ЖЭТФ, 2014, том 145, вып. 2, стр. 356–368

К ТЕОРИИ ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫХ СВОЙСТВ КОМПОЗИТОВ

*Б. Я. Балагуров**

*Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 августа 2013 г.

Рассмотрена проводимость композитов в присутствии магнитного поля напряженности $\mathbf{H}$. Для слабонеоднородной среды гальваномагнитные характеристики найдены в явном виде в квадратичном по отклонениям тензора проводимости $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ от среднего значения $\langle\hat{\sigma}\rangle$ приближении. Для композита с малой концентрацией c включений линейный по c вклад в тензор эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ выражен через дипольную поляризуемость отдельного включения, определенную в преобразованной системе, где оно окружено изотропной матрицей со скалярной проводимостью. Переход к этой системе осуществляется с помощью преобразования симметрии, оставляющего неизменными уравнения постоянного тока. Для описания гальваномагнитных свойств композитов в широкой области изменения входящих в задачу параметров предложен приближенный подход, обобщающий стандартную теорию эффективной среды на случай анизотропных систем с включениями произвольной формы и $H \neq 0$.

DOI: 10.7868/S0044451014020163

1. ВВЕДЕНИЕ

К гальваномагнитным явлениям — совокупности эффектов, связанных с влиянием магнитного поля на электрические свойства проводников, — относятся, прежде всего, эффект Холла и магнитосопротивление. Измерение этих величин является одним из основных методов исследования свойств металлов и полупроводников. Подобные макроскопические эксперименты используются, например, для определения концентрации носителей тока, их подвижности и других микроскопических характеристик однородных по составу проводников [1].

В то же время для композитов интерпретация результатов измерения их гальваномагнитных характеристик представляет определенные трудности, что связано с отсутствием общей теории этих явлений для неоднородных сред. Теоретическое изучение этой проблемы должно, в идеале, выяснить, как зависят гальваномагнитные свойства системы в целом от ее структуры, концентрации и характеристик отдельных компонент. Знание таких зависимостей позволит понять, какую информацию можно получать из экспериментов по исследованию проводимости композитов как функции напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$.

Однако решение подобной задачи при такой общей постановке вряд ли возможно в полном объеме. Дело в том, что в этом случае к обычным трудностям принципиального порядка, обусловленным неупорядоченностью структуры композита, добавляется появление в задаче дополнительных (по сравнению с изотропной средой при $H = 0$) параметров. Во-первых, даже изначально изотропная среда при наложении магнитного поля становится одноосно-анизотропной. К наведенной омической анизотропии добавляется антисимметричная холловская составляющая тензора проводимости. Это обстоятельство делает задачу о гальваномагнитных свойствах композитов еще более сложной, чем и без того довольно трудная задача о проводимости композитов с естественной анизотропией. Тем не менее при некоторых упрощающих предположениях задача о гальваномагнитных свойствах композитов решалась в ряде работ [2–7] приближенными, как правило, методами.

В настоящей работе рассмотрены два предельных случая, когда решение задачи о гальваномагнитных свойствах композитов может быть найдено в достаточно общем виде. Для слабонеоднородной среды дана последовательная теория возмущений по степеням отклонения $\delta\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ локального тензора

*E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru,byabalagurov@mail.ru

проводимости $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ от своего среднего значения $\langle\hat{\sigma}\rangle$. В квадратичном по $\delta\hat{\sigma}$ приближении составляющие тензора $\hat{\sigma}_e$ найдены в достаточно общем виде в случае, когда соответствующая корреляционная функция изотропна. При этом оказалось, что коэффициенты в квадратичных по $\delta\hat{\sigma}$ поправках выражаются через величины, аналогичные коэффициентам деполяризации эллипсоида вращения. Показано, что при $H \to \infty$ исходно малый (при $H = 0$) параметр разложения теории возмущений неограниченно растет. Поэтому область применимости квадратичного приближения ограничена со стороны больших магнитных полей.

Для композитов с малой концентрацией c включений (произвольной, в отличие от [4], формы) предложен строгий подход в линейном по c приближении. С помощью преобразований симметрии, оставляющих неизменными уравнения постоянного тока, исходная задача приводится к задаче о включении, помещенном в изотропную среду без магнитного поля. В преобразованной системе (изоморфной исходной) у включения меняются как размер и форма, так и проводимость. Тем не менее, в этой системе может быть поставлена и, в принципе, решена задача о вычислении тензора дипольной поляризуемости $\hat{\tilde{\Lambda}}$ преобразованного включения. Искомая линейная по концентрации включений поправка в $\hat{\sigma}_e$ выражается через тензор $\hat{\tilde{\Lambda}}$.

Для описания гальваномагнитных свойств композитов при произвольных $\mathbf{H}$ и в широкой области изменения концентрации и других параметров в работе предложен приближенный подход — аналог так называемой теории эффективной среды (или метод EMA — Effective Medium Approximation) [8]. Предложенный подход обобщает метод EMA, используемый для вычисления гальваномагнитных характеристик сред с включениями в виде сфер [2, 3, 7], на случай композитов с включениями произвольной формы. Отмечено, что этот метод воспроизводит соответствующие результаты как для слабонеоднородной среды, так и в линейном по концентрации приближении.

В Приложении дан вывод (несколько отличающийся от вывода в работе [2]) выражения для напряженности электрического поля внутри включения сферической формы при наличии магнитного поля. Там же найден тензор дипольной поляризуемости для этого включения в преобразованной системе, что позволяет на этом точно решаемом примере убедиться в эквивалентности подходов, предложенных в [2, 3, 7] и в настоящей работе.

2. ТЕНЗОР ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Обсудим сначала постановку задачи и введем необходимые обозначения.

Задача о гальваномагнитных свойствах неоднородной среды ставится следующим образом. Для вычисления проводимости такой среды необходимо решить систему уравнений постоянного тока

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{1}$$

В линейной задаче плотность тока $\mathbf{j}$ связана с напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ законом Ома

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma}(\mathbf{r})\,\mathbf{E}, \tag{2}$$

где тензор $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ описывает зависящую от координат проводимость среды. Тензор эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ определяется с помощью соотношения

$$\langle\mathbf{j}\rangle = \hat{\sigma}_e\langle\mathbf{E}\rangle. \tag{3}$$

Здесь $\langle\ldots\rangle$ означает усреднение по объему V образца при $V \to \infty$.

Проводимость исходно изотропной среды, помещенной в магнитное поле напряженности $\mathbf{H}$, описывается антисимметричным тензором

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_a & 0 \\ -\sigma_a & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Здесь принято, что вектор $\mathbf{H}$ направлен по оси z. В целях упрощения последующих формул в (4) введены обозначения $\sigma_x = \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, $\sigma_z = \sigma_{zz}$ и $\sigma_a = \sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$ соответственно для поперечной, продольной и холловской составляющих тензора проводимости. В инвариантной записи тензор $\sigma_{\alpha\beta}(-\mathbf{H}) = \sigma_{\beta\alpha}(\mathbf{H})$ имеет вид

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_x\delta_{\alpha\beta} + (\sigma_z - \sigma_x)\,n_\alpha n_\beta + \sigma_a e_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma, \tag{5}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{H}/H$ и $e_{\alpha\beta\gamma}$ — единичный антисимметричный псевдотензор.

В слабом магнитном поле ($H \to 0$) величина σ_a линейна по H,

$$\sigma_a \propto H, \tag{6}$$

а поправки к σ_x и σ_z — квадратичны:

$$\begin{gathered} \sigma_x = \sigma + \gamma_x, \quad \sigma_z = \sigma + \gamma_z, \\ \gamma_\nu \propto H^2 \quad (\nu = x, z). \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь σ — проводимость среды при $H = 0$.

В сильных магнитных полях поведение составляющих тензора $\hat{\sigma}$ существенным образом зависит от формы поверхности ферми соответствующего проводника [1]. В дальнейшем для различных оценок будем использовать следующие модельные формулы [1]:

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{1+\beta^2}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma\beta}{1+\beta^2}, \quad \sigma_z = \sigma, \quad \beta \propto H, \tag{8}$$

где

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad \beta = \omega_H \tau, \quad \omega_H = \frac{eH}{mc}. \tag{9}$$

Здесь n — концентрация носителей тока, e — их заряд, m — масса носителей, c — скорость света, τ — время релаксации, ω_H — частота ларморовской прецессии. Из (8) находим асимптотическое поведение при $H \to \infty$ составляющих тензора $\hat{\sigma}$:

$$\begin{gathered} \sigma_x \approx \frac{\sigma}{\beta^2} \propto \frac{1}{H^2}, \quad \sigma_a \approx \frac{\sigma}{\beta} \propto \frac{1}{H}, \\ \sigma_z = \sigma \propto H^0. \end{gathered} \tag{10}$$

Подчеркнем, что согласно (10) продольная (вдоль направления $\mathbf{H}$) проводимость отдельных компонент не зависит от H.

