ЖЭТФ, 2013, том 143, вып. 6, стр. 1181–1191

МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИ ПРОВОДИМОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНОЙ ПРЫЖКА В РАЗРЕЖЕННЫХ МАССИВАХ КВАНТОВЫХ ТОЧЕК С ЧИСЛОМ ЗАПОЛНЕНИЯ $2 < \eta < 3$

А. В. Шумилин *

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 8 декабря 2012 г.

Рассматриваются механизмы магнитосопротивления, возникающие при прыжковой проводимости в массивах квантовых точек с числом заполнения $2 < \eta < 3$, связанные с тем, что в таких структурах электронные состояния, определяющие прыжковую проводимость, обладают орбитальным моментом количества движения $l = 1$. Детально исследуется механизм магнитосопротивления, связанный с существованием узловых плоскостей у волновых функций таких электронов. Рассматривается зависимость этого механизма от формы квантовых точек и размерности массива. Также при рассмотрении этого механизма учитывается спин-орбитальное взаимодействие и эффекты, связанные с интерференцией путей туннелирования. Кроме того, показывается, что изменение энергии орбитального движения электрона с $l = 1$ в магнитном поле приводит к дополнительному механизму положительного магнитосопротивления, квадратичного по полю.

DOI: 10.7868/S0044451013060189

1. ВВЕДЕНИЕ

В системах, в которых все электронные состояния локализованы, проводимость при конечных температурах может определяться прыжковым механизмом. Характерным примером таких систем являются компенсированные полупроводники, находящиеся на диэлектрической стороне перехода металл–диэлектрик. Тем не менее прыжковая проводимость существует и в ряде других систем (аморфных полупроводниках, гранулированных пленках и т. д.). Зависимость сопротивления системы с прыжковой проводимостью от температуры описывается законом Мотта или законом Эфроса – Шкловского, в зависимости от того, важна ли при рассматриваемых температурах кулоновская щель в плотности состояний [1].

Наиболее очевидным механизмом магнитосопротивления в системах с прыжковой проводимостью является магнитосопротивление за счет сжатия магнитным полем волновых функций. Это сжатие приводит к положительному значению магнитосопротивления, которое в сильных полях экспоненциально зависит от поля. Известно, однако, что в слабых магнитных полях оказывается важным ряд других механизмов. Самым известным из них является «интерференционный» механизм, предложенный Нгуеном, Шкловским и Спиваком в 1985 г. [2, 3]. Этот механизм интересен тем, что приводит к линейному по полю отрицательному значению магнитосопротивления. В легированных полупроводниках магнитосопротивление в режиме прыжковой проводимости, как правило, удается описать с помощью этих двух механизмов.

Тем не менее, даже в этом случае теория магнитосопротивления при прыжковой проводимости построена не до конца. Так, интерференционный механизм магнитосопротивления можно считать удовлетворительно исследованным теоретически только в пределе малого количества рассеивателей (наиболее последовательная теория «интерференционного» магнитосопротивления в этом пределе построена в работе [4]). Противоположному пределу большого числа рассеивателей посвящен целый ряд работ (использующих как аналитический, так и чис-

*E-mail: AVShumilin@mail.ioffe.ru

ленный подход), тем не менее результаты этих работ до настоящего времени служат предметом споров. Так, совсем недавно было показано, что многие существующие результаты, относящиеся к пределу большого числа рассеивателей, верны лишь в случае относительно слабого разброса энергий рассеивающих центров [5]. В этой работе была построена теория для противоположного предела, когда этот разброс велик.

Таким образом, несмотря на то что прыжковая проводимость исследуется уже достаточно давно, последовательная картина для описания магнитосопротивления в системах с прыжковой проводимостью далека от своего завершения.

Это особенно верно для сложных систем, отличающихся от обычных легированных полупроводников. В настоящее время существует ряд работ, посвященный «необычным» механизмам магнитосопротивления, которые могут возникать в системах с прыжковой проводимостью. Так, если случайный потенциал необычно мал (меньше интеграла перекрытия соседних примесных центров), то должно существовать отрицательное магнитосопротивление, связанное с сужением примесной зоны в магнитном поле [6]. Еще один механизм отрицательного магнитосопротивления был предсказан для прыжковой проводимости по квазиклассическим электронным островкам [7].

Существуют также и дополнительные механизмы положительного магнитосопротивления, в том случае, если важна проводимость по верхней зоне Хаббарда [8, 9], и в случае, если в системе есть примесь свободных спинов [10] (в работе [5] этот механизм рассматривается как часть интерференционного).

Большая часть таких механизмов требует выполнения некоторых специальных условий (например, участия в проводимости верхней зоны Хаббарда) и, таким образом, важна для определенного круга специальных систем. В данной работе рассматривается магнитосопротивление в еще одном классе специальных систем, который в последнее время начинает исследоваться экспериментально, — в массивах квантовых точек с прыжковой проводимостью со средним числом заполнения $2 < \nu < 3$. В таких системах электроны (как и в металлических гранулах) локализованы не на отдельных примесных атомах, а на агрегатах атомов — квантовых точках. Однако, в отличие от систем металлических гранул, расстояние между уровнями энергии в квантовых точках может быть большим, по сравнению, например, с температурой. При этом мы рассматриваем достаточно разреженные массивы, в которых прыжки между квантовыми точками (даже не ближайшими) не обязательно включают в себя ко-туннелирование через состояния на промежуточных точках.

