jk}^L A_{\nu k}^0 = \\ = \hat{R}^S(\mathbf{n}, \theta) \hat{A}^0(\mathbf{u}) \left( \hat{R}^L(\mathbf{u}, \xi) \right)^T, \quad (8)$$

где  $\hat{R}^S$  — матрица поворота спиновой части параметра порядка вокруг направления  $\mathbf{n}$  на угол  $\theta$ ,  $\hat{R}^L$  — матрица поворота вокруг  $\mathbf{u}$  на произвольный угол  $\xi$ .

Формулы (5)–(7) применимы только для случая однородного параметра порядка. Параметр порядка сверхтекущего  ${}^3\text{He}$  в аэрогеле, вообще говоря, может быть существенно пространственно-неоднородным. Неоднородность параметра порядка выражается как в пространственных флюктуациях значений  $\Delta_{\parallel}$ ,  $\Delta_{\perp}$ , так и в изменении формы параметра порядка. Учет небольших флюктуаций параметра порядка около среднего значения (5) может быть проведен аналогично тому, как это было сделано в работе [17]. Однако в настоящей работе мы ограничимся рассмотрением среднего параметра порядка.

## 2.2. Тензор магнитной восприимчивости

Вырождение по  $\mathbf{n}$  и  $\theta$  в выражении (8) частично снимается при учете третьего члена в (1):

$$\Delta F_H = \tilde{\alpha} H_{\mu} H_{\nu} A_{\mu j} A_{\nu j}^*, \quad (9)$$

где в пределе слабой связи и с учетом ферми-жидкостных поправок [18]

$$\tilde{\alpha} = \frac{N_{eff} \mu_B^2}{T_c^2} \frac{7\zeta(3)}{4\pi^2(1+F_0^a)^2}.$$

После подстановки (8) в (9) получим

$$\Delta F_H = \tilde{\alpha} \Delta_{\perp}^2 H^2 + \tilde{\alpha} (\Delta_{\parallel}^2 - \Delta_{\perp}^2) (H_{\mu} R_{\mu\nu}^S u_{\nu})^2. \quad (10)$$

Поскольку  $|\Delta_{\perp}| < |\Delta_{\parallel}|$ , минимум магнитной энергии соответствует случаю, когда вектор  $\mathbf{w} = \hat{R}^S(\mathbf{n}, \theta) \mathbf{u}$  перпендикулярен  $\mathbf{H}$ .

Плотность магнитной энергии, выраженная через тензор магнитной восприимчивости  $B$ -фазы с полярным искажением, имеет вид

$$F_H = -\frac{1}{2} \chi_{\mu\nu} H_{\mu} H_{\nu} = F_H^0 + \Delta F_H = -\frac{1}{2} \chi_N \times \\ \times \left[ \left( 1 - \frac{\tilde{\alpha}}{\chi_N} \Delta_{\perp}^2 \right) \delta_{\mu\nu} - \frac{\tilde{\alpha}}{\chi_N} (\Delta_{\parallel}^2 - \Delta_{\perp}^2) w_{\mu} w_{\nu} \right] \times \\ \times H_{\mu} H_{\nu}, \quad (11)$$

т. е.

$$\chi_{\mu\nu} = \chi_N \left( 1 - \frac{\tilde{\alpha}}{\chi_N} \Delta_{\perp}^2 \right) \delta_{\mu\nu} - \\ - \tilde{\alpha} (\Delta_{\parallel}^2 - \Delta_{\perp}^2) w_{\mu} w_{\nu}. \quad (12)$$

В достаточно сильном магнитном поле (т. е. при  $H \gg H_D \approx 30$  Гс, где  $H_D$  — магнитное поле, соответствующее ориентационной части дипольной энергии) ориентация этого тензора не будет зависеть от дипольной энергии. В этом случае равновесная намагниченность  $B$ -фазы с полярным искажением будет уменьшаться с понижением температуры по закону

$$\mathbf{M} = \chi_N \left( 1 - \frac{\tilde{\alpha}}{\chi_N} [\Delta_{\perp}(T)]^2 \right) \mathbf{H} \equiv \chi \mathbf{H}. \quad (13)$$

## 2.3. Ядерный магнитный резонанс в $B$ -фазе с полярным искажением

Дипольная энергия является самым малым членом в выражении (1), однако она также частично снимает вырождение параметра порядка. Именно дипольная энергия приводит к ненулевому сдвигу частоты в ЯМР-экспериментах.

Вычисление равновесной конфигурации параметра порядка с учетом  $U_D$  в случае произвольного угла между  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{H}$  достаточно громоздкое. Поэтому рассмотрим лишь два частных случая:  $\mathbf{u} \parallel \mathbf{H}$  и  $\mathbf{u} \perp \mathbf{H}$ .

Параметризуем поворот спиновой части параметра порядка через углы Эйлера:

$$\hat{R}_S(\mathbf{n}, \theta) = \hat{R}_z(\alpha)\hat{R}_y(\beta)\hat{R}_z(\gamma). \quad (14)$$

Тогда движение параметра порядка описывается выражением [19]

$$\hat{A}(t) = \hat{R}_z(\alpha + \omega_L t)\hat{R}_y(\beta)\hat{R}_z(\gamma - \omega_L t) \times \hat{A}^0(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \xi), \quad (15)$$