Для бинарных композитов тензор проводимости $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ принимает постоянные значения $\hat{\sigma}_1$ и $\hat{\sigma}_2$ соответственно в первой и второй компонентах. Тензор эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$, определенный согласно (3), в этом случае зависит от следующих аргументов:

$$\hat{\sigma}_e = \hat{\sigma}_e\left(p; \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2\right). \tag{11}$$

Здесь p — безразмерная концентрация (доля занимаемого объема) первой компоненты. С учетом (4) имеем

$$\hat{\sigma}_e = \hat{\sigma}_e\left(p; \sigma_{1x}, \sigma_{1a}, \sigma_{1z}; \sigma_{2x}, \sigma_{2a}, \sigma_{2z}\right), \tag{12}$$

так что $\hat{\sigma}_e$ является функцией семи аргументов.

Вычисление трех многопараметрических функций σ_{ex}, σ_{ea}, σ_{ez} вида (12) является основной задачей теории гальваномагнитных свойств бинарных композитов. Однако, как уже отмечалось выше, задача определения этих величин во всей области изменения их аргументов аналитическими методами крайне сложна и вряд ли разрешима в полном объеме. Рассмотрим поэтому два предельных случая, когда эта задача может быть решена в достаточно общем виде.

3. СЛАБОНЕОДНОРОДНАЯ СРЕДА

Если отклонение $\delta\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ локального тензора проводимости $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ от его среднего значения $\langle\hat{\sigma}\rangle$ мало́, то для вычисления тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ такой среды может быть развита теория возмущений — разложение по степеням $\delta\hat{\sigma}$. При этом будем считать, что отклонение от среднего значения каждой из составляющих тензора $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ мало́, в то время как отличия их друг от друга сколь угодно велики, т. е. величина напряженности магнитного поля H произвольна.

Положив

$$\hat{\sigma}(\mathbf{r}) = \langle\hat{\sigma}\rangle + \delta\hat{\sigma}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{E}\rangle - \nabla\varphi(\mathbf{r}), \tag{13}$$

где $\langle\delta\hat{\sigma}\rangle = 0$ и $\langle\nabla\varphi\rangle = 0$, приведем систему (1), (2) к уравнению для потенциала $\varphi(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \langle\sigma_{\alpha\beta}\rangle \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha x_\beta} &= \frac{\partial\delta\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha}\langle E_\beta\rangle - \\ &- \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\delta\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r})\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial x_\beta}\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

При этом

$$\langle\mathbf{j}\rangle = \langle\hat{\sigma}\rangle\langle\mathbf{E}\rangle - \langle\delta\hat{\sigma}\nabla\varphi\rangle. \tag{15}$$

Здесь и выше $\langle\ldots\rangle$ — то же, что и в соотношении (3).

Для того чтобы найти разложение потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ по степеням $\delta\hat{\sigma}$, нужно перейти от дифференциального уравнения (14) к интегральному. Воспользуемся для этого функцией Грина $G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, определенной согласно

$$\langle\sigma_{\alpha\beta}\rangle \frac{\partial^2 G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{16}$$

Решая уравнение (16) с помощью фурье-преобразования, найдем

$$G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\int \frac{\exp\left[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right]}{\mathbf{k}\cdot\langle\hat{\sigma}\rangle\cdot\mathbf{k}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \tag{17}$$

Заметим, что холловская составляющая из выражения (17) выпадает, так что функция Грина $G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ имеет тот же вид, что и в аналогичной задаче без магнитного поля [9].

С помощью функции $G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ обычным образом переходим от дифференциального уравнения (14) к интегральному, которое после интегрирования по частям принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \langle E_\beta\rangle \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' - \\ &- \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}')\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}')}{\partial x'_\beta}\,d\mathbf{r}'. \end{aligned} \tag{18}$$

Уравнение (18) решаем итерациями — разложением по степеням $\delta\hat{\sigma}$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi^{(1)}(\mathbf{r}) + \varphi^{(2)}(\mathbf{r}) + \ldots, \tag{19}$$

где $\varphi^{(n)}(\mathbf{r})$ содержит n-ю степень $\delta\hat{\sigma}$.

В линейном по $\delta\hat{\sigma}$ приближении из (18) находим

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = \langle E_\beta\rangle \frac{\partial}{\partial x_\delta} \int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta\sigma_{\delta\beta}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'. \qquad (20)$$

В квадратичном по $\delta\hat{\sigma}$ приближении из (15) имеем

$$\langle j_\alpha\rangle = \langle\sigma_{\alpha\beta}\rangle\langle E_\beta\rangle - \left\langle \delta\sigma_{\alpha\gamma}\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x_\gamma}\right\rangle + \ldots \qquad (21)$$

Отсюда с использованием выражения (20) для $\varphi^{(1)}$ находим поправку второго порядка к $\hat{\sigma}_e$:

$$\left(\hat{\sigma}_e^{(2)}\right)_{\alpha\beta} = -\frac{1}{V}\int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}''\delta\sigma_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}') \times \\ \times \frac{\partial^2 G_0(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')}{\partial x'_\gamma \partial x'_\delta}\,\delta\sigma_{\delta\beta}(\mathbf{r}''). \qquad (22)$$

Положив $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' + \mathbf{r}$, приведем выражение (22) к виду

$$\left(\hat{\sigma}_e^{(2)}\right)_{\alpha\beta} = -\int K_{\alpha\gamma,\delta\beta}(\mathbf{r})\frac{\partial^2 G_0(\mathbf{r})}{\partial x_\gamma \partial x_\delta}\,d\mathbf{r}. \qquad (23)$$

Здесь

$$K_{\alpha\gamma,\delta\beta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V}\int \delta\sigma_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}')\delta\sigma_{\delta\beta}(\mathbf{r}'+\mathbf{r})\,d\mathbf{r}' \qquad (24)$$

— корреляционная функция ($V\to\infty$).

Продолжая решать уравнение (18) итерациями, нетрудно найти и высшие по $\delta\hat{\sigma}$ поправки к $\varphi(\mathbf{r})$ и $\hat{\sigma}_e$. При этом в кубичную поправку к $\hat{\sigma}_e$ входит корреляционная функция третьего порядка и т. д.

Переходя в формуле (23) к фурье-представлению для корреляционной и гриновской функций, получим

$$\left(\hat{\sigma}_e^{(2)}\right)_{\alpha\beta} = -\int K_{\alpha\gamma,\delta\beta}(-\mathbf{k})\frac{k_\gamma k_\delta}{\mathbf{k}\cdot\langle\hat{\sigma}\rangle\cdot\mathbf{k}}\,\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \qquad (25)$$

Формула (25), как и полученное в работе [10] аналогичное выражение, справедлива для произвольной слабонеоднородной среды. Однако в таком общем виде она, как и выражение (23), мало пригодна для практических целей. В то же время формуле (25) может быть придан достаточно простой и удобный для применения вид в важном частном случае изотропной корреляционной функции, когда $\hat{K}(\mathbf{r})$ зависит только от $r = |\mathbf{r}|$. При этом, как нетрудно видеть, от $k = |\mathbf{k}|$ зависит и фурье-образ $\hat{K}(\mathbf{k}) = \hat{K}(k)$. Это обстоятельство позволяет отделить в формуле (25) интегрирование по углам

$$\left(\hat{\sigma}_e^{(2)}\right)_{\alpha\beta} = -Q_{\gamma\delta}\int K_{\alpha\gamma,\delta\beta}(k)\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \qquad (26)$$

где

$$Q_{\gamma\delta} = \int \frac{m_\gamma m_\delta}{\mathbf{m}\cdot\langle\hat{\sigma}\rangle\cdot\mathbf{m}}\,\frac{do}{4\pi}. \qquad (27)$$

Здесь $\mathbf{m} = \mathbf{k}/k$, do — элемент телесного угла. Интеграл в (26) от $\hat{K}(k)$ равен $\hat{K}(\mathbf{r})$ при $\mathbf{r}=0$. Поэтому с учетом определения (24) имеем

$$\int K_{\alpha\gamma,\delta\beta}(k)\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \langle\delta\sigma_{\alpha\gamma}\delta\sigma_{\delta\beta}\rangle. \qquad (28)$$

В итоге в квадратичном по $\delta\hat{\sigma}$ приближении получаем

$$(\hat{\sigma}_e)_{\alpha\beta} = \langle\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\rangle - Q_{\gamma\delta}\langle\delta\sigma_{\alpha\gamma}\,\delta\sigma_{\delta\beta}\rangle + \ldots \qquad (29)$$

с матрицей $\hat{Q}$ из формулы (27).

