ЖЭТФ, 2013, том 144, вып. 5 (11), стр. 1099–1106

КОНВЕКЦИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ КОЛЛОИДНОЙ СУСПЕНЗИИ

И. Н. Черепанов, Б. Л. Смородин[*]

*Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 13 марта 2013 г.

Изучена конвекция коллоидной суспензии, представляющей собой бинарную смесь — среду-носитель с примесью наночастиц, обладающих большим положительным значением термодиффузионного параметра. Рассмотрение проведено для случая подогрева снизу горизонтальной ячейки и периодических условий на вертикальных границах, соответствующих экспериментальной ситуации кольцевых каналов. Для колебательных и монотонных режимов конвекции коллоидной смеси построены бифуркационные диаграммы и получены зависимости от времени максимальной функции тока и функции тока в фиксированной точке ячейки, а также пространственные распределения поля концентрации коллоидной примеси. Показано, что в некоторой области параметров задачи (чисел Больцмана и Рэлея, характеризующих гравитационное расслоение и интенсивность теплового воздействия) существует устойчивый режим бегущих волн.

DOI: 10.7868/S0044451013110205

1. ВВЕДЕНИЕ

В однородных жидкостях с линейной зависимостью плотности от температуры (вода вдали от точки аномалии плотности, спирт) стационарная конвекция возникает в результате суперкритической бифуркации. Более сложная зависимость плотности жидкости от температуры или дополнительная зависимость плотности от концентрации приводит к возможности субкритического возникновения конвекции и существованию множества конвективных режимов течения различной сложности. Это происходит в воде в окрестности 4 °C [1, 2] или в бинарных смесях [3–8]. Сложное поведение конвективных течений в смесях связано с явлением термодиффузии, при котором приложенный градиент температуры вызывает появление градиента концентрации [9–11]. Большое внимание в последнее десятилетие уделяется теоретическому [12–14] и экспериментальному [15, 16] исследованию коллоидных бинарных смесей, в частности феррожидкостей (магнитных коллоидов) [17]. При классическом рассмотрении феррожидкость считается однородной [18], в то время как в двухкомпонентной модели (среда-носитель и коллоидные частицы) учитывается стратификация смеси, связанная с магнитофорезом [17], гравитационным расслоением [12, 13], термодиффузионным разделением [12, 14–16].

В отсутствие магнитного поля феррожидкости ведут себя подобно другим коллоидным суспензиям, что позволяет описывать их на основе единой модели [12], учитывающей только термодиффузионный и гравитационный механизмы стратификации.

Большое различие в размерах частиц молекулярных и коллоидных бинарных смесей, а следовательно, большое различие коэффициентов диффузии приводят к различному поведению конвективных течений в этих средах. В работе [13] показано, что гравитационная стратификация разрушает зеркально-сдвиговую симметрию конвективных режимов, присущих молекулярным бинарным смесям [4]. Линейная теория конвективной устойчивости коллоидной смеси в условиях гравитационного расслоения и термодиффузии рассмотрена в работе [12]. Различные (монотонные и колебательные) нелинейные конвективные течения изучены в [12, 13].

В работе [14] сделана попытка описать конвекцию коллоидной суспензии при действии двух противоположно направленных процессов: гравитационной седиментации и термодиффузионного потока частиц, направленного к верхней холодной границе (положительный коэффициент термодиффузии Соре). Однако решение задачи в [14] было основа-

[*]E-mail: bsmorodin@yandex.ru

но на предположении, что поле концентрации хорошо описывается первой пространственной гармоникой, что противоречит теоретической модели [4], учитывающей сильную пространственную нелинейность концентрации и хорошо описывающей экспериментальные данные, касающиеся конвекции в бинарных смесях [19]. Кроме того, в [14] для горизонтального слоя получен устойчивый колебательный конвективный режим стоячей волны, не характерный для бинарных смесей, заполняющих кольцевые каналы. В неравномерно нагретой бинарной смеси с аномальной термодиффузией или в гравитационно стратифицированной коллоидной суспензии устанавливается бегущая волна [13, 19], порог возникновения которой отличается от критического значения бифуркационного параметра, предсказанного линейной теорией устойчивости, и определяется нелинейной эволюцией течения. Исследование поведения подобных течений аналитическими методами возможно лишь для специально подобранного набора значений определяющих параметров. Эффективными являются методы численного анализа, например, основанные на использовании конечно-разностной техники [4, 7, 12, 13].