где  $\hat{A}^0(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \xi)$  — начальная конфигурация параметра порядка,  $\alpha$  — фаза прецессии намагниченности,  $\gamma$  — фаза прецессии параметра порядка вокруг направления намагниченности,  $\beta$  — угол отклонения намагниченности от равновесной ориентации,  $\omega_L$  — лармировская частота. Чтобы найти выражение для дипольной энергии, нужно подставить (15) в (4) и усреднить по времени. Это имеет смысл только для  $H \gg H_D$ , когда движение, вызванное дипольной энергией, является «медленным» по отношению к «быстрой» лармировской прецессии. Полученная усредненная дипольная энергия будет зависеть от  $\varphi = \alpha + \gamma$ , которая является в данном случае «медленной» переменной. Исходя из этого, запишем дипольную энергию в виде

$$\langle U_D \rangle = \frac{1}{5} \lambda_D N_{eff} (\langle A_{\mu\mu} A_{\nu\nu}^* \rangle + \langle A_{\mu\nu} A_{\nu\mu}^* \rangle), \quad (16)$$

где  $\langle \dots \rangle$  обозначает усреднение по времени. Используем определение леггеттовской частоты  $\Omega_B$  для случая «чистой»  $B$ -фазы:

$$\Omega_B^2 = 3 \frac{g^2}{\chi_B} \lambda_D N_F \Delta_0^2, \quad (17)$$

где  $g$  — гиромагнитное отношение для ядер  ${}^3\text{He}$ ,  $\chi_B$  и  $\Delta_0$  — восприимчивость и щель «чистой»  $B$ -фазы. Тогда выражение (16) можно переписать в виде

$$\langle U_D \rangle = \frac{1}{15} \frac{\chi_B}{g^2} \Omega_B^2 K \left( \frac{\langle A_{\mu\mu} A_{\nu\nu}^* \rangle + \langle A_{\mu\nu} A_{\nu\mu}^* \rangle}{\Delta_\parallel^2} \right), \quad (18)$$

где  $K = \Delta_\parallel^2 / \Delta_0^2$ .

Далее необходимо найти минимум дипольной энергии по  $\varphi$  и  $\xi$ . Тогда сдвиг частоты поперечного ЯМР для найденных минимумов дается выражением [19]

$$\Delta\omega(\beta) = \omega - \omega_L = -\frac{g^2}{\chi} \frac{1}{\omega_L} \frac{\partial (\langle U_D \rangle)}{\partial (\cos \beta)}. \quad (19)$$

Необходимые условия устойчивости соответствующих мод колебаний определяются с помощью неравенств

$$\frac{\partial^2 (\langle U_D \rangle)}{\partial \varphi^2} > 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial (\Delta\omega(\beta))}{\partial (\cos \beta)} > 0. \quad (21)$$

#### 2.4. ЯМР для случая $\mathbf{u} \parallel \mathbf{H}$

Для случая  $\mathbf{u} \parallel \mathbf{H}$  начальное направление вектора  $\mathbf{w}$  зависит от соотношения между дипольной и магнитной энергиями. Если  $H \gg H_D$ , то поправка к равновесному направлению  $\mathbf{w}$  будет иметь порядок  $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{H})/H \sim (H_D/H)^2 \sim (\Omega_B/\omega_L)^2$ . Поправка же к дипольной энергии будет следующего порядка малости. Таким образом, для случая  $H \gg H_D$ , оставляя только члены, квадратичные по  $(\Omega_B/\omega_L)$ , можно считать, что  $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{H})/H \approx 0$ . Отметим также, что после подстановки (15) в (4) и усреднения по времени дипольная энергия будет зависеть только от комбинации  $\tilde{\varphi} = \alpha + \gamma - \xi$ :

$$\begin{aligned} \frac{15g^2}{\chi_B \Omega_B^2 K} \langle U_D \rangle &= \frac{1}{4} (\cos \beta + 1)^2 q^2 \cos 2\tilde{\varphi} - \\ &- (2 \cos \beta - 1)(\cos \beta + 1)q \cos \tilde{\varphi} - \\ &- \cos^2 \beta \left( \frac{q^2}{2} + 1 \right) + \frac{3q^2}{2} + 1, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $q = \Delta_\perp / \Delta_\parallel$  и  $|q| \leq 1$ . В дальнейшем для определенности будем считать, что  $q > 0$ . Случай  $q < 0$  можно получить из рассматриваемого, заменив fazу  $\tilde{\varphi}$  на  $\pi + \tilde{\varphi}$ .

В зависимости от величины  $q$  могут реализовываться три моды поперечного резонанса, соответствующие разным минимумам дипольной энергии по  $\tilde{\varphi}$ :

1a)

$$\cos \tilde{\varphi} = \frac{1}{q} \frac{2 \cos \beta - 1}{\cos \beta + 1}, \quad \cos \beta \in \left[ \frac{1-q}{q+2}, \frac{1+q}{2-q} \right]. \quad (23)$$

Верхний предел при  $q > 1/2$  может становиться больше единицы, в этом случае отрезок допустимых значений  $\cos \beta$  нужно ограничить сверху единицей. Сдвиг частоты для данного минимума составляет

$$\Delta\omega_{1a} = \left( \frac{3q^2}{2} + 6 \right) \cos \beta + \frac{q^2}{2} - 2. \quad (24)$$

Данная ветвь колебаний неустойчива, так как не выполнено условие (21).

1b)

$$\tilde{\varphi} = 0, \quad \cos \beta \in \left[ \frac{1+q}{2-q}, 1 \right]. \quad (25)$$

Данная мода существует только при условии  $q < 1/2$ . Сдвиг частоты этой моды

$$\Delta\omega_{1b} = \left( \frac{q^2}{2} + 4q + 2 \right) \cos \beta + q - \frac{q^2}{2}. \quad (26)$$

Данная ветвь колебаний также неустойчива в силу невыполнения условия (21).

1c)

$$\tilde{\varphi} = \pi, \quad \cos \beta \in \left[ -1, \frac{1-q}{q+2} \right]. \quad (27)$$

Сдвиг частоты получается заменой  $q \rightarrow -q$  в (26):

$$\Delta\omega_{1c} = \left( \frac{q^2}{2} - 4q + 2 \right) \cos \beta - q - \frac{q^2}{2}. \quad (28)$$

Для данной моды колебаний оба необходимых условия устойчивости, (20) и (21), выполнены.