Исследования прыжковой проводимости в массивах квантовых точек начались относительно недавно. В работе [11] было экспериментально показано существование прыжковой проводимости в массиве случайно расположенных квантовых точек в Si/Ge-гетероструктурах. В работе [12] было показано, что зависимость сопротивления от магнитного поля в таких системах имеет обычный для прыжковой проводимости вид: линейное отрицательное при малых полях и положительное квадратичное при больших. В работе [13] была измерена зависимость отрицательного магнитосопротивления в таких системах от расстояния локализации. Оказалось, что эта зависимость не может быть описана обычной теорией интерференционного магнитосопротивления. Это указывает на необходимость развития теории магнитных явлений при прыжковой проводимости в массивах квантовых точек.

В настоящее время существует теоретическое обоснование того, что в подобных системах возможна проводимость с переменной длиной прыжка [14]. Недавно [15] мы опубликовали предварительные результаты, показывающие, что в рассматриваемых системах квантовых точек существует новый механизм отрицательного магнитосопротивления, приводящий к той же зависимости сопротивления от магнитного поля, что и обычный интерференционный, но имеющий совершенно иные зависимости от температуры и расстояния локализации.

Природа этого механизма связана с тем, что в таких квантовых точках электрон находится в p-состоянии с несферической волновой функцией, имеющей узловую плоскость. В магнитном поле узловая плоскость исчезает, что приводит к отрицательному магнитосопротивлению. Однако этот результат был получен только для модели сферических квантовых точек, случайно разбросанных в трехмерном пространстве.

Настоящая работа посвящена развитию теории [15], в частности, мы обобщим результаты работы [15] для квантовых точек произвольной формы, а также для двумерной геометрии массива. Кроме того, мы рассмотрим как на предложенный в этой работе механизм магнитосопротивления могут влиять подбарьерное рассеяние и спин-орбитальное взаимодействие.

Недавно было показано [16], что в системах, в которых проводимость определяется прыжками между состоянием с отличным от нуля орбитальным моментом, должен существовать механизм магнитосопротивления, связанный с изменением энергии такого состояния в магнитном поле. Основные результаты работы [16] получены для систем с нарушенной инверсией по отношению к обращению времени (например, систем с магнитным порядком). В рассмотренных в работе [15] массивах квантовых точек такого нарушения нет. Тем не менее магнитное поле будет менять энергию орбитального движения электрона в p-состоянии, что должно приводить к дополнительному механизму влияния магнитного поля на проводимость. В данной работе мы покажем, что в системах квантовой точки такое изменение энергии приводит к положительному магнитосопротивлению, квадратичному по полю.

2. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЕ ЗА СЧЕТ ПОДАВЛЕНИЯ УЗЛОВЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Рассмотрим вначале механизм магнитосопротивления за счет изменения формы p-состояний в той модели, в которой он был предложен в работе [15]. В рамках этой модели рассматривается трехмерный массив случайно расположенных сферических квантовых точек с числом заполнения $2 < \nu < 3$, в котором существует прыжковая проводимость. При этом считается, что квантовые точки достаточно малы, так что энергия размерного квантования оказывается больше кулоновской.

С точки зрения прыжковой проводимости в этом случае можно считать, что квантовые точки, содержащие два электрона, являются пустыми, а те, которые содержат три электрона, — заполненными. При этом на заполненной точке два электрона, находящиеся в s-состоянии с равным нулю орбитальным моментом, имеют относительно малый радиус локализации и не участвуют в прыжковой проводимости. Туннелирует же третий электрон, находящийся в состоянии с орбитальным моментом $l = 1$.

В случае отсутствия магнитного поля волновые функции электронов с $l = 1$ могут быть выбраны вещественными. Вблизи квантовой точки (там, где влиянием случайного потенциала на волновые функции можно пренебречь) они будут иметь вид

$$\Psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \frac{r_{\mathbf{n}}}{r} R(r), \quad R(r) \sim \frac{1}{r_{dot}^{1/2} r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right). \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — некоторое направление, $r_{\mathbf{n}}$ — проекция радиуса-вектора на ось $\mathbf{n}$, $R(r)$ — радиальная часть волновой функции, a — расстояние локализации. Мы будем называть волновые функции вида (1) p-функциями в направлении $\mathbf{n}$. При строгой сферической симметрии p-функции вдоль различных направлений соответствуют одной и той же энергии (состояние вырождено). Однако всегда существующий в системах с прыжковой проводимостью случайный потенциал приводит к снятию этого вырождения. При этом каждой точке i соответствует некоторое направление $\mathbf{n}_i$, такое, что $\Psi_{\mathbf{n}_i}$ имеет наименьшую энергию. Остальные p-состояния с направлениями $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{l}_i$ ($\mathbf{n}_i \perp \mathbf{k}_i \perp \mathbf{l}_i$) отщеплены на энергию порядка $E_p \sim e^2 r_{dot}^2/\varepsilon r_{nn}^3$. Здесь r_{dot} — радиус точки, r_{nn} — расстояние между соседними квантовыми точками, ε — диэлектрическая проницаемость среды. Подразумевается при этом, что случайное поле создается зарядами на самих же квантовых точках, а также, возможно, другими зарядами с концентрацией, сравнимой с концентрацией точек. Мы будем рассматривать случай низких температур, $T \ll E_p$, т. е. считать, что локализованный электрон всегда находится в основном p-состоянии.

Известно (см. [1]), что прыжковая проводимость определяется энергетическими интегралами перекрытия волновых функций электронов на парах локализованных состояний i и j:

$$I_{ij}(\mathbf{r}_h) = \left\langle \Psi_{\mathbf{n}_i}(\mathbf{r}) | U | \Psi_{\mathbf{n}_j}(\mathbf{r} - \mathbf{r_h}) \right\rangle, \qquad (2)$$

где $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{n}_j$ — направления волновых функций локализованных состояний i и j, $\mathbf{r}_h$ — радиус-вектор между соответствующими квантовыми точками, U — потенциал квантовых точек.