В данной работе проведено численное моделирование конвекции коллоидной суспензии, частицы которой имеют большой положительный коэффициент термодиффузии. Коллоидная бинарная смесь заполняет горизонтальный слой и подвержена стратификации в поле тяжести. В зависимости от соотношения параметров задачи, характеризующих оседание частиц в поле тяжести и термодиффузионное разделение, в состоянии механического равновесия тяжелая примесь частиц может собираться у верхней (холодной) либо нижней (нагретой) границы, что качественно меняет характер конвекции в системе. В первом случае создается неустойчивая стратификация смеси, и конвекция возникает в результате суперкритической бифуркации вследствие нарастания монотонных возмущений. Если тяжелая примесь собирается у нагретой границы, то конвекция возникает в результате субкритической бифуркации и в некотором интервале чисел Рэлея существуют устойчивые бегущие волны.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим горизонтальный бесконечный плоский слой коллоидной суспензии, ограниченный сверху и снизу твердыми границами. Слой находится в поле тяжести $\mathbf{g}$. На горизонтальных непроницаемых идеально теплопроводящих границах $z = 0$, $z = d$ (d — толщина слоя) поддерживаются постоянные, но разные температуры $T(0) = \Theta/2$ и $T(d) = -\Theta/2$, что обеспечивает неравномерный нагрев жидкости. Неоднородность концентрации в нашем случае создается двумя механизмами: гравитационной стратификацией коллоида [12] и нормальным эффектом термодиффузии Соре [11].

Будем исходить из уравнений конвекции бинарной смеси в приближении Буссинеска [9–11, 20], в котором предполагается линейная зависимость плотности от температуры и концентрации:

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha\delta T + \beta\delta C), \tag{1}$$

где ρ_0 — средняя плотность, $\delta T = T - T_*$ и $\delta C = C - C_*$ — отклонение температуры и концентрации тяжелой компоненты от средних значений T_* и C_*, α и β — соответственно коэффициенты теплового и концентрационного расширения.

Используем безразмерные переменные на основе следующих масштабов: расстояния d, времени d^2/χ, скорости χ/d, температуры Θ, давления $\rho\chi^2/d^2$, концентрации $C_* d/l$ (χ — коэффициент температуропроводности), $l = k_B T_*/\Delta\rho V g$ — седиментационная длина [12] (k_B — постоянная Больцмана, $\Delta\rho$ — разность плотностей частиц и среды-носителя, V — объем частицы). Безразмерная система уравнений конвекции смеси в приближении Буссинеска имеет вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \\
= -\nabla p + \mathrm{Pr}\,\Delta\mathbf{v} + \mathrm{Pr}(\mathrm{Ra}\,T - \mathrm{Bm}\,C)\mathbf{e}, \\
\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)T = \Delta T, \quad \mathbf{e} = (0,0,1), \\
\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)C = \\
= \mathrm{Le}\left[\Delta\left(C + \psi\frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Bm}}T\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}C\right], \\
\operatorname{div}\mathbf{v} = 0,
\end{gathered} \tag{2}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, p — отклонение давления от гидростатического. Уравнения (2) содержат безразмерные параметры: $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля (ν — коэффициент кинематической вязкости), $\mathrm{Le} = D/\chi$ — число Льюиса, $\mathrm{Ra} = g\alpha\Theta d^3/\nu\chi$ — число Рэлея, $\psi = S_T\alpha/\beta$ — параметр разделения смеси, $\mathrm{Bm} = g\beta C_* d^4/\nu\chi l$ — число Больцмана [12], $1/r = d/l$ — отношение толщины слоя к седиментационной длине, D — коэффициент диффузии, S_T — коэффициент термодиффузии Соре.

Рассматривается реализуемый в эксперименте случай твердых, идеально теплопроводящих непроницаемых горизонтальных границ слоя, на которых выполняется условие прилипания (равенство нулю вектора скорости) и обращается в нуль поток вещества [11, 12]:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{v}(x,0)=\mathbf{v}(x,1)=0,\\
T(x,0)=0.5,\quad T(x,1)=-0.5,\\
\frac{\partial C}{\partial z}+\psi\frac{\partial T}{\partial z}+\frac{1}{r}\,C=0\quad \text{при}\quad z=0,1.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Задача о нелинейной эволюции конвективного течения решалась в терминах функции тока Ψ и завихренности φ:

$$
v_x=\frac{\partial\Psi}{\partial z},\quad v_z=-\frac{\partial\Psi}{\partial x},\quad \varphi=(\operatorname{rot}\mathbf{v})_y.
\tag{4}
$$