Из выражения (27) холловская составляющая тензора $\langle\hat{\sigma}\rangle$ выпадает, так что величина $\hat{Q}$ совпадает с матрицей, введенной в аналогичной задаче о проводимости композитов с естественной анизотропией [9]. В главных осях тензора $\langle\hat{\sigma}\rangle$ матрица $\hat{Q}$ диагональна с элементами [9]

$$Q_\nu = \frac{n^{(\nu)}}{\langle\sigma_\nu\rangle} \quad (\nu = x, y, z), \qquad (30)$$

где $n^{(\nu)}$ — коэффициенты деполяризации эллипсоида с полуосями

$$a_\nu = \frac{1}{\sqrt{\langle\sigma_\nu\rangle}}. \qquad (31)$$

В данном случае $\langle\sigma_x\rangle = \langle\sigma_y\rangle \neq \langle\sigma_z\rangle$, так что имеем $a_x = a_y \neq a_z$, чему соответствует эллипсоид вращения (сфероид).

Из (29) с учетом (30) следует

$$\sigma_{ex} = \langle\sigma_x\rangle\left\{1 - n^{(x)}\left[\frac{\left\langle(\delta\sigma_x)^2\right\rangle}{(\langle\sigma_x\rangle)^2} - \frac{\left\langle(\delta\sigma_a)^2\right\rangle}{(\langle\sigma_x\rangle)^2}\right]\right\}, \quad (32)$$

$$\sigma_{ea} = \langle\sigma_a\rangle\left\{1 - 2n^{(x)}\,\frac{\langle\delta\sigma_x\delta\sigma_a\rangle}{\langle\sigma_x\rangle\langle\sigma_a\rangle}\right\}, \qquad (33)$$

$$\sigma_{ez} = \langle\sigma_z\rangle\left\{1 - n^{(z)}\,\frac{\left\langle(\delta\sigma_z)^2\right\rangle}{(\langle\sigma_z\rangle)^2}\right\}. \qquad (34)$$

Выражения (32)–(34) справедливы для слабонеоднородной среды с изотропной корреляционной функцией.

Если $\langle\sigma_x\rangle = \langle\sigma_y\rangle < \langle\sigma_z\rangle$, так что $a_x = a_y > a_z$, то коэффициенты деполяризации $n^{(\nu)}$ отвечают сплюснутому сфероиду, для которого [11]

$$n^{(z)} = \frac{1+\epsilon^2}{\epsilon^3}\left(\epsilon - \operatorname{arctg}\epsilon\right), \quad \epsilon = \sqrt{\frac{\langle\sigma_z\rangle}{\langle\sigma_x\rangle} - 1}, \qquad (35)$$

$$n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{1}{2}\left(1 - n^{(z)}\right). \qquad (36)$$

При $\langle\sigma_x\rangle/\langle\sigma_z\rangle \ll 1$ имеем

$$n^{(z)} \approx 1 - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\langle\sigma_x\rangle}{\langle\sigma_z\rangle}}, \quad n^{(x)} = n^{(y)} \approx \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\langle\sigma_x\rangle}{\langle\sigma_z\rangle}}. \quad (37)$$

Пусть составляющие тензора $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ имеют вид (8), причем для простоты будем считать, что параметр β не зависит от координат. Тогда при $\beta \gg 1$ величина σ_{ex} из (32) с учетом выражения (37) для $n^{(x)}$ примет вид

$$\sigma_{ex} \approx \frac{\langle\sigma\rangle}{\beta^2}\left(1 + \beta\delta^2\right), \qquad (38)$$

где

$$\delta^2 = \frac{\pi}{4}\frac{\left\langle(\delta\sigma)^2\right\rangle}{\left(\langle\sigma\rangle\right)^2} \ll 1. \qquad (39)$$

Из (38) в согласии с [12] следует, что при $\beta\delta^2 > 1$ поправка к величине σ_{ex} велика (у составляющих σ_{ea} и σ_{ez} тензора $\hat{\sigma}_e$ таких аномалий нет). В этом случае необходимо суммировать весь ряд теории возмущений, так как соответствующий параметр разложения $\beta\delta^2$ неограниченно растет при $\beta \to \infty$. Анализ ряда теории возмущений, проведенный в работе [12], привел к результату $\sigma_{ex} \propto \beta^{-4/3}$. В разд. 5 эта задача будет рассмотрена в рамках приближения эффективной среды.

4. ЛИНЕЙНОЕ ПО КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Задача о гальваномагнитных свойствах композитов может быть решена в достаточно общем виде также при малой концентрации N включений, когда можно ограничиться линейным по N приближением.

Рассмотрим бинарный композит, состоящий из матрицы с тензором проводимости $\hat{\sigma}_1$ и малой концентрации включений второй компоненты (с тензором проводимости $\hat{\sigma}_2$) произвольной формы. Для вычисления тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ такой системы усредним, как и в [11], вектор $\mathbf{j} - \hat{\sigma}_1\mathbf{E}$ по объему V образца (при $V \to \infty$). В результате придем к соотношению

$$(\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_1)\langle\mathbf{E}\rangle = -N(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)\int\limits_v \mathbf{E}\,dV, \qquad (40)$$

где N — размерная концентрация включений (их число в единице объема). Интегрирование в (40) проводится по объему включения, причем при хаотической ориентации включений нужно провести усреднение по углам. Как показано в работе [13], в сходной задаче о проводимости композитов с естественной анизотропией подобный интеграл может быть выражен через дипольную поляризуемость некоторого преобразованного включения. Аналогичная операция может быть осуществлена и в рассматриваемой задаче.

Прежде всего отметим, что согласно [14] уравнения постоянного тока (1) сохраняют свой вид при преобразовании

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}', \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}' + \hat{C}\mathbf{E}', \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}', \qquad (41)$$

где $\hat{C}$ — независящий от координат произвольный антисимметричный тензор: $C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha}$. При этом тензор проводимости «штрихованной» системы принимает вид

$$\hat{\sigma}'(\mathbf{r}') = \hat{\sigma}(\mathbf{r}) - \hat{C}. \qquad (42)$$

Аналогичным соотношением связаны тензоры эффективной проводимости исходной и штрихованной систем,

$$\hat{\sigma}_e = \hat{\sigma}'_e + \hat{C}. \qquad (43)$$

Положим $\hat{C} = \hat{\sigma}_{1a}$, где $\hat{\sigma}_{1a}$ — антисимметричная (холловская) часть тензора проводимости первой компоненты (матрицы) $\hat{\sigma}_1$. В этом случае в тензоре $\hat{\sigma}'_1$ холловская составляющая отсутствует и матрица штрихованной системы аналогична среде с одноосной естественной анизотропией. В то же время у тензора $\hat{\sigma}'_2$ антисимметричная часть имеет вид

$$\hat{\sigma}'_{2a} = \hat{\sigma}_{2a} - \hat{\sigma}_{1a}. \qquad (44)$$

Проведем теперь, как и в работе [13], следующие преобразования координат, плотности тока и напряженности электрического поля штрихованной системы:

$$\begin{gathered} x' = \widetilde{x}, \quad y' = \widetilde{y}, \quad z' = \lambda\widetilde{z}, \\ j'_x = \widetilde{j}_x, \quad j'_y = \widetilde{j}_y, \quad j'_z = \lambda\widetilde{j}_z, \\ E'_x = \lambda\widetilde{E}_x, \quad E'_y = \lambda\widetilde{E}_y, \quad E'_z = \widetilde{E}_z. \end{gathered} \qquad (45)$$

При параметре

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma_{1z}}{\sigma_{1x}}} \qquad (46)$$

матрица в преобразованной системе становится изотропной с законом Ома

$$\widetilde{\mathbf{j}}_1 = \sqrt{\sigma_{1x}\sigma_{1z}}\,\widetilde{\mathbf{E}}_1, \qquad (47)$$

так что потенциал $\widetilde{\varphi}_1$ в первой компоненте удовлетворяет уравнению Лапласа. Для составляющих тензора проводимости $\hat{\tilde{\sigma}}_2$ преобразованного включения получаем

$$\tilde{\sigma}_{2x} = \lambda\sigma_{2x}, \quad \tilde{\sigma}_{2a} = \lambda\left(\sigma_{2a} - \sigma_{1a}\right), \quad \tilde{\sigma}_{2z} = \frac{1}{\lambda}\sigma_{2z}. \tag{48}$$

При преобразовании (45) меняются также геометрические характеристики включения.