Нас будут интересовать прыжки на расстояния сравнимые и большие, чем корреляционный радиус случайного потенциала r_{nn}, поэтому мы не можем напрямую использовать выражение (1) для вычисления интегралов перекрытия. Тем не менее при $r_{nn} \gg a$ мы можем считать движение на масштабах, сравнимых с r_{nn}, квазиклассическим. Это позволяет записать волновую функцию электрона в p-состоянии на больших расстояниях от квантовой точки в следующем виде:

$$\Psi_{\mathbf{n}_i}(\mathbf{r}) = (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{m}_i) R(r_0) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(\mathbf{r})\right). \qquad (3)$$

Здесь r_0 — некоторое значение расстояния до квантовой точки, при котором формула (1) еще применима, $S(\mathbf{r})$ — действие вдоль квазиклассической траектории, которая проходит через начальную квантовую точку и точку $\mathbf{r}$; $\mathbf{m}_i$ — единичный вектор в направлении, в котором эта траектория выходит из сферы $r = r_0$.

Вблизи квантовой точки j волновая функция $\Psi_{\mathbf{n}_i}$ будет иметь вид затухающей плоской волны (с мнимым волновым вектором), распространяющейся вдоль некоторого направления $\mathbf{m}_j$. С учетом этого интеграл перекрытия (2) можно выразить в виде

$$I_{ij}(\mathbf{r}_h) = (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{m}_i)(\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{m}_j) I_r(r_h), \tag{4}$$

где I_r зависит только от расстояния между квантовыми точками i и j, но не от направления соединяющего их вектора и не от реализации случайного потенциала. Важно, что кроме I_r, интеграл перекрытия $I_{\mathbf{n}_i,\mathbf{n}_j}$ содержит случайный член $(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{m}_i)(\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{m}_j)$, который может быть мал, например, если $\mathbf{n}_i \perp \mathbf{m}_i$.

Магнитное поле вносит в гамильтониан дополнительный член

$$V_H = \frac{e}{2m^* c} [\mathbf{H} \times \mathbf{r}] \cdot \mathbf{p}. \tag{5}$$

Этот член может смешивать основное p-состояние электрона с возбужденными p-состояниями, обладающими большей энергией из-за случайного потенциала или же из-за асимметрии формы квантовой точки.

Пусть основное p-состояние обладает волновой функцией, направленной вдоль некоторого направления $\mathbf{n}_i$. Рассмотрим поправку к этому состоянию от p-состояния, направленного вдоль вектора $\mathbf{k}_i$ (перпендикулярного $\mathbf{n}_i$) и отстоящего на энергию $E_{\mathbf{n}_i\mathbf{k}_i}$. В первом порядке теории возмущения по V_H эта поправка равна

$$\frac{\langle \Psi_{\mathbf{n}_i} | V_{\mathbf{H}} | \Psi_{\mathbf{k}_i} \rangle}{E_{\mathbf{n}_i\mathbf{k}_i}} = i\hbar \frac{e H_{\mathbf{l}_i}}{2m^* c E_{\mathbf{n}_i\mathbf{k}_i}}. \tag{6}$$

Здесь $H_{\mathbf{l}_i}$ — проекция магнитного поля на направление $\mathbf{l}_i$, перпендикулярное $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{k}_i$. Аналогичное выражение можно написать и для поправки за счет волновой функции, направленной вдоль $\mathbf{l}_i$.

С учетом формулы (6) выражение для интеграла перекрытия в магнитном поле может быть записано в следующем виде:

$$I_{ij} = \left(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{m}_i + \frac{i\hbar e H}{2m^* c} \frac{\Lambda_i}{E_p} \right) \times \\ \times \left(\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{m}_j + \frac{i\hbar e H}{2m^* c} \frac{\Lambda_j}{E_p} \right) I_r(r_h). \tag{7}$$

Здесь E_p — характерный масштаб энергии расщепления p-состояний. Безразмерные величины $\Lambda_i, \Lambda_j \sim 1$ включают произведения $\mathbf{l}_{i,j} \cdot \mathbf{m}_{i,j}$ и $\mathbf{k}_{i,j} \cdot \mathbf{m}_{i,j}$, определяющие туннелирования вдоль той же траектории, но из верхних p-состояний, а также конкретные значения энергий $E_{\mathbf{n}_i\mathbf{k}_i}$ и $E_{\mathbf{n}_i\mathbf{l}_i}$. Наличие случайных произведений $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{m}_i$ может приводить к случайной малости интеграла перекрытия I_{ij}. За счет поправок к волновым функциям (6) эта малость может сниматься. Важно при этом, что поправка (6) — мнимая. Из-за этого обратный процесс невозможен, т. е. если величина $I_{\mathbf{n}_i,\mathbf{n}_j}(\mathbf{r}_h)$ не мала при $H = 0$, то она не может приобрести эту малость в магнитном поле.

Явления, связанные с прыжковой проводимостью, обычно изучаются с помощью введения сетки эффективных резисторов (подробнее об этом см., например, монографию [1]). Сопротивления этой сетки определяются частотами прыжков между парами локализованных состояний Γ_{ij}. При этом Γ_{ij} зависят от интегралов перекрытия как $\Gamma_{ij} \propto |I_{\mathbf{n}_i,\mathbf{n}_j}|^2$. В работе [3] показано, что в случае, если поправка к сопротивлению в магнитном поле является малой, она может быть рассчитана по формуле

$$\ln \frac{R(H)}{R(0)} = -\left\langle \ln \frac{\Gamma_{ij}(H)}{\Gamma_{ij}(0)} \right\rangle = \\ = -\left\langle \ln \frac{\left| I_{\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j}(H) \right|^2}{\left| I_{\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j}(0) \right|^2} \right\rangle. \tag{8}$$

В этом выражении $R(H)$ — сопротивление системы в магнитном поле. Угловые скобки означают усреднение по критическим резисторам, определяющим протекание через сетку сопротивлений.