Полная система нелинейных уравнений принимает вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\\
=\mathrm{Pr}\cdot\Delta\varphi-\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Ra}\left(\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\mathrm{Bm}}{\mathrm{Ra}}\frac{\partial C}{\partial x}\right),\\
\Delta\Psi=0,\\
\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z}=\Delta T,\\
\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(C\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)=\\
=\mathrm{Le}\left(\Delta C+\psi\frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Bm}}\Delta T+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}C\right).
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Уравнение для концентрации из системы (5) записано в консервативной форме. Граничные условия для функции тока на горизонтальных границах имеют вид

$$
\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial z}=0\quad\text{при}\quad z=0,1.
\tag{6}
$$

Рассматриваются решения задачи, периодические вдоль горизонтальной координаты с периодом $\lambda=2\pi/k$ (k — волновое число пространственной конвективной структуры), что позволяет использовать следующие условия на вертикальных границах расчетной области:

$$
\begin{gathered}
\Psi(0,z)=\Psi(\lambda,z),\quad \varphi(0,z)=\varphi(\lambda,z),\\
T(0,z)=T(\lambda,z),\quad C(0,z)=C(\lambda,z),
\end{gathered}
\tag{7}
$$

и получать решение на одном пространственном периоде.

Задача решалась методом конечных разностей. При этом пространственные производные уравнений движения и теплопроводности аппроксимировались центральными разностями. Конечноразностная аппроксимация уравнения концентрации из системы (5) должна удовлетворять закону сохранения массы. Это достигается использованием консервативной формы записи уравнения и аппроксимации его при помощи метода контрольного объема [21]. Конвективное слагаемое при этом аппроксимируется центральными разностями. Уравнение Пуассона решалось методом последовательной верхней релаксации. Решение строилось на сетке 82×41. Проверочные расчеты проведены на сетке 122×61.

3. МЕХАНИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

В состоянии механического равновесия, когда отсутствует макроскопическое течение жидкости, равновесные распределения температуры и концентрации описываются уравнениями

$$
\begin{gathered}
\Delta T=0,\\
\frac{\partial}{\partial z}C+S_T\frac{\partial T}{\partial z}+\frac{1}{l}\,C=0,
\end{gathered}
\tag{8}
$$

которые для удобства записаны в размерной форме. Также необходимо учитывать постоянство средней концентрации:

$$
\frac{1}{d}\int\limits_0^d C\,dz=C_*.
\tag{9}
$$

С учетом граничных условий (3) распределение температуры принимает вид

$$
T=\Theta(0.5-z/d).
\tag{10}
$$

Подставляя данное распределение температуры в уравнение (8), получим

$$
\frac{\partial}{\partial z}\,C-\frac{S_T\Theta}{d}+\frac{1}{l}\,C=0.
\tag{11}
$$

Решением уравнения (11) с условием постоянства средней концентрации примеси является

$$
C=\left(\frac{C_*d}{l}-S_T\Theta\right)\frac{e^{-z/l}}{1-e^{-d/l}}+\frac{S_T\Theta l}{d}.
\tag{12}
$$

В предельном случае отсутствия гравитационной седиментации (для молекулярных смесей седиментационная длина стремится к бесконечности) выражение (12) сводится к уравнению

$$
C=C_*-S_T\Theta\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{d}\right),
\tag{13}
$$

характеризующему только термодиффузионное расслоение. В случае отсутствия термодиффузии из (12) получим

$$
C=\frac{C_*d}{l}\,\frac{e^{-z/l}}{1-e^{-d/l}},
\tag{14}
$$

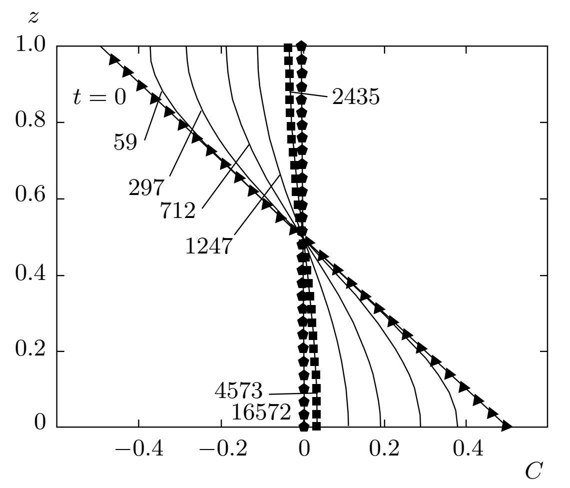

Рис. 1. Механическое равновесие. Профили концентрации в различные моменты времени. $\mathrm{Bm} = 17850$, $\mathrm{Ra} = 1785$, $\mathrm{Le} = 10^{-4}$, $\psi = 10$, $1/r = 30$