Отметим, что в формулах (24), (26) и (28) значения сдвига частоты нормированы на общий коэффициент  $D = \Omega_B^2 K \chi_B / 15\omega_L \chi$ . Эта же нормировка используется и в ряде формул ниже.

## 2.5. ЯМР для случая $\mathbf{u} \perp \mathbf{H}$

Для случая  $\mathbf{u} \perp \mathbf{H}$  абсолютный минимум дипольной энергии по  $\xi$  достигается при  $\xi = 0$ . Дипольная энергия как функция  $\varphi$  при  $\xi = 0$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{15g^2}{\chi_B \Omega_B^2 K} \langle U_D \rangle &= \frac{1}{8} (\cos \beta + 1)^2 (q + 1)^2 \cos 2\varphi + \\ &+ (2 \cos \beta - 1) (\cos \beta + 1) q (q + 1) \cos \varphi + \\ &+ \frac{\cos^2 \beta}{2} (5q^2 + 1) + \frac{q^2 + 1}{2}. \end{aligned} \quad (29)$$

В данном случае имеются два минимума дипольной энергии по  $\varphi$ .

2a)

$$\cos \varphi = \frac{q}{1+q} \frac{1-2 \cos \beta}{\cos \beta + 1}, \quad \cos \beta \in \left[ -\frac{1}{3q+1}, 1 \right], \quad (30)$$

$$\Delta\omega_{2a} = \frac{(1-q)(1+3q)}{2} - \frac{(1-q)^2}{2} \cos \beta. \quad (31)$$

Это решение соответствует моде Бринкмана–Смита в объемной  $B$ -фазе. Отметим, что, в отличие от «чистой»  $B$ -фазы, при  $\beta = 0$  в  $B$ -фазе с полярным искажением остается небольшой положительный сдвиг частоты. При уменьшении  $q$ , т. е. при переходе к полярной фазе, граничное значение  $\cos \beta_0 = -1/(3q+1)$  уменьшается и стремится к  $-1$ .

2b)

$$\varphi = 0, \quad \cos \beta \in \left[ -1, -\frac{1}{3q+1} \right], \quad (32)$$

$$\Delta\omega_{2b} = -\frac{3q^2}{2} - 2q - \frac{1}{2} - \left( \frac{19q^2}{2} + 5q + \frac{3}{2} \right) \cos \beta. \quad (33)$$

В объемной  $B$ -фазе это решение соответствует случаю углов отклонения намагниченности, больших  $\theta_0 \approx 104^\circ$ .

Обе найденные моды колебаний удовлетворяют необходимым условиям устойчивости (20), (21).

## 2.6. Случай непрерывного ЯМР

Рассмотрим случай непрерывного ЯМР ( $\beta = 0$ ). Тогда для  $\mathbf{u} \parallel \mathbf{H}$  сдвиг частоты  $\Delta\omega_{\parallel} = 2(q^2 + 2)$ , если  $q > 1/2$  (решение 1a). Если же  $q < 1/2$ , то  $\Delta\omega_{\parallel} = 5q + 2$  (решение 1b). В случае  $\mathbf{u} \perp \mathbf{H}$  сдвиг частоты  $\Delta\omega_{\perp} = 2q(1-q)$  (решение 2a).

Пусть  $C = \Delta\omega_{\perp}/\Delta\omega_{\parallel}$ . Тогда из приведенных выше уравнений для  $\Delta\omega_{\perp}$  и  $\Delta\omega_{\parallel}$  получим три возможных решения для  $q$ :

1.  $C \in [0, \sqrt{6}/4 - 1/2]$ ,  $q \in [1/2, 1]$ :

$$q = \frac{1}{2(1+C)} \left( 1 + \sqrt{1 - 8C - 8C^2} \right), \quad (34)$$

2.  $C \in [0, (18 - 4\sqrt{14})/25]$ ,  $q \in [(\sqrt{14} - 2)/5, 1/2]$ :

$$q = \frac{2 - 5C}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{25C^2 - 36C + 4}, \quad (35)$$

3.  $C \in [0, (18 - 4\sqrt{14})/25]$ ,  $q \in [0, (\sqrt{14} - 2)/5]$ :

$$q = \frac{2 - 5C}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{25C^2 - 36C + 4}. \quad (36)$$

## 3. ЭКСПЕРИМЕНТ

### 3.1. Условия проведения экспериментов

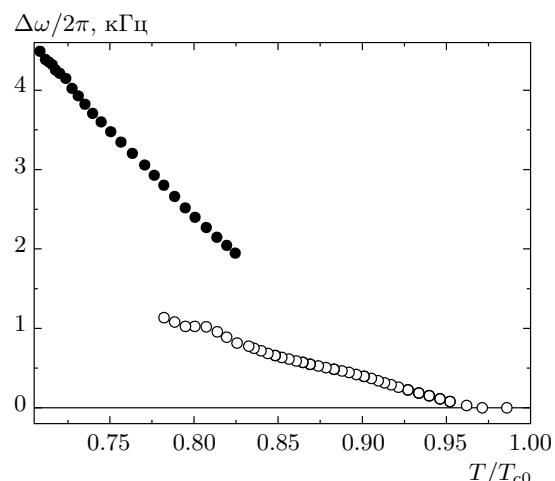
Эксперименты по исследованию свойств НТ-фазы проводились методом ЯМР в магнитных полях от 72 до 346 Гц (частоты ЯМР от 0.232 до 1.12 МГц) и при давлениях в ячейках с  ${}^3\text{He}$  от 0 до 29.3 бар. Необходимая температура (от 0.8 до 2.6 мК) достигалась с помощью криостата ядерного размагничивания и измерялась с помощью кварцевого вискозиметра-камертона [20, 21], который калибровался по измерениям леггеттовской частоты в объемной  $B$ -фазе.