Учитывая зависимость интеграла перекрытия от магнитного поля (7), можно записать следующее выражение для рассматриваемого нами механизма магнитосопротивления:

$$\ln \frac{R(H)}{R(0)} = -2 \left\langle \ln \frac{\left| \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{m}_i + i\Lambda_i \hbar\omega_c / 2E_p \right|^2}{\left| \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{m}_i \right|^2} \right\rangle. \tag{9}$$

Здесь $\omega_c = eH/m^* c$ — циклотронная частота. Предполагается, что направления $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{m}_i$ некоррелированы и по ним можно усреднять независимо. Это предположение выполняется, в частности, всегда при проводимости с переменной длиной прыжка в трехмерном массиве. В этом случае направление $\mathbf{n}_i$ определяется окружением точки i, а $\mathbf{m}_i$ — направлением на достаточно далекую квантовую точку, на которую происходит прыжок.

Можно показать, что в малых полях основной вклад в формуле (9) дает относительно небольшая область параметров, в которой знаменатель в правой части выражения мал, $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{m}_i < \Lambda_i \hbar\omega_c / 2E_p$. Эта область параметров вносит линейный по полю вклад в магнитосопротивление (вклад остальных реализаций пропорционален H^2)

$$\ln\frac{R(H)}{R(0)}\propto-\frac{\hbar\omega_c}{E_p}. \qquad (10)$$

Интересно отметить, что в выражение (10) не входят температура и характерная длина прыжка (которая связана с температурой). Таким образом, рассматриваемый нами механизм магнитосопротивления зависит от температуры только за счет условий применимости выражения (10). Так, должно выполняться условие $\hbar\omega_c > E_p\exp(-E_p/T)$, являющееся следствием конечной вероятности заполнения возбужденных p-состояний.

В работе [15] рассматривалась модель идеальных сферических квантовых точек. При этом в изолированной точке p-состояния вырождены (т. е. $E_p = 0$). Это вырождение, однако, снимается за счет случайного потенциала, который всегда существует в системах с прыжковой проводимостью.

Учет этого потенциала приводит к следующему выражению для магнитосопротивления:

$$\ln\frac{R(H)}{R(0)}\propto-\frac{\hbar H}{m^*c}\,\frac{\varepsilon r_{nn}^3}{er_{dot}^2}. \qquad (11)$$

3. УЧЕТ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ ТОЧКИ И ГЕОМЕТРИИ СИСТЕМЫ

Как правило, в реально существующих массивах квантовых точек форма точек не является сферической. При этом расщепление p-состояний может происходить без всякого случайного потенциала.

Строго говоря, само понятие p-состояний с волновой функцией типа (1) применимо только к сферическим точкам. Тем не менее можно показать, что необходимое нам свойство функции (1) — наличие узловой плоскости — существует в квантовой точке любой формы.

Рассмотрим простейший пример квантовой точки, имеющей форму параллелепипеда со сторонами $l_z > l_y > l_x$. В такой точке «движение» электрона вдоль направлений x, y и z внутри квантовой точки можно приближенно считать независимым. В случае малой квантовой точки, на которой находятся три электрона, при низких температурах первые два электрона будут находиться в основном координатном состоянии и иметь противоположные спины. Третий же электрон (который в нашем приближении и отвечает за прыжковую проводимость) будет находится в состоянии, меняющем знак вдоль оси z, т. е. его волновая функция будет иметь узловую плоскость $z = 0$.

Таким образом, аналогом p-функций в рассматриваемой нами точке являются такие волновые функции электрона, которые меняют знак вдоль одной из осей. Роль энергии E_p при этом будет выполнять энергия

$$E_p^{(geom)}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m^*}\left(\frac{1}{l_z^2}-\frac{1}{l_y^2}\right). \qquad (12)$$

В случае произвольной формы квантовой точки $E_p^{(geom)}$ имеет более сложный вид, но можно ожидать, по крайней мере, что если различие в геометрических размерах точки не слишком велико, то $E_p^{(geom)}$ будет иметь порядок $\hbar^2\Delta r_{dot}/m^*r_{dot}^3$, где Δr_{dot} — различие между двумя наибольшими размерами точки.

Важно, что вне зависимости от формы квантовой точки, без магнитного поля волновая функция электрона может быть выбрана вещественной. Координатная часть волновой функции третьего электрона, находящегося на квантовой точке, ортогональна волновой функции основного состояния (в котором находится первый электрон, попадающий на квантовую точку), и, следовательно, эта функция знакопеременна. Таким образом, эта функция должна иметь узловую плоскость (возможно, сложной формы).

На больших расстояниях от квантовой точки эта функция может быть записана в виде (аналогичном формуле (3))

$$\Psi_i(r)=\Theta_i(\mathbf{m}_i)R(r_0)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\mathbf{r})\right), \qquad (13)$$

где Θ_i — некая сложная функция направления $\mathbf{m}_i$. Вблизи узловой плоскости, однако, эта функция может быть представлена в виде $\chi_i(\phi)\mathbf{n}_i(\phi)\cdot\mathbf{m}_i$, где ϕ — координата вдоль пересечения узловой плоскости и плоскости $r = r_0$, χ_i — некоторая функция. Подставляя (13) в общее выражение для магнитосопротивления (8), можно прийти к аналогу выражения (9), содержащему, однако, помимо усреднения по Λ_i и взаимному направлению $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{m}_i$, также усреднение по χ_i.