что в случае малости толщины слоя по отношению к седиментационной длине ($h \ll l$) дает линейный профиль концентрации:

$$C = C_* + \frac{C_* h}{l}\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right). \tag{15}$$

В безразмерной форме распределения температуры (10) и концентрации (12) принимают вид

$$T = 0.5 - z,$$
$$C = \frac{e^{-z/r}}{1 - e^{-1/r}}\left(1 - \frac{\psi\,\mathrm{Ra}}{\mathrm{Bm}}\right) + \frac{r\psi\,\mathrm{Ra}}{\mathrm{Bm}}. \tag{16}$$

Как видно из (16), при выполнении условия $\psi\,\mathrm{Ra}\,/\,\mathrm{Bm} = 1$ стационарное распределение концентрации в покоящемся слое жидкости является однородным. Термодиффузионный ток тяжелых частиц к холодной верхней границе компенсирует гравитационное оседание. На рис. 1 приведены в различные моменты времени профили концентрации, которые получены путем решения методом конечных разностей одномерных уравнений $\partial/\partial x = 0$, которые получаются из (6) в случае механического равновесия ($\Psi = 0$). В качестве начальных условий задавался равновесный гравитационный профиль концентрации в отсутствие градиента температуры. Если в слое первоначально установилось гравитационное распределение с преобладанием тяжелой примеси у нижней границы (рис. 1, $t = 0$), а затем приложен градиент температуры, соответствующий подогреву снизу, причем $\psi\,\mathrm{Ra} = \mathrm{Bm}$, то в конце концов устанавливается однородная концентрация тяжелых частиц.

В случае $\psi\,\mathrm{Ra} > \mathrm{Bm}$ в состоянии механического равновесия преобладает термодиффузия, при нагреве нижней границы легкая компонента дрейфует в ту же сторону, создавая потенциально неустойчивое распределение плотности, на фоне которого может возникнуть стационарная конвекция. При $\psi\,\mathrm{Ra} < \mathrm{Bm}$ преобладает гравитационная седиментация, концентрация тяжелой примеси больше в нижних слоях жидкости. При этом, согласно результатам линейной теории [12], в случае $\mathrm{Bm} > \mathrm{Ra}^0\,\psi$, ($\mathrm{Ra}^0 = 1700$ — порог стационарной конвекции в однородной жидкости) конвекция в коллоидной суспензии возникает колебательным образом, и в результате эволюции возмущений в слое может возникнуть бегущая волна.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОНВЕКТИВНЫЕ РЕЖИМЫ

Расчеты нелинейных конвективных течений проводились для периодических течений с длиной волны $\lambda = 2$ и однородного начального распределения концентрации. Коллоидная суспензия характеризовалась следующими безразмерными параметрами: числом Льюиса $\mathrm{Le} = 10^{-4}$ и числом Прандтля $\mathrm{Pr} = 10$, а также параметром термодиффузии $\psi = 10$.

На рис. 2 приведены бифуркационные диаграммы, показывающие зависимости максимального значения функции тока Ψ_{max} от числа Рэлея Ra при различных значениях числа Больцмана Bm. Видно, что при $\mathrm{Bm} < \mathrm{Bm}_C \equiv \psi\,\mathrm{Ra}^0 = 17000$ наблюдается мягкое возбуждение конвекции. При этом установившееся течение является стационарным. При $\mathrm{Bm} > \mathrm{Bm}_C$ течение возбуждается жестким образом (рис. 2*б*), а в слое может установиться устойчивый режим колебательной конвекции в виде бегущей волны. Данный режим качественно соответствует режиму бегущих волн в коллоидных жидкостях, стратифицированных в поле тяжести в отсутствие термодиффузии [13].