В полученной системе с изотропной матрицей может быть поставлена и, в принципе, решена задача о вычислении тензора дипольной поляризуемости $\hat{\tilde{\Lambda}}$ преобразованного включения, определенного по соотношению

$$\tilde{\mathbf{p}} = \hat{\tilde{\Lambda}}\,\tilde{\mathbf{E}}_0. \tag{49}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{p}}$ — дипольный момент преобразованного включения, $\tilde{\mathbf{E}}_0$ — напряженность электрического поля вдали от включения.

Связь интеграла, входящего в равенство (40), с тензором дипольной поляризуемости включения может быть установлена следующим образом. Рассмотрим задачу о макроскопическом теле с тензорной диэлектрической проницаемостью $\hat{\varepsilon}$, находящемся в вакууме и помещенном в однородное электрическое поле напряженности $\mathbf{E}_0$. Для такого тела (произвольной формы и объема v) обычным образом может быть определен дипольный момент $\mathbf{p} = \hat{\Lambda}\mathbf{E}_0$:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_v \left(\mathbf{D} - \mathbf{E}\right)\,dV = \frac{\hat{\varepsilon} - \hat{1}}{4\pi}\int\limits_v \mathbf{E}\,dV, \tag{50}$$

откуда

$$\int\limits_v \mathbf{E}\,dV = 4\pi\left(\hat{\varepsilon} - \hat{1}\right)^{-1}\mathbf{p} = 4\pi\left(\hat{\varepsilon} - \hat{1}\right)^{-1}\hat{\Lambda}\mathbf{E}_0. \tag{51}$$

Возвращаясь к задаче о проводимости, для преобразованной системы с учетом замены $\hat{\varepsilon} \to \hat{\tilde{\sigma}}_2/\sqrt{\sigma_{1x}\sigma_{1z}}$ имеем

$$\int\limits_{\tilde{v}} \tilde{\mathbf{E}}\,d\tilde{V} = 4\pi\left(\frac{\hat{\tilde{\sigma}}_2}{\sqrt{\sigma_{1x}\,\sigma_{1z}}} - \hat{1}\right)^{-1}\hat{\tilde{\Lambda}}\tilde{\mathbf{E}}_0. \tag{52}$$

В выражениях (50)–(52) $\hat{1}$ — единичный диагональный тензор: $(\hat{1})_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. При хаотически ориентированных включениях обе части равенства (52) нужно усреднить по углам.

После усреднения тензор $\overline{\hat{\tilde{\Lambda}}}$ имеет такой же вид, как и для сферического включения (ср. с выражением (A.55) в Приложении) с составляющими $\overline{\tilde{\Lambda}}_x$, $\overline{\tilde{\Lambda}}_a$, $\overline{\tilde{\Lambda}}_z$. В этом случае из равенства (52) с учетом (45)–(48) находим

$$\int\limits_v E_x\,dV = -\frac{4\pi\lambda\sigma_{1x}}{\mathcal{D}} \times \left\{\left[\left(\sigma_{1x} - \sigma_{2x}\right)\overline{\tilde{\Lambda}}_x + \left(\sigma_{1a} - \sigma_{2a}\right)\overline{\tilde{\Lambda}}_a\right] E_{0x} + \left[\left(\sigma_{1x} - \sigma_{2x}\right)\overline{\tilde{\Lambda}}_a - \left(\sigma_{1a} - \sigma_{2a}\right)\overline{\tilde{\Lambda}}_x\right] E_{0y}\right\}, \tag{53}$$

$$\int\limits_v E_y\,dV = -\frac{4\pi\lambda\,\sigma_{1x}}{\mathcal{D}} \times \left\{\left[\left(\sigma_{1a} - \sigma_{2a}\right)\overline{\tilde{\Lambda}}_x - \left(\sigma_{1x} - \sigma_{2x}\right)\overline{\tilde{\Lambda}}_a\right] E_{0x} + \left[\left(\sigma_{1x} - \sigma_{2x}\right)\overline{\tilde{\Lambda}}_x + \left(\sigma_{1a} - \sigma_{2a}\right)\overline{\tilde{\Lambda}}_a\right] E_{0y}\right\}, \tag{54}$$

где

$$\mathcal{D} = \left(\sigma_{1x} - \sigma_{2x}\right)^2 + \left(\sigma_{1a} - \sigma_{2a}\right)^2, \tag{55}$$

и

$$\int\limits_v E_z\,dV = -4\pi\lambda\,\frac{\sigma_{1z}}{\sigma_{1z} - \sigma_{2z}}\,\overline{\tilde{\Lambda}}_z. \tag{56}$$

В рассматриваемом приближении величину $\mathbf{E}_0$ в (53), (54) и (56) следует отождествить со средним по объему образца значением напряженности электрического поля $\langle\mathbf{E}\rangle$.

Подстановка (53)–(56) в равенство (40) приводит к следующим результатам:

$$\sigma_{ex} = \sigma_{1x}\left(1 + 4\pi\lambda\,N\overline{\tilde{\Lambda}}_x\right), \tag{57}$$

$$\sigma_{ea} = \sigma_{1a}\left(1 + 4\pi\lambda\,N\frac{\sigma_{1x}}{\sigma_{1a}}\,\overline{\tilde{\Lambda}}_a\right), \tag{58}$$

$$\sigma_{ez} = \sigma_{1z}\left(1 + 4\pi\lambda\,N\overline{\tilde{\Lambda}}_z\right). \tag{59}$$

Выражения (57)–(59) еще более упрощаются после введения безразмерного тензора дипольной поляризуемости $\overline{\hat{\tilde{\alpha}}}$ согласно

$$\overline{\hat{\tilde{\Lambda}}} = \tilde{v}\overline{\hat{\tilde{\alpha}}}, \tag{60}$$

где $\tilde{v}$ — объем преобразованного включения. В этом случае из (57)–(59) получаем

$$\sigma_{ex} = \sigma_{1x}\left(1 + 4\pi c\overline{\tilde{\alpha}}_x\right), \tag{61}$$

$$\sigma_{ea} = \sigma_{1a}\left(1 + 4\pi c\frac{\sigma_{1x}}{\sigma_{1a}}\overline{\tilde{\alpha}}_a\right), \tag{62}$$

$$\sigma_{ez} = \sigma_{1z}\left(1 + 4\pi c\overline{\tilde{\alpha}}_z\right), \tag{63}$$

где $c = vN$ — безразмерная концентрация (доля занимаемого объема) включений, $v = \lambda\tilde{v}$ — исходный объем включения.

Формулы (57)–(59) или (61)–(63) дают искомые точные выражения для составляющих тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ в линейном по концентрации включений приближении. Если форма исходного включения отлична от сферической, то тензор дипольной поляризуемости преобразованного включения может быть определен, например, численными методами.

Если не ограничиваться линейным по c приближением, то следует отметить следующее. Для бинарного композита преобразование (45), (46) первую компоненту превращает в омически изотропную ($\widetilde{\sigma}_{1x} = \widetilde{\sigma}_{1y} = \widetilde{\sigma}_{1z}$), но с ненулевой холловской составляющей тензора $\hat{\widetilde{\sigma}}_{1a}$. При этом потенциал $\widetilde{\varphi}_1$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Если включения второй компоненты диэлектрические, то они остаются таковыми и в преобразованной системе. В этом случае достаточно ограничиться внешней задачей с граничным условием $\widetilde{j}_n = 0$ на поверхности преобразованных включений. Подобная задача отличается от стандартной изотропной при $H = 0$ только тем, что в граничное условие входит холловская составляющая $\widetilde{\sigma}_{1a}$.

Для полноты картины заметим также, что в случае идеально проводящих включений переход к штрихованной системе (41) не меняет их свойств и по-прежнему $\hat{\sigma}'_2 = \infty$. Поэтому в этой системе получаем задачу, аналогичную задаче о проводимости композита с естественной одноосной анизотропией, которая может быть сведена к изотропной [15]. При этом усреднение равенств (41) по объему образца приводит к выводу, что для композита с идеально проводящими включениями $\sigma_{ea} = \sigma_{1a}$ [14].

5. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ СРЕДЫ

Для количественной оценки гальваномагнитных характеристик композитов в широкой области изменения концентрации и других параметров воспользуемся методом EMA, обобщенным на случай включений произвольной формы и $H \neq 0$. Для вывода основных уравнений этого метода в задаче о гальваномагнитных свойствах n-компонентного композита усредним вектор $\mathbf{J} = \mathbf{j} - \hat{\sigma}_e \mathbf{E}$ по объему V образца (при $V \to \infty$). С одной стороны,

$$\langle \mathbf{j} - \hat{\sigma}_e \mathbf{E} \rangle = -\sum_{i=1}^{n} (\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_i) \frac{1}{V} \int\limits_{V_i} \mathbf{E}\, dV, \qquad (64)$$

где $\hat{\sigma}_i$ — тензор проводимости i-й компоненты; интегрирование в (64) проводится по ее объему V_i. Поскольку, с другой стороны, среднее от $\mathbf{j} - \hat{\sigma}_e \mathbf{E}$ равно нулю, тождество (64) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} N_i (\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_i) \overline{\left\{ \int\limits_{v} \mathbf{E}\, dV \right\}_i} = 0. \qquad (65)$$

Здесь N_i — размерная концентрация i-й компоненты; интегрирование в (65) проводится по объемам отдельных включений этой компоненты, Под $\overline{\{\ldots\}_i}$ понимается усреднение по всем включениям i-й компоненты.