Экспериментальные камеры (их было использовано две) изготавливались из эпоксидной смолы Stycast-1266 и были аналогичны камерам, описанным в работах [6, 12]. Камеры имели по две экспериментальные ячейки с разными образцами «упорядоченного» аэрогеля. Каждая ячейка была окружена двухсекционной приемно-передающей катушкой

ЯМР (примерно 100 витков медного провода диаметром около 0.05 мм), служившей индуктивностью параллельного резонансного  $LC$ -контура с характерной добротностью 100. Резонансная частота контура подстраивалась с помощью внешнего конденсатора. В экспериментах по непрерывному ЯМР при фиксированной частоте накачки сканировалось магнитное поле, а сигнал ЯМР после широкополосного предусилителя детектировался фазочувствительным двухканальным усилителем SR844, что позволяло одновременно записывать сигналы поглощения и дисперсии.

Внешнее постоянное магнитное поле создавалось двумя сверхпроводящими соленоидами, оси которых были ориентированы перпендикулярно друг к другу (для определенности обозначим эти оси как  $\hat{z}$  и  $\hat{x}$ ). Это позволяло менять направление поля в плоскости  $\hat{x}\hat{z}$ , перпендикулярной осям катушек ЯМР, причем обычно использовалась одна из двух ориентаций поля: вдоль или поперек нитей образцов аэрогеля (нити были ориентированы вдоль  $\hat{z}$ ). Для компенсации остаточных неоднородностей поля использовались дополнительные «градиентные» катушки. Это позволяло достигать однородности поля на размерах образцов от  $2 \cdot 10^{-4}$  (для  $\mathbf{H} \perp \hat{z}$ ) до  $2 \cdot 10^{-5}$  (для  $\mathbf{H} \parallel \hat{z}$ ). При помощи дополнительных резистивных катушек, размещенных снаружи криостата мы также могли менять в небольших пределах (до  $\pm 30^\circ$ ) ориентацию поля в плоскости  $\hat{x}\hat{y}$ , перпендикулярной нитям аэрогеля.

Основная часть экспериментов была выполнена с двумя образцами аэрогеля: с образцом 1 плотностью примерно  $30 \text{ mg/cm}^3$  (тот же образец, что и образец 1 в работе [12]) и с образцом 2 плотностью приблизительно  $8 \text{ mg/cm}^3$ . Ось анизотропии у каждого из образцов была ориентирована вдоль  $\hat{z}$ . Образец 1 имел форму цилиндра (диаметр 4 мм, высота около 2.6 мм) с осью вдоль нитей аэрогеля, а образец 2 — форму прямоугольного параллелепипеда с характерными размерами 4 мм. Ниже будут представлены результаты экспериментов именно с этими образцами. В двух других образцах (плотностью около  $30 \text{ mg/cm}^3$ ) результаты были близки к результатам, полученным для образца 1. Следует отметить, что между стенками ячеек и образцами имелись зазоры 0.1–0.2 мм, и сигнал ЯМР от объемного  ${}^3\text{He}$  в зазорах составлял 20–30 % от полного сигнала. Это, однако, не вызывало сложностей при интерпретации экспериментов, так как сложная текстура объемной В-фазы в этих зазорах приводила к тому, что основная часть сигнала от объемного  ${}^3\text{He}-B$  была сильно уширена и сдвинута от области, где наблюдались ли-



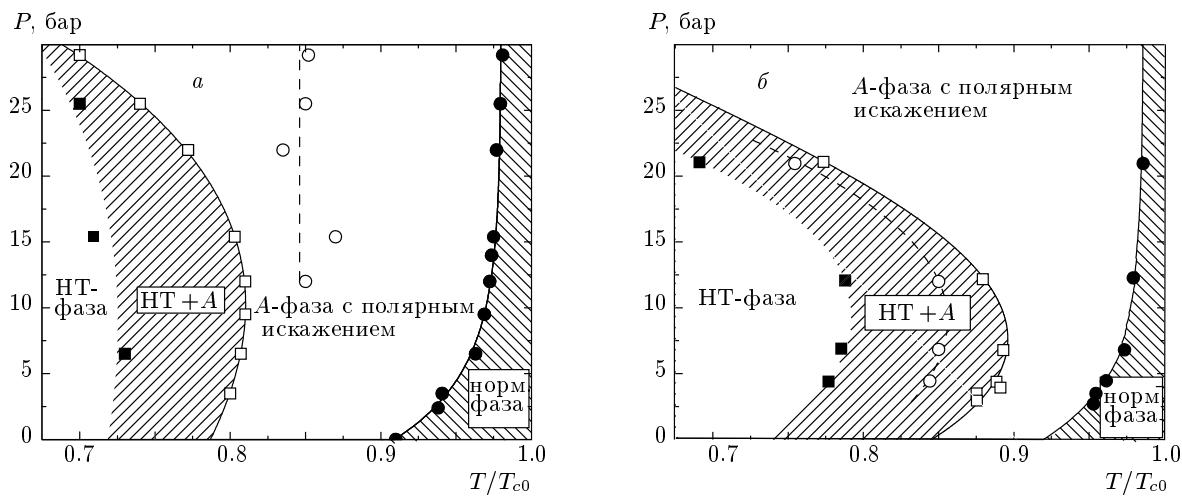
**Рис. 1.** Зависимость сдвига частоты непрерывного ЯМР  ${}^3\text{He}$  в образце 2 от ларморовского значения, полученная при охлаждении из нормальной фазы. Магнитное поле направлено вдоль оси анизотропии аэрогеля. Частота ЯМР равна 929 кГц ( $H \approx 286 \text{ Э}$ ),  $P = 6.9$  бар. ○ — положение линии ЯМР А-фазы с полярным искажением, ● — положение линии ЯМР низкотемпературной фазы

нии ЯМР от  ${}^3\text{He}$  в аэрогеле. Часть сигнала от объемного  ${}^3\text{He}-B$  все же оставалась вблизи ларморовского значения в виде характерного «скола» (см. ниже), что также не мешало анализу данных.