Зависимости частоты бегущей волны ω и максимального значения функции тока Ψ_{max} от числа Рэлея Ra для $\mathrm{Bm} = 17300 > \mathrm{Bm}_C$ приведены на рис. 2*б*. Фазовая скорость бегущей волны связана с частотой колебаний характеристик в фиксированной точке конвективной ячейки соотношением $v_{ph} = \omega/k$. С увеличением Ra интенсивность конвективного перемешивания растет, частота (фазовая скорость) бегущей волны уменьшается и обращается в нуль при некотором значении $\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}^*$. При этом в слое устанавливается режим стационар-

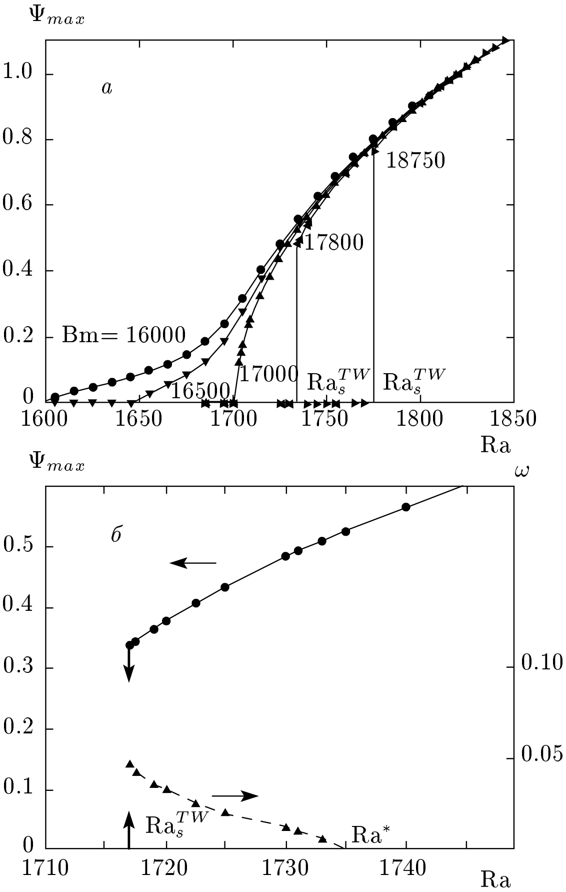

Рис. 2. Бифуркационные диаграммы для различных значений Bm (*а*) и для Bm = 17300 (*б*); Le = $= 10^{-4}$, $\psi = 10$, $1/r = 30$

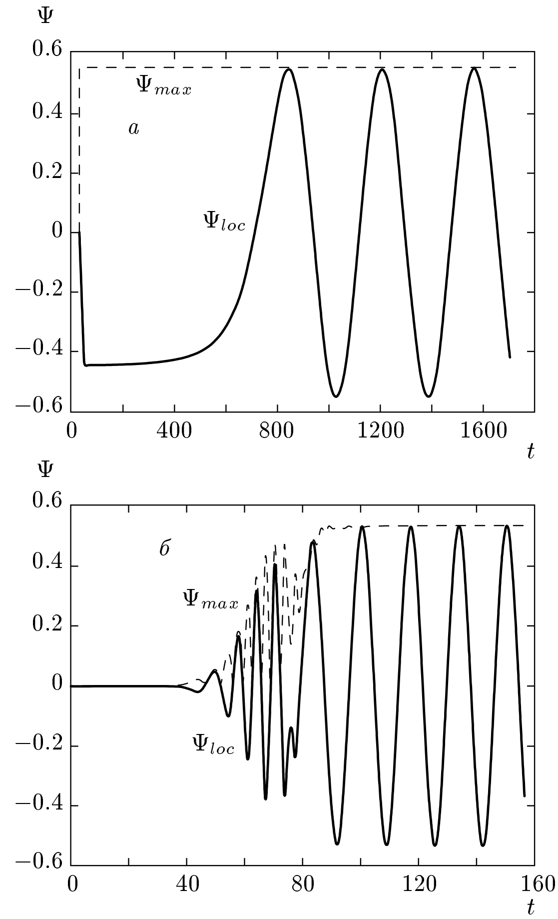

Рис. 3. Зависимости функции тока от времени при Bm = 17534, Ra = 1740 (*а*) и Bm = 17800, Ra = = 1739 (*б*); Le = 10^{-4}, $\psi = 10$, $1/r = 30$

ной конвекции. С другой стороны, при уменьшении числа Рэлея и выполнении условия $\mathrm{Ra} < \mathrm{Ra}_s^{TW}$ бегущая волна теряет устойчивость, и после переходного процесса в слое устанавливается механическое равновесие. Таким образом, в интервале значений $\mathrm{Ra}_s^{TW} < \mathrm{Ra} < \mathrm{Ra}^*$ наблюдается устойчивый режим бегущих волн.