Приближение метода EMA состоит в замене величины $\overline{\{\ldots\}_i}$ в формуле (65) на интеграл от напряженности электрического поля внутри некоторого среднего i-го включения, помещенного в матрицу («эффективную среду») с тензором проводимости $\hat{\sigma}_e$. В результате такой замены из (65) получаем исходное уравнение метода EMA:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_i) \langle \mathbf{E} \rangle_i = 0, \qquad (66)$$

где $c_i = \overline{v}_i N_i$ — безразмерная концентрация i-й компоненты и

$$\langle \mathbf{E} \rangle_i = \frac{1}{\overline{v}_i} \int\limits_{\overline{v}_i} \mathbf{E}\, dV. \qquad (67)$$

Здесь через $\overline{v}_i$ обозначен объем среднего включения i-й компоненты.

Рассмотрим такой же бинарный композит, как и в разд. 4, при немалой концентрации. В этом случае «включения» первой компоненты (матрицы) могут иметь самый разнообразный вид. Форма среднего включения этой компоненты задается геометрией (структурой) композита. Для структурно-изотропной системы, рассмотрением которой ограничимся, в качестве такого включения следует выбрать наиболее симметричную фигуру — сферу. Такой выбор продиктован также и тем, что в этом случае напряженность электрического поля внутри такого включения может быть найдена в аналитическом виде (см. Приложение).

Согласно формуле (A.48) из Приложения, электрическое поле внутри сферического включения однородно и для его напряженности имеем

$$\mathbf{E}_1 = \hat{W}^{(1)} \mathbf{E}_0, \qquad (68)$$

где $\mathbf{E}_0$ — напряженность внешнего однородного электрического поля. Для рассматриваемой задачи тензор $\hat{\sigma}^{(e)}$ в формулах (A.50)–(A.53) следует заменить на $\hat{\sigma}_e$, а $\hat{\sigma}^{(i)}$ — на $\hat{\sigma}_1$, так что

$$W_x^{(1)} = \sigma_{ex} \left[\sigma_{ex} - (\sigma_{ex} - \sigma_{1x})\, n^{(x)} \right] \Delta_1^{-1}, \qquad (69)$$

$$W_a^{(1)} = \sigma_{ex} n^{(x)} \left(\sigma_{ea} - \sigma_{1a}\right) \Delta_1^{-1}, \tag{70}$$

$$W_z^{(1)} = \frac{\sigma_{ez}}{\sigma_{ez} - \left(\sigma_{ez} - \sigma_{1z}\right) n^{(z)}}. \tag{71}$$

В выражениях (69) и (70)

$$\Delta_1 = \left[\sigma_{ex} - \left(\sigma_{ex} - \sigma_{1x}\right) n^{(x)}\right]^2 + \\ + \left[\left(\sigma_{ea} - \sigma_{1a}\right) n^{(x)}\right]^2. \tag{72}$$

При $\sigma_{1x} = \sigma_{1y} < \sigma_{1z}$ коэффициенты деполяризации $n^{(\nu)}$ имеют вид (35), (36) с заменой величины ϵ на

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\sigma_{ez}}{\sigma_{ex}} - 1}. \tag{73}$$

Величину $\langle \mathbf{E} \rangle_2$ выразим, как и в разд. 4, через тензор дипольной поляризуемости $\hat{\tilde{\Lambda}}$ преобразованного включения. Переход к такому включению происходит с помощью преобразований (41) и (45) с параметром

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma_{ez}}{\sigma_{ex}}}. \tag{74}$$

В этом случае соответствующие интегралы от $\mathbf{E}$ по объему включения даются выражениями (53)–(56) с заменами $\sigma_{1x} \to \sigma_{ex}$, $\sigma_{1a} \to \sigma_{ea}$, $\sigma_{1z} \to \sigma_{ez}$. Подставляя эти интегралы и величину (68) в векторное уравнение (66), получим искомую систему уравнений обобщенного метода EMA:

$$p\left[\left(\sigma_{ex} - \sigma_{1x}\right) W_x^{(1)} - \left(\sigma_{ea} - \sigma_{1a}\right) W_a^{(1)}\right] - \\ - 4\pi c \sigma_{ex} \overline{\overline{\alpha}}_x = 0, \tag{75}$$

$$p\left[\left(\sigma_{ex} - \sigma_{1x}\right) W_a^{(1)} + \left(\sigma_{ea} - \sigma_{1a}\right) W_x^{(1)}\right] - \\ - 4\pi c \sigma_{ex} \overline{\overline{\alpha}}_a = 0, \tag{76}$$

$$p\left(\sigma_{ez} - \sigma_{1z}\right) W_z^{(1)} - 4\pi c \sigma_{ez} \overline{\overline{\alpha}}_z = 0 \tag{77}$$

с $W_x^{(1)}$, $W_a^{(1)}$, $W_z^{(1)}$ из (69)–(72). Уравнения (75)–(77) справедливы для бинарного композита с включениями произвольной формы. Нетрудно видеть, что в линейном по концентрации c приближении из них следуют выражения (61)–(63).

Заметим, что уравнения (75)–(77) могут быть представлены также в следующем эквивалентном виде:

$$p\left(W_x^{(1)} - 1\right) - 4\pi c n^{(x)} \overline{\overline{\alpha}}_x = 0, \tag{78}$$

$$p W_a^{(1)} - 4\pi c n^{(x)} \overline{\overline{\alpha}}_a = 0, \tag{79}$$

$$p\left(W_z^{(1)} - 1\right) - 4\pi c n^{(z)} \overline{\overline{\alpha}}_z = 0. \tag{80}$$

В частном случае сферических включений, рассмотренном в работах [2, 3, 7], соответствующие уравнения можно записать в более компактном матричном виде:

$$\sum_i c_i \hat{W}^{(i)} = \hat{1}, \tag{81}$$

где элементы матрицы $\hat{W}^{(i)}$ получаются из (69)–(72) заменой индекса 1 на i.

Для случайно-неоднородной среды с изотропной структурой в качестве среднего «включения» каждой из компонент следует выбрать сферы. Поэтому в приближении метода EMA для такой среды также получаем уравнение (81), где число компонент может быть не ограничено. Наконец, для среды с непрерывной зависимостью гальваномагнитных характеристик от координат вместо (81) имеем

$$\left\langle \hat{W} \right\rangle = \hat{1}, \tag{82}$$

или

$$\langle W_x \rangle = 1, \quad \langle W_a \rangle = 0, \quad \langle W_z \rangle = 1. \tag{83}$$

Усреднение в (82), (83) ведется по объему или по ансамблю. Величины $W_x(\mathbf{r})$, $W_a(\mathbf{r})$, $W_z(\mathbf{r})$ получаются из (69)–(72) заменами $\sigma_{1x} \to \sigma_x(\mathbf{r})$, $\sigma_{1a} \to \sigma_a(\mathbf{r})$, $\sigma_{1z} \to \sigma_z(\mathbf{r})$. Можно убедиться, что для слабонеоднородной среды в квадратичном по отклонениям от средних значений приближении из уравнений (83) следуют выражения (32)–(34).