### 3.2. Эксперименты по непрерывному ЯМР

При охлаждении из нормальной фазы во всех образцах сначала наблюдался переход в А-фазу с полярным искажением (высокотемпературная фаза), а затем — переход первого рода в низкотемпературную сверхтекущую фазу (НТ-фазу), которая, как мы полагаем, является В-фазой с полярным искажением. Оба этих перехода были лучше всего видны при ориентации  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{u}$ , для которой сдвиг частоты ЯМР в обеих фазах был максимальен. Переход в НТ-фазу фиксировался по уменьшению интенсивности линии ЯМР от высокотемпературной фазы и одновременному появлению линии ЯМР от НТ-фазы, которая имела больший сдвиг частоты.

На рис. 1 приведена температурная зависимость сдвига частоты ЯМР, полученная для образца 2 при охлаждении из нормальной фазы при давлении 6.9 бар и ориентации поля вдоль нитей аэрогеля. При температуре  $T_{ca} \approx 0.97T_{c0}$  происходит сверхтекущий переход в А-фазу с полярным искажением, затем, при дальнейшем охлаждении, начинается пе-

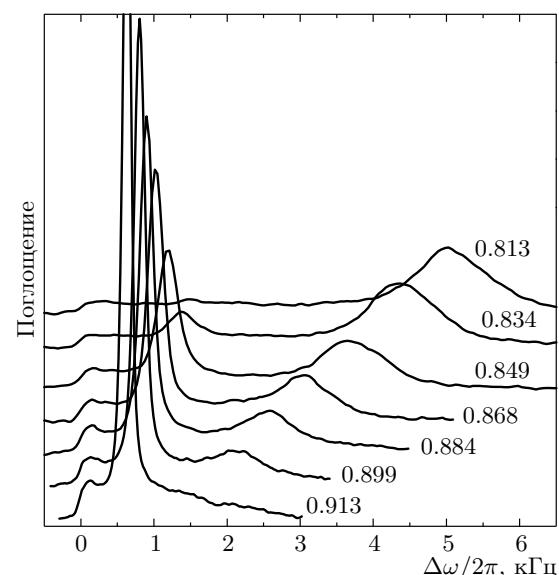


**Рис. 2.** Фазовые диаграммы  ${}^3\text{He}$  в образцах 1 (а) и 2 (б). Символами ● отмечены температуры сверхтекущего перехода, □ — температуры начала перехода из высокотемпературной фазы ( $A$ -фазы с полярным искажением) в  $\text{HT}$ -фазу при охлаждении, ■ — температуры завершения перехода из высокотемпературной фазы в  $\text{HT}$ -фазу при охлаждении, ○ — температуры начала обратного перехода из  $\text{HT}$ -фазы в высокотемпературную фазу при отогреве

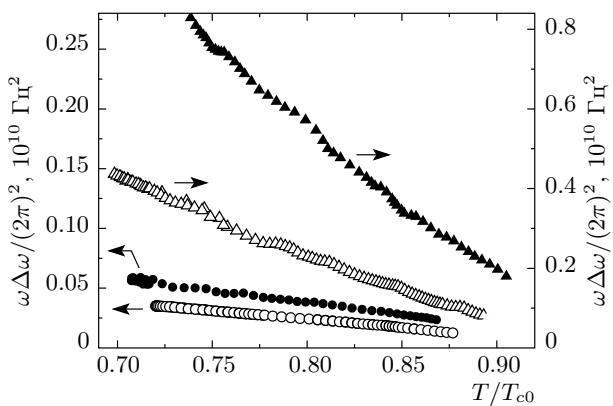
рекорд в  $\text{HT}$ -фазу, завершающийся при  $T \approx 0.78T_{c0}$ . Конечная ширина перехода в  $\text{HT}$ -фазу связана, видимо, с локальными неоднородностями аэрогеля. В результате в широком температурном интервале одновременно наблюдаются две линии ЯМР — от  $A$ -фазы с полярным искажением и от  $\text{HT}$ -фазы. Отметим, что точки для  $\text{HT}$ -фазы на рис. 1 простираются, начиная с  $T \approx 0.83T_{c0}$ , когда диапазон сканирования поля был расширен и линия  $\text{HT}$ -фазы попала в этот диапазон. Начало перехода в  $\text{HT}$ -фазу на самом деле происходит несколько раньше (при  $T \approx 0.89T_{c0}$ ), что видно по уменьшению интеграла от линии поглощения высокотемпературной фазы.

Фазовые диаграммы для образцов 1 и 2, полученные при охлаждении из нормальной фазы, приведены на рис. 2. При давлениях больших 10 бар обратный переход (при отогреве из  $\text{HT}$ -фазы в высокотемпературную фазу) был также четко различим. При меньших давлениях в районе обратного перехода ( $T \approx 0.9T_{c0}$ ) линии  $\text{HT}$ -фазы и возникающей высокотемпературной фазы имели почти одинаковые сдвиги частоты, что усложняло определение точной температуры начала и конца перехода. В работе [12] было отмечено, что при низких давлениях обратный переход, возможно, является переходом второго рода из  $\text{HT}$ -фазы в «чистую» полярную фазу, что, однако, остается пока только предположением.