Режим бегущих волн может формироваться в ходе реализации различных переходных процессов: 1) из режима стационарной однородной конвекции (рис. 3*а*) или 2) из неустойчивого режима стоячей волны (рис. 3*б*). В первом случае (рис. 3*а*) степень надкритичности достаточно высока ($\mathrm{Ra} \leq \mathrm{Ra}^*$), и за короткий промежуток времени в слое формируется интенсивный режим стационарной конвекции (максимальные значения функции тока в ячейке, Ψ_{max}, и функции тока в некоторой фиксированной точке, Ψ_{loc}, остаются постоянными во времени).

В дальнейшем ($t > 500$) конвективные валы приходят в движение, что отражается на изменении Ψ_{loc} со временем. В моменты времени, когда $\Psi_{loc} = \Psi_{max}$, через фиксированную точку проходит узел вертикальной скорости. При реализации второго сценария (рис. 3*б*) на первом непродолжительном этапе эволюции течения ($t < 70$) существуют стоячие волны с относительно высокой частотой колебаний. Затем режим стоячей волны теряет устойчивость и разрушается ($70 < t < 90$). В слое формируется режим бегущей волны, частота колебаний в котором значительно ниже.

Характерные поля отклонений концентрации δC и температуры δT от средних значений и функции тока Ψ для бегущей волны (в случае преобладания гравитационной стратификации $\psi\,\mathrm{Ra}^{st} < \mathrm{Bm}$, $\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}^{st}$) и монотонной конвекции (в случае термодиффузионного расслоения $\psi\,\mathrm{Ra}^{st} > \mathrm{Bm}$, $\mathrm{Ra} < \mathrm{Ra}^{st}$) приведены соответственно на рис. 4 и 5. Поскольку интенсивность конвективного движе-