Мы не можем провести это усреднение аналитически для произвольной формы квантовой точки, поэтому мы ограничимся двумя замечаниями. Во-первых, несмотря на то, что направления $\mathbf{n}_i$ больше не задаются случайным потенциалом, а связаны с формой квантовой точки, направление $\mathbf{m}_i$ по-прежнему остается случайным — оно определяется направлением на ближайшую соседнюю квантовую точку с энергией, близкой к уровню Ферми. Во-вторых, поскольку Θ_i имеет только одну узловую плоскость, характерным масштабом изменения этой функции является поворот $\mathbf{m}_i$ на угол порядка π. Соответственно, можно считать, что $\chi_i \sim 1$. С учетом всего сказанного выше, магнитосопротивление, связанное с узловыми плоскостями волновых функций Ψ_i, описывается выражением (10) даже в случае несферической формы квантовых точек. Однако в этом случае энергия E_p определяется не только случайным потенциалом, но и формой квантовой точки.

Энергию $E_p^{(geom)}$ необходимо сравнить с расщеплением p-состояний за счет случайного потенциала $E_p^{(rand)} \sim e^2 r_{dot}^2 / r_{nn}^3$, где r_{nn} — характерное расстояние между квантовыми точками. Если $E_p^{(rand)} > E_p^{(geom)}$, то расщепление p-уровней определяется случайным потенциалом, и выражение (11) справедливо. В противном случае ($E_p^{(rand)} < E_p^{(geom)}$) справедливо выражение (10), но не (11).

Отметим также, что часто экспериментально полученные массивы квантовых точек имеют двумерную геометрию — все входящие в них квантовые точки лежат в одной плоскости. Поэтому следует рассмотреть предсказанный механизм магнитосопротивления в двумерной геометрии, в которой, вообще говоря, нарушается условие некоррелированности направлений $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$, так как и форма точек, и направление прыжков имеют общее выделенное направление (ось роста).

Чаще всего квантовые точки имеют форму плоских блинов или конусов, т. е. они имеют размеры в плоскости много большие, чем их размер вдоль оси роста z, при этом основное состояние третьего электрона имеет узловое направление в плоскости туннелирования. Это направление играет ту же роль, что и узловая плоскость в трехмерном случае. Учитывая, что эти узловые направления не связаны с направлениями прыжка, можно показать, что выражение (10) справедливо и в двумерном случае (для плоских квантовых точек).

Тем не менее, по крайней мере теоретически, можно представить себе и противоположный случай так называемых вертикальных квантовых точек, когда наибольшим размером квантовой точки является размер перпендикулярный плоскости, в которой эти квантовые точки выращены и в которой происходит туннелирование. При этом мы предполагаем, что точки целиком окружены однородной матрицей, т. е. образец симметричен относительно плоскости, в которой расположены точки.

В этом случае (по крайней мере без случайного потенциала) узловая плоскость волновой функции основного состояния третьего (туннелирующего) электрона совпадает с плоскостью туннелирования. Покажем, что это может приводить к большому отрицательному магнитосопротивлению.

В рамках использованных нами приближений, при отсутствии случайного потенциала, интеграл перекрытия I_{zz} p-функций, направленных вдоль z на квантовых точках, лежащих в плоскости xy, равен нулю. Можно показать однако, что этот интеграл существует, но оказывается мал по параметру a/r_h:

$$I_{zz} \sim \frac{a}{r_h} I_r, \quad I_{xx} \sim I_{yy} \sim I_r. \tag{14}$$

Включение случайного потенциала также приводит к конечности этого интеграла. Важно, что если случайный потенциал мал, то интеграл перекрытия волновых функций, направленных вдоль z, оказывается много меньше интеграла перекрытия p-функций, направленных в той же плоскости, где происходит туннелирование.

Предполагая, что порядок величины интеграла перекрытия I_{zz} описывается выражением (14), можно записать выражение для магнитосопротивления при $\hbar\omega_c < E_p$ в следующем виде:

$$\ln \frac{R(H)}{R(0)} = -\left\langle \ln \frac{|I_{zz}(H)|^2}{|I_{zz}(0)|^2} \right\rangle \sim \sim -2 \ln \left(1 + \frac{r_h \hbar^2 \omega_c^2}{a E_p^2} \right). \tag{15}$$

В малых полях это магнитосопротивление квадратично по полю, однако при $r_h \hbar^2 \omega_c^2 > a E_p^2$ оно становится экспоненциально большим. При $\hbar\omega_c \geq E_p$ магнитосопротивление насыщается на уровне равном примерно $-2 \ln r_h/a$.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ИНТЕРФЕРЕНЦИЕЙ ПУТЕЙ

До сих пор механизм магнитосопротивления, связанный с несферичностью волновых функций, рассматривался отдельно от другого механизма магнитосопротивления, приводящего к линейному отрицательному магнитосопротивлению, — интерференционного механизма, который связан с наличием промежуточных центров при туннелировании. В данной работе мы сосредоточим наше внимание на наиболее простом случае, когда в процесс прыжка включено не более одного промежуточного центра (промежуточной квантовой точки). Этот случай соответствует ситуации, когда вероятность найти промежуточную квантовую точку при туннелировании мала.