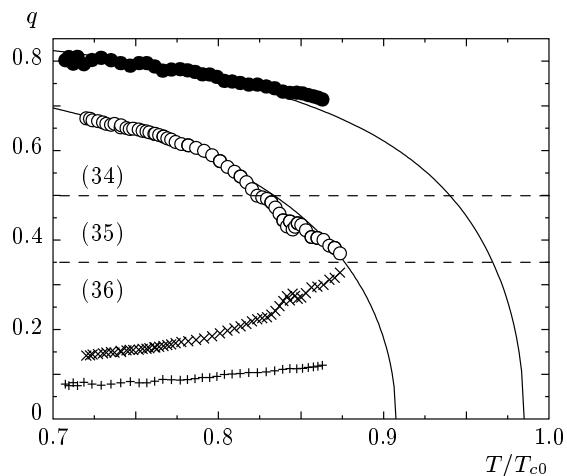
На рис. 3 приведены примеры линий поглощения непрерывного ЯМР  ${}^3\text{He}$  в образце 2, полученных при отогреве из  $\text{HT}$ -фазы в  $A$ -фазу с полярным искажением при ориентации магнитного поля вдоль нитей аэрогеля. Для наглядности линии смешены по вертикальной оси, и рядом с каждой кривой приведена температура в единицах  $T/T_{c0}$ . Линии были получены сканированием магнитного поля при фиксированной частоте накачки (971 кГц), но на рисунке ось абсцисс пересчитана в



**Рис. 3.** Линии поглощения непрерывного ЯМР  ${}^3\text{He}$  в образце 2, записанные при отогреве из  $\text{HT}$ -фазы в  $A$ -фазу с полярным искажением при ориентации магнитного поля вдоль нитей аэрогеля. Для наглядности линии смешены по вертикальной оси, и рядом с каждой кривой приведена температура в единицах  $T/T_{c0}$ . Линии были получены сканированием магнитного поля при фиксированной частоте накачки (971 кГц), но на рисунке ось абсцисс пересчитана в частотные единицы.  $P = 21.6$  бар



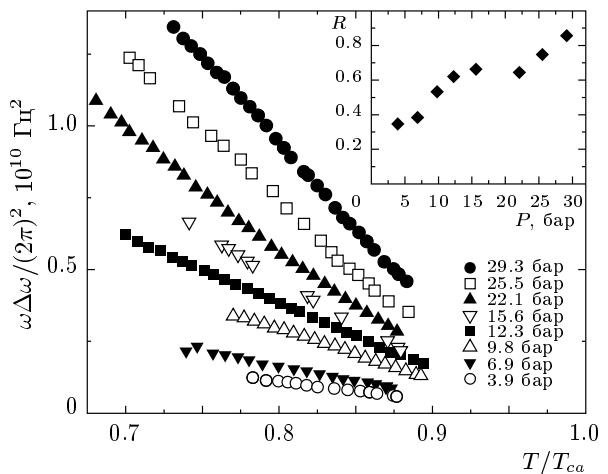
**Рис. 4.** Температурные зависимости сдвига частоты непрерывного ЯМР в НТ-фазе  $^3\text{He}$  в «упорядоченном» аэрогеле (образец 2), полученные при давлениях 6.9 бар ( $\bullet$ ,  $\blacktriangle$ ) и 21.6 бар ( $\circ$ ,  $\triangle$ ) для двух разных ориентаций  $\mathbf{H}$ . Поперечной ориентации поля соответствуют символы  $\bullet$ ,  $\circ$  и левая шкала ординат, а продольной — символы  $\blacktriangle$ ,  $\triangle$  и правая шкала ординат



**Рис. 5.** Температурные зависимости  $q$ , полученные из данных рис. 4. Подробное описание в тексте

ную фазу ( $A$ -фазу с полярным искажением). Со существование двух фаз наблюдается в диапазоне температур примерно от  $0.83T_{c0}$  до  $0.9T_{c0}$ . На всех кривых видна особенность («скол» на ларморовском значении и «пьедестал», высота которого уменьшается при повышении частоты), связанная с сигналом от объемной  $B$ -фазы.

Если магнитное поле направлено перпендикулярно нитям ( $\mathbf{H} \perp \mathbf{u}$ ), то в чистой  $B$ -фазе ( $q = 1$ ) сдвиг частоты непрерывного ЯМР равен нулю, но, как следует из выражения (31), в  $B$ -фазе с полярным искажением должен наблюдаться небольшой



**Рис. 6.** Температурные зависимости сдвига частоты ЯМР в НТ-фазе  $^3\text{He}$  в образце 1 для разных давлений. Вставка: зависимость отношения сдвигов частот в НТ-фазе и в чистой  $B$ -фазе от давления.

Подробное описание в тексте

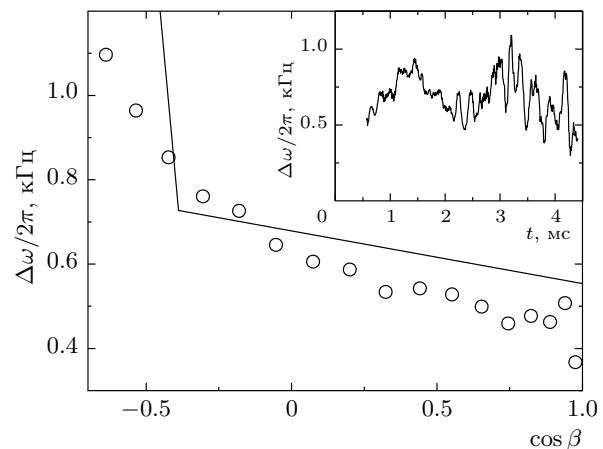
положительный сдвиг частоты. Именно такое поведение сдвига частоты ЯМР в НТ-фазе наблюдалось в наших образцах. На рис. 4 приведены температурные зависимости сдвига частоты непрерывного ЯМР в НТ-фазе, полученные при разных давлениях в образце 2 для двух направлений магнитного поля (вдоль и поперек нитей аэрогеля). Используя эти данные, из формул (34)–(36) можно определить температурную зависимость  $q$ . Точно совпадающих по температуре точек для поперечной и продольной ориентаций поля  $\mathbf{H}$  на рис. 4 нет. Поэтому значения  $C = C(T)$  вычислялись как отношение значений сдвига частоты для поперечной ориентации поля к значениям сдвига частоты для продольной ориентации поля, полученным аппроксимацией соответствующих экспериментальных данных полиномом. Результат такой обработки показан на рис. 5, где штриховыми линиями отделены (и соответственно обозначены) области применимости формул (34), (35) и (36). Отметим, что из наших экспериментальных данных для каждой температуры можно получить два значения  $q$ , удовлетворяющие уравнениям (34)–(36) и условиям их применимости. Эти значения на рис. 5 обозначены символами  $\bullet$ ,  $+$  для давления 21.6 бар и символами  $\circ$ ,  $\times$  для давления 6.9 бар. Как следует из выражений (6), (7), с повышением температуры полярное искажение должно увеличиваться (при этом величина  $q$  должна уменьшаться). Поэтому физический смысл имеют только точки, обозначенные символами  $\bullet$  и  $\circ$ . Отметим также, что если величина  $q$  известна, то из измеренного