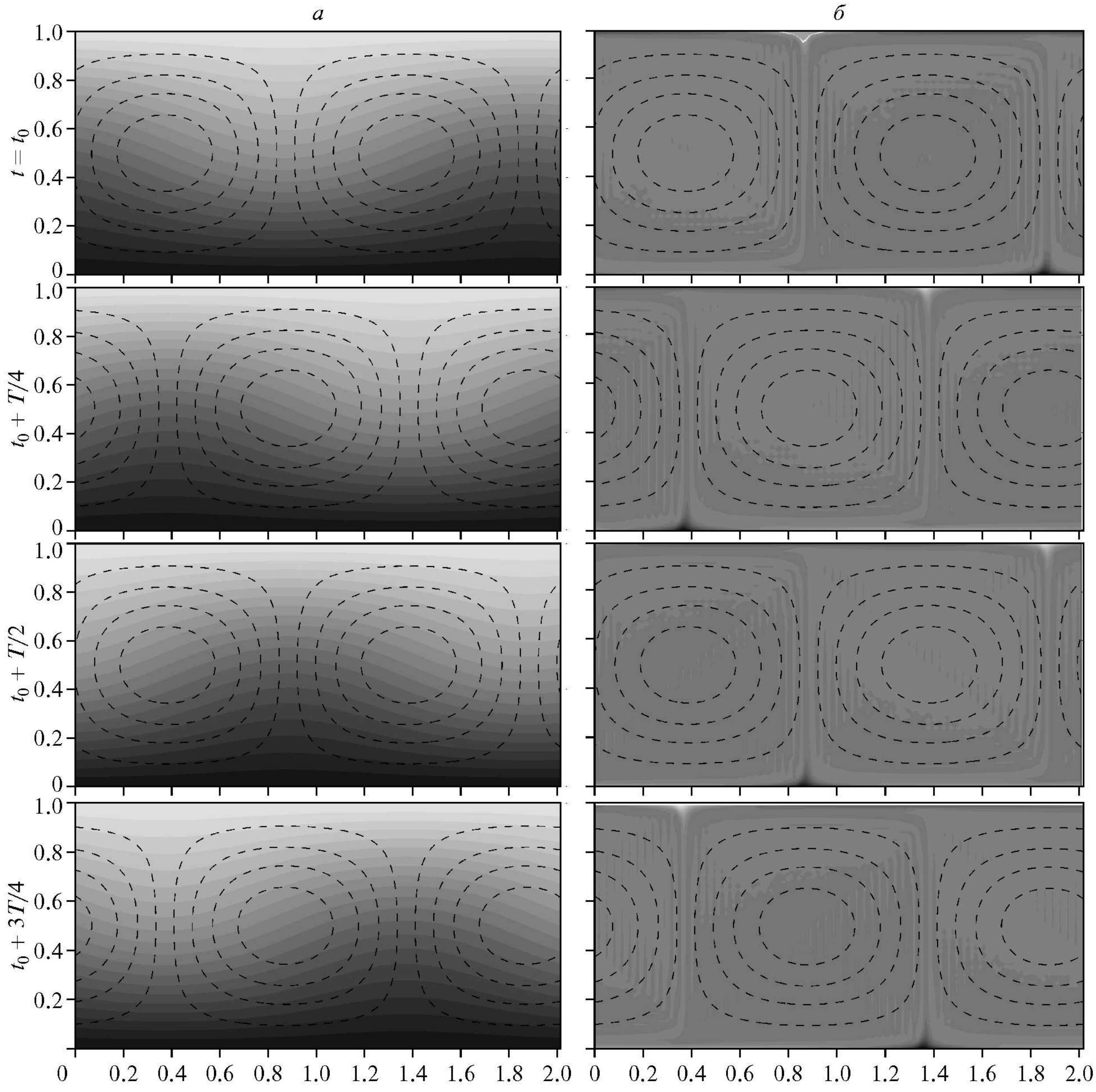

Рис. 4. Поля температуры (a) и концентрации ($б$) бегущей волны для $\mathrm{Le} = 10^{-4}$, $\mathrm{Bm} = 19000$, $\mathrm{Ra} = 1795$. Штриховыми линиями обозначены изолинии функции тока; $\psi = 10$, $1/r = 30$

ния в первом случае в несколько раз больше, изотермы искривлены сильнее. Для иллюстрации движения бегущей волны изолинии температуры и концентрации на рис. 4 приведены в моменты времени, разделенные интервалами $T/4 = \pi/2\omega$, где T — период колебаний функции тока в фиксированной точке ячейки. Волна в данном случае движется слева направо: за четверть периода конвективная структура смещается вправо на четверть длины волны. Из рис. 4 и 5 видно, что поля функции тока и температуры хорошо аппроксимируются первыми пространственными гармониками, в то время как поля концентрации имеют узкие погранслои, что подтверждает ошибочность предположения работы [14] о возможности описания поля концентрации первой пространственной гармоникой. Концентрация в ядре ячейки практически однородная, неоднородности проявляются только вблизи границ, причем зер-

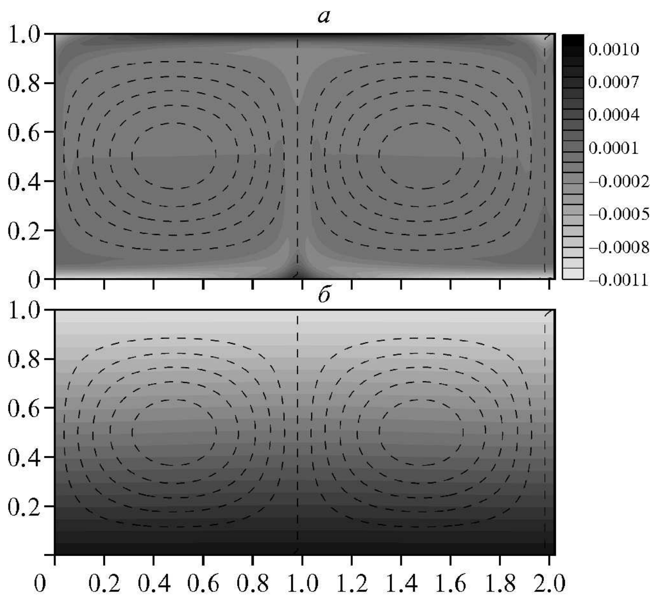

Рис. 5. Поля концентрации (*а*) и температуры (*б*) стационарной конвекции для $\mathrm{Le} = 10^{-4}$, $\mathrm{Bm} = 16500$, $\mathrm{Ra} = 1655$. Штриховыми линиями обозначены изолинии функции тока; $\psi = 10$, $1/r = 30$

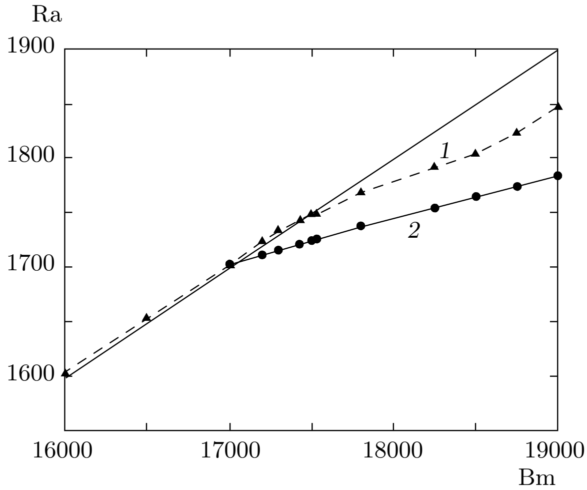

Рис. 6. Зависимости критических чисел Ra^{st} (кривая *1*), Ra_s^{TW} (кривая *2*) от Bm при $\mathrm{Le} = 10^{-4}$, $\psi = 10$, $1/r = 30$. Прямая сплошная линия — $\mathrm{Ra} = \mathrm{Bm}/\psi$