В случае, если туннелирование между квантовыми точками i и j происходит с участием промежуточной точки k, эффективный интеграл перекрытия в магнитном поле может быть записан в виде

$$I_{ij}^{eff}(H) = I_{ij}(H) + \sum_{\alpha} \frac{I_{i(k,\alpha)}(H) I_{(k,\alpha)j}(H) e^{i\varphi}}{E_{k,\alpha}}. \quad (16)$$

Здесь $I_{ij}(H)$, $I_{i(k,\alpha)}(H)$ и $I_{(k,\alpha)j}(H)$ — интегралы перекрытия между соответствующими квантовыми точками, определяемые выражением (7), при этом мы учитываем возможность подбарьерного рассеяния на всех трех p-состояниях, пронумерованных индексом α, в промежуточной квантовой точке k; $E_{k,\alpha}$ — энергия состояния α-электрона в точке k (предполагается, что она много больше по модулю, чем энергия электрона в точках i и j, непосредственно участвующих в прыжке); φ — разница фаз, появляющаяся за счет магнитного потока через треугольник ijk. По порядку величины эта разница фаз равна $\varphi \sim Ha^{1/2} r_h^{3/2} / \Phi_0$, где Φ_0 — квант магнитного потока. Отметим также, что величины $\mathbf{m}_i$, входящие в интегралы перекрытия I_{ij} и $I_{i(k,\alpha)}$ различны. Тем не менее эти величины должны быть близки, так как промежуточная квантовая точка должна находиться вблизи прямой, соединяющей точки i и j. Можно показать, что

$$\mathbf{m}_i(I_{ij}) \cdot \mathbf{m}_i(I_{i(k,\alpha)}) \sim 1 - a/r_{ik}, \quad (17)$$

где r_{ik} — расстояние между точками i и k.

Оба механизма магнитосопротивления — интерференционный и связанный с несферичностью волновых функций — основаны на том, что существуют редкие конфигурации, когда интеграл перекрытия в нулевом магнитном поле $I_{ij}^{eff}(0)$ мал. Однако причина этой малости различна. Интерференционный механизм магнитосопротивления предполагает, что малость является следствием взаимной компенсации слагаемых в формуле (16) (т. е. существует деструктивная интерференция путей туннелирования), в то время как рассмотренный в нашей статье механизм предполагает, что эта малость является следствием малости произведений $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{m}_i$ в формуле (7).

Рассмотрим сначала, может ли при наличии двух путей туннелирования реализовываться случай, когда величина $I_{ij}^{eff}(0)$ мала только за счет малости $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{m}_i$, как это было в предыдущих разделах данной работы. Нетрудно заметить, что для этого нужно, чтобы оба слагаемых в формуле (16) были малы одновременно. Это происходит в том случае, когда можно пренебречь отношением расстояния локализации к расстоянию r_{ik}. В случае, когда в прыжке участвует один промежуточный центр, отношение $a/r_{ik} \sim a/r_h$, вообще говоря, мало. Можно показать, однако, что его конечное значение приводит к ограничению на значение магнитного поля в выражении (10) $\hbar\omega_c/E_p > \sqrt{a/r_h}$. В случае, когда это условие выполняется, магнитосопротивление, связанное с несферичностью волновых функций, можно рассматривать отдельно от интерференционного магнитосопротивления. В противоположном случае малых полей $\hbar\omega_c/E_p < \sqrt{a/r_h}$ единственная возможная причина малости $I_{ij}^{eff}(0)$ заключается в деструктивной интерференции.

Рассмотрим теперь вторую причину малости интеграла перекрытия $I_{ij}^{eff}(0)$ — взаимное погашение слагаемых в формуле (16). Эта причина лежит в основе интерференционного магнитосопротивления. В классической теории интерференционного магнитосопротивления, однако, предполагается, что эта малость снимается в магнитном поле только за счет появления фазы φ. Покажем, что при проводимости по p-состояниям существует также и вторая причина снятия этой малости — изменение волновых функций p-состояний в магнитном поле. Для этого представим интеграл перекрытия (7) без учета квадратичных по H членов в виде

$$I_{ij}(H) = I_{ij}(0) \left(1 + K_{ij} \frac{i\hbar\omega_c}{E_p} \right), \quad (18)$$

$$K_{ij} = \frac{\Lambda_i}{2\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{m}_i} + \frac{\Lambda_j}{2\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{m}_j}. \quad (19)$$

Раскладывая значение (16) до первого порядка по магнитному полю, получим

$$\begin{aligned} I_{ij}^{eff}(H) \approx I_{ij}^{eff}(0) &+ \\ + i I_{ij} \frac{\hbar\omega_c}{E_p} K_{ij} &+ i \sum_{\alpha} \frac{I_{i(k,\alpha)} I_{(k,\alpha)j}}{E_{k,\alpha}} \times \\ &\times \left[\frac{\hbar\omega_c}{E_p} (K_{i(k,\alpha)} + K_{(k,\alpha)j}) + \varphi \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

Здесь I_{ij}, $I_{i(k,\alpha)}$ и $I_{(k,\alpha)j}$ соответствуют интегралам перекрытия в нулевом магнитном поле. Для конфигураций, соответствующих сильной деструктивной интерференции, $I_{ij}^{eff}(0) \sim 0$ из-за сокращения слагаемых в формуле (16) в нулевом поле. Однако из-за того, что величины K_{ij}, $K_{i(k,\alpha)}$ и $K_{(k,\alpha)j}$ различны, в мнимой части выражения (20), пропорциональной полю, подобного сокращения не происходит. Соответственно, поправки за счет магнитного поля к интегралам перекрытия (18) могут нарушать деструктивную интерференцию точно так же, как и фаза φ.

Проводя конфигурационное усреднение, аналогично тому, как это делается для интерференционного механизма магнитосопротивления, получим для линейной по магнитному полю поправки к сопротивлению

$$\ln \frac{R(H)}{R(0)} \propto -P_1 \left(\langle \varphi \rangle + \overline{K} \frac{\hbar \omega_c}{E_p} \right). \qquad (21)$$

Здесь P_1 — вероятность того, что критический резистор будет включать в себя один рассеиватель (вероятностью того, что рассеивателей будет больше одного, мы пренебрегаем), $\langle \varphi \rangle$ — усредненная по конфигурациям разность фаз φ, $\overline{K}$ — константа, определяемая конфигурационным усреднением величин K_{ij}.