Однако, как отмечено в разд. 3, это приближение становится неприменимым в достаточно больших магнитных полях. Это касается только величины σ_{ex}, поправка к которой неограниченно растет при $H \to \infty$. В то же время поправки к σ_{ea} и σ_{ez} при $H \to \infty$ исчезают, так что достаточно положить $\sigma_{ea} = \langle \sigma_a \rangle$ и $\sigma_{ez} = \langle \sigma_z \rangle$. В этом случае из первого уравнения (83) с нужной точностью получаем следующее разложение:

$$\left(\sigma_{ex}\right)^2 - \langle \sigma_x \rangle \sigma_{ex} - \left\langle \left(\sigma_{ea} - \sigma_a\right)^2 \right\rangle n^{(x)} = 0. \tag{84}$$

Здесь в качестве $n^{(x)}$ вместо (37) следует взять выражение

$$n^{(x)} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\sigma_{ex}}{\langle \sigma_z \rangle}} \tag{85}$$

и положить $\sigma_{ea} = \langle \sigma_a \rangle$. В результате уравнение (84) принимает вид

$$\sqrt{\langle \sigma_z \rangle \sigma_{ex}^3} - \sqrt{\langle \sigma_z \rangle \sigma_{ex}} \langle \sigma_x \rangle - \frac{\pi}{4} \left\langle \left(\delta \sigma_a\right)^2 \right\rangle = 0. \tag{86}$$

Так как для модельных формул (8)

$$\begin{gathered}\langle\sigma_z\rangle=\langle\sigma\rangle,\quad \langle\sigma_x\rangle=\frac{\langle\sigma\rangle}{\beta^2},\\ \left\langle(\delta\sigma_a)^2\right\rangle=\frac{\left\langle(\delta\sigma)^2\right\rangle}{\beta^2},\end{gathered}\tag{87}$$

то, введя функцию χ согласно

$$\sigma_{ex}=\frac{\langle\sigma\rangle}{\beta^2}\,\chi^2,\tag{88}$$

получим уравнение

$$\chi^3-\chi-\beta\delta^2=0,\quad \delta^2=\frac{\pi}{4}\,\frac{\left\langle(\delta\sigma)^2\right\rangle}{(\langle\sigma\rangle)^2}.\tag{89}$$

Здесь δ^2 — то же, что и в (39). Формулы (88) и (89) выведены при $\delta^2\ll 1$ и $\beta\gg 1$; считается, что β не зависит от координат.

При малом параметре $\beta\delta^2\ll 1$ имеем

$$\chi=1+\beta\delta^2/2+\ldots,\tag{90}$$

так что для σ_{ex} получаем результат (38). Напротив, при большой величине $\beta\delta^2\gg 1$ из уравнения (89) находим

$$\chi=\left(\beta\delta^2\right)^{1/3}.\tag{91}$$

В этом предельном случае для σ_{ex} получаем выражение [16]

$$\sigma_{ex}=\langle\sigma\rangle\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^{4/3},\tag{92}$$

что по порядку величины совпадает с оценкой, данной для величины σ_{ex} в рамках метода EMA [2] и с помощью анализа ряда теории возмущений [12].

Для включений, обладающих отличной от сферической формой, определение тензора поляризуемости $\hat{\hat{\alpha}}$ в каждом конкретном случае представляет собой самостоятельную задачу. Величина $\hat{\hat{\alpha}}$ зависит как от формы включения, так и от составляющих тензоров проводимости внешней и внутренней областей. Столь сложная задача должна решаться, вообще говоря, численными (компьютерными) методами. При этом предложенный в настоящей работе подход оказывается особенно удобным при изучении композитов с диэлектрическими включениями. В этом случае проблема определения тензора $\hat{\hat{\alpha}}$ значительно упрощается, так как при ее решении можно ограничиться рассмотрением внешней задачи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сферическое включение в магнитном поле

1. Рассмотрим включение сферической формы проводимости $\sigma^{(i)}$, находящееся в среде (матрице) проводимости $\sigma^{(e)}$. Если на эту систему наложено магнитное поле напряженности $\mathbf{H}$, направленное вдоль оси z, то в этом случае проводимости обеих компонент описывается тензорами $\hat{\sigma}^{(e)}$ и $\hat{\sigma}^{(i)}$ вида (4). Рассматриваемая система помещается во внешнее однородное электрическое поле напряженности $\mathbf{E}_0$. Требуется найти напряженность $\mathbf{E}^{(i)}$ внутри включения.

Для решения поставленной задачи нужно предварительно перейти к системе, в которой включение окружено матрицей с изотропной (скалярной) проводимостью. Для этого сначала перейдем к «штрихованной» системе согласно (41), где положим $\hat{C}=\hat{\sigma}_a^{(e)}$. Здесь $\hat{\sigma}_a^{(e)}$ — антисимметричная (холловская) часть тензора проводимости матрицы $\hat{\sigma}^{(e)}$.

Затем проведем преобразование координат, плотности тока и напряженности электрического поля вида (45) с параметром

$$\lambda=\sqrt{\frac{\sigma_z^{(e)}}{\sigma_x^{(e)}}}.\tag{A.1}$$

Матрица в преобразованной системе становится изотропной с законом Ома

$$\tilde{\mathbf{j}}^{(e)}=\sigma_0\,\tilde{\mathbf{E}}^{(e)},\quad \sigma_0=\sqrt{\sigma_x^{(e)}\sigma_z^{(e)}}.\tag{A.2}$$

При этом тензор проводимости $\hat{\tilde{\sigma}}^{(i)}$ включения сохраняет вид (4) с составляющими

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_x^{(i)}=\lambda\sigma_x^{(i)},\quad \tilde{\sigma}_a^{(i)}=\lambda\left(\sigma_a^{(i)}-\sigma_a^{(e)}\right),\\ \tilde{\sigma}_z^{(i)}=\lambda^{-1}\sigma_z^{(i)}.\end{gathered}\tag{A.3}$$

Кроме проводимости меняется и форма включения: исходная сфера радиуса R превращается в сфероид — эллипсоид вращения ($a_x=a_y\neq a_z$), задаваемый уравнением

$$\mathcal{F}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=\frac{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}{a_x^2}+\frac{\tilde{z}^2}{a_z^2}-1=0\tag{A.4}$$

с полуосями

$$a_x=a_y=R,\quad a_z=R/\lambda.\tag{A.5}$$

При параметре $\lambda>1$ ($\sigma_z^{(e)}>\sigma_x^{(e)}$) включение приобретает форму сплющенного эллипсоида вращения.

2. В преобразованной системе поставленная задача может быть решена (при $\lambda > 1$) в сплюснутых сфероидальных координатах $\{\xi, \eta, \phi\}$, связанных с декартовыми следующим образом [17]:

$$\begin{aligned} x &= a_0\sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\cos\phi, \\ y &= a_0\sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\sin\phi, \\ z &= a_0\xi\eta. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Здесь и далее значок «тильда» у величин, относящихся к преобразованной системе, опускаем. Координаты $\{\xi, \eta, \phi\}$ меняются в диапазонах $0 \le \xi \le \infty$, $-1 \le \eta \le 1$, $0 \le \phi < 2\pi$. При этом значению $\eta = 1$ отвечает положительная полуось z, а $\eta = -1$ — отрицательная.

Поверхности сплюснутого сфероида ($a_x = a_y > a_z$) соответствует $\xi = \xi_0 = \text{const}$, так что

$$a_x = a_y = a_0\sqrt{\xi_0^2+1}, \quad a_z = a_0\xi_0, \tag{A.7}$$

откуда находим

$$\xi_0 = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 - a_z^2}}, \quad a_0 = \sqrt{a_x^2 - a_z^2}. \tag{A.8}$$

Внутренней и внешней областям такого сфероида отвечают соответственно $\xi < \xi_0$ и $\xi > \xi_0$. Нормальная производная от потенциала φ на поверхности S сфероида дается выражением

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = \frac{1}{h_\xi}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_0}, \quad h_\xi = a_0\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{\xi^2+1}}, \tag{A.9}$$

где h_ξ — коэффициент Ламе.

Уравнение Лапласа для потенциала φ в сплюснутых сфероидальных координатах допускает разделение переменных:

$$\varphi(\xi, \eta, \phi) = X(\xi)H(\eta)\Phi(\phi). \tag{A.10}$$

Периодическими по углу ϕ решениями уравнения для $\Phi(\phi)$ являются $\cos m\phi$ и $\sin m\phi$, где $m \ge 0$ — целое. Конечные при $\eta = \pm 1$ решения уравнения для $H(\eta)$ даются присоединенными функциями Лежандра $P_n^m(\eta)$ с также целым n. Наконец, решениями уравнения для $X(\xi)$ являются присоединенные функции Лежандра мнимого аргумента $P_n^m(i\xi)$ и $Q_n^m(i\xi)$.

Общее решение уравнения Лапласа для потенциала имеет вид

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left\{A_{mn}\cos m\phi + B_{mn}\sin m\phi\right\} \times \times P_n^m(\eta)\left\{C_{mn}P_n^m(i\xi) + D_{mn}Q_n^m(i\xi)\right\}. \tag{A.11}$$

Из (A.6) следует, что $\xi \approx r/a_0$ при $r \to \infty$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. С другой стороны, при $\xi \to \infty$ имеем $P_n^m(i\xi) \sim \xi^n$ и $Q_n^m(i\xi) \sim 1/\xi^{n+1}$. Поэтому в убывающем при $r \to \infty$ решении слагаемое с $P_n^m(i\xi)$ в (A.11) следует опустить.