значения сдвига частоты  $\Delta\omega_{\parallel}$  (или  $\Delta\omega_{\perp}$ ) на рис. 4 можно определить коэффициент  $D$  и оценить  $\Omega_B$ , т. е. леггеттовскую частоту для параметра порядка чистой  $B$ -фазы. Полученное значение  $\Omega_B$  не должно сильно отличаться от леггеттовской частоты  $\Omega_{B0}$  в объемной  $B$ -фазе, величина которой измерена в экспериментах (см., например, работу [22]). Если для оценки положить, что в области относительно низких температур  $K \approx 1$ , то отличие  $\Omega_B$  от  $\Omega_{B0}$  для точек, обозначенных символами  $\bullet$  и  $\circ$ , не превышает 20 %, в то время как для символов  $\times$  и  $+$  полученные таким образом значения  $\Omega_B$  при низких температурах на порядок превышают значения  $\Omega_{B0}$ .

Сплошными линиями на рис. 5 проведены аппроксимации точек  $\bullet$  и  $\circ$  уравнениями (6), (7) (со значениями  $\beta_{12}$  и  $\beta_{345}$  из работы [23]) с использованием двух подгоночных параметров ( $T_{cB}$  и  $\kappa$ ). В результате для давления 6.9 бар мы получили следующие значения этих параметров:  $T_{cB} = 0.91(\pm 0.02)T_{c0}$  и  $\kappa = -0.023(\pm 0.004)$ , в то время как для  $P = 21.6$  бар имеем  $T_{cB} \approx T_{ca} \approx 0.985T_{c0}$  и  $\kappa = -0.012(\pm 0.002)$ . Напомним, что эти значения получены в предположении пространственной однородности параметра порядка и поэтому являются оценочными. Следует, однако, отметить, что они согласуются с теоретическими оценками, приведенными в разд. 2.1.

Из выражений (6), (7) следует, что полярное искажение должно уменьшаться при уменьшении  $\xi_0$ , т. е. при повышении давления, что согласуется с рис. 5. Кроме того, это означает, что для  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{u}$  величина сдвига частоты ЯМР ( $\Delta\omega_{\parallel}$ ) при повышении давления должна становиться ближе к соответствующему значению в чистой  $B$ -фазе ( $\Delta\omega_{0\parallel}$ ). Измерения  $\Delta\omega_{\parallel}$  в широком диапазоне давлений были проведены в образце 1 и представлены на рис. 6. На вставке к рисунку приведена зависимость от давления отношения  $R$  величины  $\Delta\omega_{\parallel}$  при  $T = 0.75T_{ca}$  к  $\Delta\omega_{0\parallel}$  при  $T = 0.75T_{c0}$ . Видно, что  $R$  при повышении давления растет примерно от 0.35 до 0.86, т. е. величина сдвига частоты при больших давлениях и низких температурах стремится к значению, соответствующему чистой  $B$ -фазе. Отметим также, что магнитная восприимчивость НТ-фазы, определяемая как интеграл от линии поглощения ЯМР, в обоих образцах аэрогеля была меньше, чем в нормальной фазе, и убывала при понижении температуры. При этом уменьшение восприимчивости при переходе в НТ-фазу было заметно большим при высоких давлениях, чем в низких, что согласуется с формулой (12).

В заключение данного раздела отметим, что при



**Рис. 7.** Зависимость частоты сигнала свободной индукции от угла отклонения намагниченности в НТ-фазе (образец 2,  $\mathbf{u} \perp \mathbf{H}$ ). За частоту сигнала принималось среднее значение частоты за интервал времени от 0.6 до 0.8 мс после подачи отклоняющего импульса. Сплошные линии на рисунке проведены согласно уравнениям (31) и (33) в предположении  $q = 0.525$  (как следует из рис. 5). Вставка: зависимость частоты сигнала индукции от времени после импульса, отклоняющего вектор намагниченности на  $86^\circ$ . Частота ЯМР равна 379 кГц ( $H \approx 117$  Г).  $P = 6.9$  бар,  $T = 0.82T_{c0}$

$\mathbf{H} \perp \mathbf{u}$  величина сдвига частоты ЯМР практически не менялась при изменении ориентации поля в плоскости  $\hat{x}\hat{y}$ , т. е. средняя ориентация параметра порядка в этих условиях определяется магнитным полем.