Несферичность волновых функций приводит к появлению вклада в магнитосопротивление за счет того, что деструктивная интерференция (появляющаяся за счет промежуточного центра) нарушается не фазой φ, а комплексной частью интегралов перекрытия (7). Этот вклад в магнитосопротивление зависит от длины прыжка только через вероятность найти промежуточный центр P_1. Если такой центр есть, то соответствующий резистор вносит вклад в магнитосопротивление, пропорциональный ω_c/E_p. Однако в случае, если прыжок происходит без участия промежуточных центров, также существует вклад в магнитосопротивление, пропорциональный ω_c/E_p. Таким образом, даже если в системе есть рассеивающие центры, несферичность волновых функций приводит к дополнительному вкладу в магнитосопротивление, определяемому формулой (10). В случае, когда рассеивающих центров нет, этот вклад определяется случайной малостью интеграла перекрытия, связанной со случайным взаимным направлением векторов $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{m}_i$, а в том случае, когда такие центры есть, этот вклад определяется нарушением деструктивной интерференции из-за комплексных поправок к интегралам перекрытия (7).

5. УЧЕТ РОЛИ СПИН-ОРБИТАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

До сих пор мы считали, что волновые функции p-состояний расщеплены либо за счет случайного электростатического потенциала, либо за счет асимметрии квантовой точки. В обоих случаях это приводило к тому, что в нулевом магнитном поле волновые функции были вещественными, что, в свою очередь, приводило к магнитосопротивлению (10). В этом разделе мы покажем, что в присутствии спин-орбитального взаимодействия существует еще один механизм расщепления p-состояний, который приводит к комплексным собственным волновым функциям даже без магнитного поля. Таким образом, спин-орбитальное взаимодействие ограничивает область применимости выражения (10).

Действительно, потенциальный рельеф, наличие которого и обеспечивает само существование квантовой точки, на которой локализован электрон, с необходимостью приводит к спин-орбитальному взаимодействию Рашбы. Это взаимодействие может быть описано дополнительным членом в гамильтониане

$$H_{SO} = \alpha_{SO} \left[\sigma \times \mathbf{p} \right] \cdot \nabla U. \qquad (22)$$

Здесь α_{SO} — константа спин-орбитального взаимодействия, ∇U — градиент потенциальной энергии электрона (связанной с квантовой точкой), σ — вектор, составленный из матриц Паули в спиновом пространстве, и $\mathbf{p}$ — оператор импульса. В случае сферически симметричной квантовой точки H_{SO} можно представить в виде

$$H_{SO} = \frac{\alpha_{SO}}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \sigma \cdot \left[\mathbf{r} \times \mathbf{p} \right] = \frac{\alpha_{SO}}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \sigma \cdot \mathbf{l}, \qquad (23)$$

где $\mathbf{l}$ — оператор орбитального момента. Нетрудно заметить, что H_{SO} аналогичен по форме магнитной энергии (5), где на месте магнитного поля стоит оператор спина. Таким образом, H_{SO}, так же как и внешнее магнитное поле, смешивает различные p-функции. Собственные функции H_{SO} — это волновые функции с определенным полным моментом, являющиеся комплексными комбинациями p-функций и не имеющие узловых плоскостей.

Спин-орбитальное расщепление волновых функций с $l = 1$ имеет порядок

$$\Delta_{SO} \sim \alpha_{SO} \frac{E_{QD}}{r_{dot}^2}. \qquad (24)$$

Здесь E_{QD} — глубина потенциала квантовой точки.

В случае, если $\Delta_{SO} > E_p$, расщепление p-функций происходит за счет спин-орбитального взаимодействия, а не за счет случайного потенциала. При этом даже без магнитного поля волновая функция туннелирующего электрона оказывается существенно комплексной и не имеет узловой плоскости. Описанный в данной работе механизм магнитосопротивления при этом не применим.

В противоположном случае ($\Delta_{SO} \ll E_p$) расщепление p-функций определяется энергией E_p. Однако спин-орбитальное взаимодействие все же приводит к малым мнимым поправкам к p-функциям, порядка Δ_{SO}/E_p. Это накладывает дополнительное ограничение на применимость теории при малых полях $\hbar\omega_c > \Delta_{SO}$.

6. МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЕ ЗА СЧЕТ ИЗМЕНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ИОНИЗАЦИИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Недавно было показано [16], что тот факт, что туннелирующий электрон находится в состоянии с орбитальным моментом (например, в p-состоянии), может приводить к еще одному механизму магнитосопротивления, связанному с изменением энергии орбитального движения в магнитном поле. В работе [16] это магнитосопротивление при различных условиях имело разный знак и могло быть большим. Тем не менее большинство результатов [16] получено для случая, когда в системе существует нарушение симметрии по отношению к инверсии времени (даже без внешнего магнитного поля), связанное, например, с наличием магнитных примесей.

В рассматриваемых нами системах такого нарушения нет, тем не менее энергия орбитального движения электрона все равно может меняться в магнитном поле, что должно сказываться на магнитосопротивлении.

Вернемся к выражениям (3) и (4). Однако обратим теперь внимание на член $I_r(r_h)$ в формуле (4). Для этого члена можно написать

$$I_r \propto \exp(iS_{12}/\hbar), \tag{25}$$

где S_{12} соответствует подбарьерному действию, $\exp(iS_{12}/\hbar)$ приближенно можно записать как $\exp(-r_h/a) = \exp(-kr_h)$, где r_h — расстояние между центрами, a — расстояние локализации, k — подбарьерный импульс, $k = \sqrt{2mE_o}/\hbar$, E_o — энергия орбитального движения электрона.

В работе [17] показано, что в магнитном поле часть S_{12}, соответствующая r_h, может меняться за счет искривления траектории, приводя к известному магнитосопротивлению за счет сжатия волновых функций. Однако если электрон обладает орбитальным моментом, кроме этого меняется и энергия орбитального движения электрона. При этом дополнительные эффекты в магнитосопротивлении могут быть связаны с $k = 1/a$.