кально-сдвиговая симметрия, присущая бегущей в молекулярной бинарной смеси волне,

$$\delta C(x, z; t) = -\delta C(x + \lambda/2, 1 - z; t),$$

слабо искажается благодаря гравитационной стратификации (рис. 4*а*).

В случае монотонной конвекции (рис. 5) наблюдается зеркальная симметрия между конвективными валами, вращающимися в противоположных направлениях. На рис. 6 приведена зависимость критических чисел Ra^{st} и Ra_s^{TW}, соответствующих порогу стационарной и колебательной конвекции, от числа Больцмана. При $\mathrm{Bm} < 17000$ наблюдается только режимы стационарной конвекции. Критическое число Рэлея Ra^{st} линейно зависит от Bm по закону $\mathrm{Ra}^{st} = \mathrm{Bm}/\psi$. Данный результат согласуется с результатами линейной теории [12]. При $\mathrm{Bm} > 17000$ нарастают колебательные возмущения, и в интервале $\mathrm{Ra}_s^{TW} < \mathrm{Ra} < \mathrm{Ra}^* = \mathrm{Ra}^{st}$ существует режим бегущих волн.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучена нелинейная эволюция и получены характеристики различных конвективных режимов, возникающих и существующих в коллоидной бинарной смеси при учете седиментации и положительной термодиффузии — стационарной конвекции и бегущих волн. В пространстве параметров задачи найдены области существования данных режимов. Построены бифуркационные диаграммы решений в зависимости от степени надкритичности. Режим стоячей волны, согласно результатам моделирования, оказывается неустойчивым. Показано, что поле концентрации в режиме развитой конвекции коллоидной суспензии характеризуется сильным пространственным ангармонизмом, как и в случае молекулярной бинарной смеси.

Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-96037) и РФФИ-Урал (грант № 13-01-96010).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Veronis, Astrophys. J. **137**, 641 (1963).
2. D. V. Kuznetsova and I. N. Sibgatullin, Fluid Dynamics Res. **44**, 031410 (2012).
3. M. C. Cross and P. C. Hohenberg, Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1993).
4. M. Lücke, W. Barten, P. Büchel et al., Lecture Notes in Phys. Monographs **55**, 127 (1998).
5. Л. Х. Ингель, ЖЭТФ **128**, 179 (2005).

6. Л. Х. Ингель, ЖЭТФ **122**, 1019 (2002).

7. B. L. Smorodin, B. I. Myznikova, and I. O. Keller, Lecture Notes in Phys. **584**, 372 (2002).

8. B. L. Smorodin and M. Lücke, Phys. Rev. E **79**, 026315 (2009).

9. И. Г. Шапошников, ЖЭТФ **21**, 1309 (1951).

10. И. Г. Шапошников, УФН **28**, 119 (1952).

11. J. K. Platten and J. C. Legros, *Convection in Fluids*, Springer-Verlag, Berlin (1984).

12. M. I. Shliomis and B. L. Smorodin, Phys. Rev. E **71**, 036312 (2005).

13. B. L. Smorodin, I. N. Cherepanov, B. I. Myznikova et al., Phys. Rev. E **84**, 026305 (2011).

14. A. Ryskin and H. Pleiner, Int. J. Bifurcation and Chaos **20**, 225 (2010).

15. G. Donzelli, R. Cerbino, and A. Vailati, Phys. Rev. Lett. **102**, 104503 (2009).

16. M. Bernardin, F. Comitani, and A. Vailati, Phys. Rev. E **85**, 066321 (2012).

17. M. I. Shliomis, B. L. Smorodin, and S. Kamiyama, Phil. Mag. **83**, 2139 (2003).

18. М. И. Шлиомис, УФН **112**, 427 (1974).

19. P. Kolodner, D. Bensimon, and C. M. Surko, Phys. Rev. Lett. **60**, 1723 (1988).

20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 6, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).

21. П. Роуч, *Вычислительная гидродинамика*, Мир, Москва (1980).