### 3.3. Эксперименты по импульльному ЯМР

Импульсный ЯМР позволяет, в принципе, получить данные, позволяющие независимо определить значение  $q$ . Это можно сделать, например, измерив зависимость сдвига частоты от  $\beta$  в случае  $\mathbf{H} \perp \mathbf{u}$  или определив значение  $\beta$ , при котором происходит переход между решениями (31) и (33). К сожалению, в эксперименте этого сделать не удалось по следующим причинам. Во-первых, как видно из рис. 3, в области низких температур ширина линии ЯМР НТ-фазы превышает 1 кГц. Это, а также неоднородность радиочастотного поля приводят к тому, что длительность сигнала свободной индукции (ССИ) мала (около 1 мс), что сравнимо с мертвым временем приемной системы (около 0.5 мс). При этом характерное время продольной магнитной релаксации составляет несколько миллисекунд, т. е. видимая часть сигнала индукции уже не соответствует начальному углу отклонения намагниченности. Во-вторых, оказалось, что частота ССИ

НТ-фазы немонотонно меняется за время спада сигнала, причем амплитуда немонотонности может достигать нескольких сотен герц. Возможно это связано с «примешиванием» сигнала от объемной *B*-фазы или с искажениями текстуры параметра порядка на границах образца. По этим причинам частота ССИ определялась недостаточно точно.

На рис. 7 приведен пример зависимости частоты сигнала индукции от угла отклонения намагниченности, где за частоту ССИ принималось среднее значение частоты за интервал времени от 0.6 до 0.8 мс после подачи отклоняющего импульса. Сплошные линии на рисунке проведены согласно уравнениям (31) и (33) в предположении  $q = 0.525$  (как следует из рис. 5). На вставке к рисунку приведена зависимость частоты сигнала индукции от времени для импульса, отклоняющего вектор намагниченности на  $86^\circ$ , из которой видно, что результаты, представленные на основной части рисунка можно рассматривать только как качественные. Следует, однако, отметить, что представленная зависимость не противоречит теоретической модели: при увеличении  $\beta$  наблюдается плавный рост частоты, который ускоряется при больших углах.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана теоретическая модель сверхтекучей *B*-фазы с полярным искажением. Проведены эксперименты по непрерывному и импульльному ЯМР в низкотемпературной (НТ) сверхтекучей фазе  $^3\text{He}$  в «нематически упорядоченном» аэрогеле. Наблюдаемые свойства непрерывного ЯМР в этой фазе хорошо согласуются с теорией и позволили оценить величину полярного искажения параметра порядка *B*-фазы при разных давлениях и температурах. Это позволяет утверждать, что НТ-фаза действительно имеет параметр порядка *B*-фазы с полярным искажением. Результаты импульсного ЯМР согласуются с теорией только качественно, что может быть связано с рядом трудностей при проведении экспериментов.

Авторы признательны Р. Ш. Асхадуллину, П. Н. Мартынову, А. А. Осипову за предоставленные образцы аэрогеля и И. А. Фомину за полезные обсуждения результатов. Работа выполнена при частичной поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Квантовые мезоскопические и неупорядоченные структуры», РФФИ (гранты №№ 13-02-00674-а, 14-02-00054-а) и гранта Президента РФ (МК-6180.2014.2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. V. Porto and J. M. Parpia, Phys. Rev. Lett. **74**, 4667 (1995).
2. D. T. Sprague, T. M. Haard, J. B. Kycia et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 661 (1995).
3. B. I. Barker, Y. Lee, L. Polukhina et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 2148 (2000).
4. В. В. Дмитриев, В. В. Завьялов, Д. Е. Змеев и др., Письма в ЖЭТФ **76**, 371 (2002).
5. T. Kuniyatsu, T. Sato, K. Izumina et al., Письма в ЖЭТФ **86**, 244 (2007).
6. V. V. Dmitriev, D. A. Krasnikhin, N. Mulders et al., Письма в ЖЭТФ **91**, 669 (2010).
7. G. E. Volovik, J. Low Temp. Phys. **150**, 453 (2008).
8. J. I. A. Li, J. Pollanen, A. M. Zimmerman et al., Nature Phys. **9**, 775 (2013).
9. K. Aoyama and R. Ikeda, Phys. Rev. **B 73**, 060504 (2006).
10. R. Sh. Askhadullin, P. N. Martynov, P. A. Yudintsev et al., J. Phys.: Conf. Ser. **98**, 072012 (2008).
11. Р. Ш. Асхадуллин, В. В. Волков, В. В. Дмитриев и др., направлено в Письма в ЖЭТФ (2014).
12. R. Sh. Askhadullin, V. V. Dmitriev, D. A. Krasnikhin et al., Письма в ЖЭТФ **95**, 355 (2012).
13. I. A. Fomin, J. Phys. Chem. Sol. **66**, 1321 (2005).
14. I. A. Fomin and E. V. Surovtsev, Письма в ЖЭТФ **97**, 742 (2013).
15. E. V. Surovtsev and I. A. Fomin, J. Low Temp. Phys. **150**, 487 (2008).
16. I. A. Fomin, ЖЭТФ **145**, 871 (2014).
17. L. V. Levitin, R. G. Bennett, E. V. Surovtsev et al., Phys. Rev. Lett. **111**, 235304 (2013).
18. D. Vollhardt and P. Wölfle, *The Superfluid Phases of  $^3\text{He}$* , Taylor&Francis, London (1990).
19. I. A. Fomin, J. Low Temp. Phys. **31**, 509 (1978).
20. D. O. Clubb, O. V. L. Buu, R. M. Bowley et al., J. Low Temp. Phys. **136**, 1 (2004).
21. R. Blaauwgeers, M. Blazkova, M. Človečko et al., J. Low Temp. Phys. **146**, 537 (2007).
22. P. J. Hakonen, M. Krusius, M. M. Salomaa et al., J. Low Temp. Phys. **76**, 225 (1989).
23. H. Choi, J. P. Davis, J. Pollanen et al., Phys. Rev. **B 75**, 174503 (2007).