3. Потенциал внешнего однородного электрического поля $\varphi_0(\mathbf{r}) = -(x\,E_{0x} + y\,E_{0y} + z\,E_{0z})$ в сплюснутых сфероидальных координатах принимает вид

$$\varphi_0 = -a_0\left\{(E_{0x}\cos\phi + E_{0y}\sin\phi)\,P_1^1(\eta)\,P_1^1(i\xi) - - i\,E_{0z}\,P_1^0(\eta)\,P_1^0(i\xi)\right\}, \tag{A.12}$$

где

$$\begin{aligned} P_1^0(\eta) &= \eta, \quad P_1^0(i\xi) = i\xi, \\ P_1^1(\eta) &= \sqrt{1-\eta^2}, \quad P_1^1(i\xi) = \sqrt{1+\xi^2}. \end{aligned} \tag{A.13}$$

Вне включения ($\xi > \xi_0$) к φ_0 следует добавить решение, убывающее при $r \to \infty$:

$$\varphi^{(e)} = \varphi_0 - a_0\left\{(B_1\cos\phi + B_2\sin\phi)\,P_1^1(\eta)\,Q_1^1(i\xi) + + B_3P_1^0(\eta)\,Q_1^0(i\xi)\right\}. \tag{A.14}$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_1^0(i\xi) &= \xi\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\xi} - 1, \\ Q_1^1(i\xi) &= \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}} - \sqrt{\xi^2+1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\xi}. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Внутри включения ($\xi < \xi_0$) электрическое поле оказывается однородным, так что потенциал $\varphi^{(i)}$ ищем в виде

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{r}) = -(A_1\,x + A_2\,y + A_3\,z) \tag{A.16}$$

или

$$\varphi^{(i)} = -a_0\left\{(A_1\cos\phi + A_2\sin\phi)\,P_1^1(\eta)\,P_1^1(i\xi) - - iA_3P_1^0(\eta)\,P_1^0(i\xi)\right\}. \tag{A.17}$$

На поверхности включения ($\xi = \xi_0$) должны выполняться стандартные граничные условия. Из первого — равенства потенциалов — находим

$$\begin{aligned} B_1 &= (A_1 - E_{0x})\,\frac{P_1^1(i\xi_0)}{Q_1^1(i\xi_0)}, \\ B_2 &= (A_2 - E_{0y})\,\frac{P_1^1(i\xi_0)}{Q_1^1(i\xi_0)}, \\ B_3 &= (A_3 - E_{0z})\,\frac{P_1^0(i\xi_0)}{Q_1^0(i\xi_0)}. \end{aligned} \tag{A.18}$$

Второе граничное условие — равенство нормальных составляющих плотности тока — имеет вид

$$\xi = \xi_0: \quad -\sigma_0\frac{1}{h_\xi}\,\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial\xi} = j_n^{(i)}, \tag{A.19}$$

где h_ξ — коэффициент Ламе из (A.9) и

$$j_n^{(i)} = n_x \left(\sigma_x E_x^{(i)} + \sigma_a E_y^{(i)}\right) + \\ + n_y \left(-\sigma_a E_x^{(i)} + \sigma_x E_y^{(i)}\right) + n_z \sigma_z E_z^{(i)}. \quad (A.20)$$

Здесь σ_x, σ_a, σ_z — составляющие тензора проводимости включения; n_x, n_y, n_z — составляющие орта нормали $\mathbf{n}$ к поверхности включения $\mathbf{n} = \nabla\mathcal{F}/|\nabla\mathcal{F}|$ с $\mathcal{F}$ из (A.4) (без значка «тильда»):

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{a_z}{a_0}\sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi_0^2+\eta^2}}\cos\phi, \\ n_y &= \frac{a_z}{a_0}\sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi_0^2+\eta^2}}\sin\phi, \\ n_z &= \frac{a_x}{a_0}\frac{\eta}{\sqrt{\xi_0^2+\eta^2}}. \end{aligned} \quad (A.21)$$

Для составляющих напряженности электрического поля $\mathbf{E}^{(i)}$ внутри включения из (A.16) получаем

$$E_x^{(i)} = A_1, \quad E_y^{(i)} = A_2, \quad E_z^{(i)} = A_3. \quad (A.22)$$

Подстановка (A.14), (A.21) и (A.22) в (A.19) дает следующее соотношение для коэффициентов A_3 и B_3:

$$\sigma_0 \left\{E_{0z} + B_3 \frac{dQ_1^0(i\xi_0)}{d\xi_0}\right\} = \sigma_z A_3. \quad (A.23)$$

С учетом определений (A.15) для $Q_1^0(i\xi)$ и (A.8) для ξ_0, a_0 имеем

$$\begin{aligned} Q_1^0(i\xi_0) &= -\frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2}\, n^{(z)}, \\ \frac{dQ_1^0(i\xi_0)}{d\xi_0} &= \frac{\epsilon^3}{1+\epsilon^2}\left(1-n^{(z)}\right), \end{aligned} \quad (A.24)$$

где

$$n^{(z)} = \frac{1+\epsilon^2}{\epsilon^3}(\epsilon - \operatorname{arctg}\epsilon), \quad \epsilon = \frac{\sqrt{a_x^2-a_z^2}}{a_z}. \quad (A.25)$$

В (A.24) и (A.25) $n^{(z)}$ — коэффициент деполяризации сплюснутого эллипсоида вращения. Из соотношения (A.18) для A_3, B_3 и равенства (A.23) с учетом (A.24) находим

$$A_3 = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - (\sigma_0-\sigma_z)\, n^{(z)}}\, E_{0z}, \quad (A.26)$$

$$B_3 = -\frac{a_x^2 a_z}{a_0^3}\frac{\sigma_0-\sigma_z}{\sigma_0-(\sigma_0-\sigma_z)\, n^{(z)}}\, E_{0z}. \quad (A.27)$$

Для коэффициентов A_1, A_2 и B_1, B_2 из (A.19) с учетом (A.20)–(A.22) следует система уравнений

$$\sigma_0 \frac{a_x}{a_z}\left\{E_{0x}\frac{dP_1^1(i\xi_0)}{d\xi_0} + B_1 \frac{dQ_1^1(i\xi_0)}{d\xi_0}\right\} = \\ = \sigma_x A_1 + \sigma_a A_2, \quad (A.28)$$

$$\sigma_0 \frac{a_x}{a_z}\left\{E_{0y}\frac{dP_1^1(i\xi_0)}{d\xi_0} + B_2 \frac{dQ_1^1(i\xi_0)}{d\xi_0}\right\} = \\ = -\sigma_a A_1 + \sigma_x A_2. \quad (A.29)$$

Аналогично (A.24) имеем

$$P_1^1(i\xi_0) = \frac{a_x}{a_0} = \frac{a_x}{\epsilon\, a_z}, \quad \frac{dP_1^1(i\xi_0)}{d\xi_0} = \frac{a_z}{a_x}, \quad (A.30)$$

$$\begin{aligned} Q_1^1(i\xi_0) &= -\frac{2\epsilon^2}{\sqrt{1+\epsilon^2}}\, n^{(x)}, \\ \frac{dQ_1^1(i\xi_0)}{d\xi_0} &= \frac{2\epsilon^2}{(1+\epsilon^2)^{3/2}}\left(1-n^{(x)}\right). \end{aligned} \quad (A.31)$$

Здесь $n^{(x)} = (1/2)\left(1-n^{(z)}\right)$ — второй коэффициент деполяризации сплюснутого сфероида.

Из (A.28)–(A.31) находим

$$A_1 = \frac{\sigma_0}{\Delta} \times \\ \times \left\{\left[\sigma_0 - (\sigma_0-\sigma_x)\, n^{(x)}\right] E_{0x} - \sigma_a n^{(x)} E_{0y}\right\}, \quad (A.32)$$

$$A_2 = \frac{\sigma_0}{\Delta} \times \\ \times \left\{\sigma_a n^{(x)} E_{0x} + \left[\sigma_0 - (\sigma_0-\sigma_x)\, n^{(x)}\right] E_{0y}\right\}, \quad (A.33)$$

$$\Delta = \left[\sigma_0 - (\sigma_0-\sigma_x)\, n^{(x)}\right]^2 + \left[\sigma_a n^{(x)}\right]^2. \quad (A.34)$$

С учетом (A.22), (A.26) и (A.32)–(A.34) для напряженности электрического поля внутри включения получаем

$$\mathbf{E}^{(i)} = \hat{W}\mathbf{E}_0, \quad (A.35)$$

где

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} W_x & W_a & 0 \\ -W_a & W_x & 0 \\ 0 & 0 & W_z \end{pmatrix} \quad (A.36)$$

и

$$W_x = \frac{\sigma_0\left[\sigma_0 - (\sigma_0-\sigma_x)\, n^{(x)}\right]}{\Delta}, \quad (A.37)$$

$$W_a = -\frac{\sigma_0\sigma_a n^{(x)}}{\Delta}, \quad (A.38)$$

$$W_z = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_z)\, n^{(z)}} \tag{A.39}$$

с Δ из (A.34).

Для коэффициентов B_1 и B_2 из (A.18) с учетом (A.32), (A.33) находим

$$B_1 = -\frac{a_x^2 a_z}{2a_0^3} \times \\ \times \left\{ \frac{(\sigma_0 - \sigma_x)\left[\sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_x)\, n^{(x)}\right] - \sigma_a^2 n^{(x)}}{\Delta} \times \right. \\ \left. \times\, E_{0x} - \frac{\sigma_0\, \sigma_a}{\Delta}\, E_{0y} \right\}, \tag{A.40}$$

$$B_2 = -\frac{a_x^2 a_z}{2a_0^2} \left\{ \frac{\sigma_0 \sigma_a}{\Delta}\, E_{0x} + \right. \\ \left. + \frac{(\sigma_0 - \sigma_x)\left[\sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_x)\, n^{(x)}\right] - \sigma_a^2 n^{(x)}}{\Delta} E_{0y} \right\}. \tag{A.41}$$

Так как при $r \to \infty$

$$Q_1^0(i\xi) \approx -\frac{1}{3\xi^2} \approx -\frac{a_0^2}{3r^2}, \\ Q_1^1(i\xi) \approx -\frac{2}{3\xi^2} \approx -\frac{2a_0^2}{3r^2}, \tag{A.42}$$

из (A.14) для асимптотики потенциала $\varphi^{(e)}(\mathbf{r})$ получаем стандартное выражение

$$\varphi^{(e)}(\mathbf{r}) \approx -\mathbf{E}_0 \mathbf{r} + \frac{\mathbf{pr}}{r^3} + \ldots, \tag{A.43}$$

где

$$p_x = 2a_0^3\, B_1/3, \quad p_y = 2a_0^3\, B_2/3, \\ p_z = a_0^3\, B_3/3. \tag{A.44}$$

Поэтому безразмерный тензор дипольной поляризуемости $\hat{\alpha}$ имеет такой же вид, как и (A.36), с составляющими

$$\alpha_x = -\frac{1}{4\pi} \times \\ \times \frac{(\sigma_0 - \sigma_x)\left[\sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_x)\, n^{(x)}\right] - \sigma_a^2 n^{(x)}}{\Delta}, \tag{A.45}$$

$$\alpha_a = \frac{1}{4\pi} \frac{\sigma_0 \sigma_a}{\Delta}, \tag{A.46}$$

$$\alpha_z = -\frac{1}{4\pi} \frac{\sigma_0 - \sigma_z}{\sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_z)\, n^{(z)}}. \tag{A.47}$$

При параметре $\lambda < 1$ ($\sigma_x^{(e)} = \sigma_y^{(e)} > \sigma_z^{(e)}$) преобразованное включение имеет форму вытянутого ($a_x = a_y < a_z$) эллипсоида вращения. В этом случае поставленная в пункте **1** задача решается в вытянутых сфероидальных координатах [17]. В результате оказывается, что выражения для напряженности электрического поля внутри включения и для дипольной поляризуемости также имеют вид (A.35)–(A.39) и (A.44)–(A.47), где коэффициенты деполяризации относятся теперь к вытянутому эллипсоиду вращения.

4. Возвращаясь к исходной задаче, заметим, что полученные выше результаты (A.35)–(A.39) и (A.45)–(A.47) фактически относятся к преобразованной («тильдованной») системе. Для возврата к исходной системе сначала следует сделать замены $\mathbf{E} \to \widetilde{\mathbf{E}}$ и $\hat{\sigma}^{(i)} \to \hat{\widetilde{\sigma}}^{(i)}$. Так как согласно (41) и (45) $\widetilde{E}_x = \lambda^{-1} E_x$, $\widetilde{E}_y = \lambda^{-1} E_y$, $\widetilde{E}_z = E_z$, для напряженности электрического поля внутри сферического включения получаем выражение вида (A.35)

$$\mathbf{E}^{(i)} = \hat{W}^{(i)} \mathbf{E}_0 \tag{A.48}$$

с тензором $\hat{W}^{(i)}$, совпадающим по форме с (A.36):

$$\hat{W}^{(i)} = \begin{pmatrix} W_x^{(i)} & W_a^{(i)} & 0 \\ -W_a^{(i)} & W_x^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & W_z^{(i)} \end{pmatrix}. \tag{A.49}$$

Проведем в (A.37)–(A.39) замену составляющих тензора $\hat{\sigma}^{(i)}$ на составляющие тензора $\hat{\widetilde{\sigma}}^{(i)}$. Затем подставим сюда величины σ_0 из (A.2) и $\widetilde{\sigma}_x^{(i)}$, $\widetilde{\sigma}_a^{(i)}$, $\widetilde{\sigma}_z^{(i)}$ из (A.3). В результате для составляющих тензора $\hat{W}^{(i)}$ из (A.49) получим следующие выражения:

$$W_x^{(i)} = \frac{\sigma_x^{(e)} \left[\sigma_x^{(e)} - \left(\sigma_x^{(e)} - \sigma_x^{(i)}\right) n^{(x)}\right]}{\Delta}, \tag{A.50}$$

$$W_a^{(i)} = \frac{\sigma_x^{(e)} \left(\sigma_a^{(e)} - \sigma_a^{(i)}\right) n^{(x)}}{\Delta}, \tag{A.51}$$

$$\Delta = \left[\sigma_x^{(e)} - \left(\sigma_x^{(e)} - \sigma_x^{(i)}\right) n^{(x)}\right]^2 + \\ + \left[\left(\sigma_a^{(e)} - \sigma_a^{(i)}\right) n^{(x)}\right]^2, \tag{A.52}$$

$$W_z^{(i)} = \frac{\sigma_z^{(e)}}{\sigma_z^{(e)} - \left(\sigma_z^{(e)} - \sigma_z^{(i)}\right) n^{(z)}}. \tag{A.53}$$

Здесь $n^{(x)}$ и $n^{(z)}$ — коэффициенты деполяризации эллипсоида вращения с полуосями

$$a_x = a_y = R, \quad a_z = \frac{R}{\lambda} = R\sqrt{\frac{\sigma_x^{(e)}}{\sigma_z^{(e)}}}. \tag{A.54}$$

Формулы (A.48)–(A.53) были приведены без вывода в работе [16].

Для тензора безразмерной дипольной поляризуемости $\hat{\tilde{\alpha}}$ преобразованного включения получаем

$$\hat{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_x & \tilde{\alpha}_a & 0 \\ -\tilde{\alpha}_a & \tilde{\alpha}_x & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\alpha}_z \end{pmatrix} \tag{A.55}$$

с составляющими

$$\tilde{\alpha}_x = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\left(\sigma_x^{(e)}-\sigma_x^{(i)}\right)\left[\sigma_x^{(e)}-\left(\sigma_x^{(e)}-\sigma_x^{(i)}\right)n^{(x)}\right]}{\Delta} - \right. \\ \left. - \frac{\left(\sigma_a^{(e)}-\sigma_a^{(i)}\right)^2 n^{(x)}}{\Delta}\right\}, \tag{A.56}$$

$$\tilde{\alpha}_a = -\frac{1}{4\pi}\frac{\sigma_x^{(e)}\left(\sigma_a^{(e)}-\sigma_a^{(i)}\right)}{\Delta}, \tag{A.57}$$

$$\tilde{\alpha}_z = -\frac{1}{4\pi}\frac{\sigma_z^{(e)}-\sigma_z^{(i)}}{\sigma_z^{(e)}-\left(\sigma_z^{(e)}-\sigma_z^{(i)}\right)n^{(z)}} \tag{A.58}$$

с Δ из (A.52) и с теми же коэффициентами деполяризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
2. H. Stachowiak, Physica **45**, 481 (1970).
3. D. Stroud, Phys. Rev. B **12**, 3369 (1975).
4. D. Stroud and F. P. Pan, Phys. Rev. B **13**, 1434 (1976).
5. J. B. Sampsell and C. Garland, Phys. Rev. B **13**, 583 (1976).
6. D. J. Bergman and Y. M. Strelniker, Phys. Rev. B **60**, 13016 (1999).
7. D. J. Bergman and Y. M. Strelniker, Phys. Rev. B **62**, 6603 (2000).
8. R. Landauer, J. Appl. Phys. **23**, 779 (1952).
9. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **139**, 378 (2011).
10. C. Herring, J. Appl. Phys, **31**, 1939 (1960).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
12. Ю. А. Дрейзин, А. М. Дыхне, ЖЭТФ **63**, 242 (1972).
13. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **140**, 976 (2011),
14. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **85**, 568 (1983).
15. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **144**, 1036 (2013).
16. Б. Я. Балагуров, ФТТ **28**, 3012 (1986).
17. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, т. II, Изд-во иностр. лит., Москва (1960).