Оператор взаимодействия с постоянным магнитным полем (5) может быть записан в виде

$$V_H = \frac{\hbar e}{2m^*c}\,(\mathbf{H}\cdot\mathbf{l}), \tag{26}$$

где $\mathbf{l}$ — оператор орбитального момента электрона. В работе [16] в случае нарушения симметрии по обращению ко времени возникали ситуации, когда магнитосопротивление, вызванное изменением k в магнитном поле, было линейно по полю. Это соответствует поправкам первого порядка к энергии орбитального движения E_o за счет V_H. Нетрудно заметить, что в нашем случае массивов квантовых точек (не содержащих магнитных атомов) таких поправок нет. Действительно, такие поправки соответствовали бы случаю, когда основное состояние электрона имеет отличную от нуля проекцию орбитального момента на ось магнитного поля. Несложно показать, что в рассматриваемых нами p-состояниях средняя проекция орбитального момента на любую ось равна нулю (хотя сам орбитальный момент равен единице).

Поправка к энергии орбитального движения E_o за счет V_H возникает во втором порядке теории возмущения за счет того, что магнитное поле смешивает основное состояние $\Psi_{\mathbf{n}_i}$ с возбужденными p-состояниями $\Psi_{\mathbf{k}_i}$ и $\Psi_{\mathbf{l}_i}$:

$$E_o^{(2)} = -\left(\frac{\hbar e}{2m^*c}\right)^2\left(\frac{H_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{nl}}} + \frac{H_{\mathbf{l}}^2}{E_{\mathbf{nk}}}\right). \tag{27}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — ось, соответствующая основному p-состоянию квантовой точки, а $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ — оси, соответствующие возбужденным p-состояниям; $H_{\mathbf{k}}$ и $H_{\mathbf{l}}$ — проекции магнитного поля на эти оси; $E_{\mathbf{nl}}$ и $E_{\mathbf{nk}}$ — разницы энергии между возбужденными и основным p-состоянием. Энергия $E_o^{(2)}$ отрицательна (как и любая поправка второго порядка к энергии основного состояния) и по порядку величины равна $E_o^{(2)} \sim -(\hbar\omega_c)^2/E_p$.

С помощью выражения (8) можно показать, что такая поправка к орбитальной энергии приводит к магнитосопротивлению

$$\ln\frac{R(H)}{R(0)} \sim \frac{1}{\hbar} r_h \sqrt{m}\frac{(\hbar\omega_c)^2}{E_p\sqrt{I_0}}. \tag{28}$$

В отличие от рассмотренного в работе [16] случая магнитных органических молекул для квантовых точек, это магнитосопротивление всегда положительно и квадратично по полю.

7. ОБСУЖДЕНИЕ

В работе [15] было показано, что для сферических квантовых точек отрицательное магнитосопротивление, связанное с искажением p-состояний в магнитном поле, могло быть достаточно большим (около 10 % при реалистических параметрах массива). Большинство рассмотренных в настоящей работе эффектов накладывает ограничения на существование такого магнитосопротивления. Так, заметная асимметрия квантовой точки приведет к увеличению E_p (относительно всегда существующего вклада в E_p, связанного со случайным потенциалом) и пропорциональному уменьшению линейного магнитосопротивления. Включение спин-орбитального взаимодействия приводит к нарушению формы p-функции и к дополнительному ограничению применимости теории в малых полях. Учет интерференции фактически сохраняет эффект, но по мере приближения к переходу металл–диэлектрик вклад интерференционного магнитосопротивления растет, в то время как вклад в магнитосопротивление, связанный с видом p-функций, остается неизменным. Таким образом, можно предполагать, что для того чтобы в массивах квантовых точек наблюдался обсуждаемый механизм магнитосопротивления, эти массивы должны обладать тремя свойствами. Во-первых, квантовые точки в этих массивах должны иметь достаточно правильную форму, не приводящую к большой E_p^{geom}, во-вторых, константа спин-орбитального взаимодействия в материале, из которого состоят точки, должна быть мала, и, в-третьих, этот массив должен находиться глубоко на диэлектрической стороне перехода металл–диэлектрик, т. е. расстояние локализации электрона в квантовой точке должно быть заметно меньше характерного расстояния между точками.

В настоящее время единственной экспериментальной реализацией массивов квантовых точек с прыжковой проводимостью, для которых имеются детальные результаты измерения магнитосопротивления, являются исследованные в работах [11–13] массивы Si/Ge-точек. Однако объяснение магнитосопротивления в этих точках с помощью предложенного в этой работе механизма сталкивается с серьезными трудностями. В первую очередь, характерные расстояния локализации электрона в этих массивах заметно превышают расстояния между точками [13], соответственно, при туннелировании необходимо учитывать большое количество рассеивателей. Маловероятно, что при этом эффекты, связанные с формой p-функций, будут преобладать над интерференционными эффектами. Кроме того, в работах [18, 19] при численном моделировании рассматривающихся квантовых точек было показано, что значительную роль в расщеплении p-состояний в этих точках играет спин-орбитальное взаимодействие. При этом важность этого взаимодействия определялась структурой границы квантовой точки [18]. При моделировании квантовых точек с резкой границей форма p-функции в целом сохранялась, однако если граница точки считалась размытой, то спин-орбитальное взаимодействие полностью размывало узловую плоскость в волновой функции. Существенная роль спин-орбитального взаимодействия также ставит под вопрос применимость полученных результатов к квантовым точкам [13]. Можно предположить, однако, что рассмотренные механизмы магнитосопротивления будут важны в случае более разреженных массивов квантовых точек, при выполнении условия $a < r_{nn}$.

Итак, мы детально рассмотрели дополнительные механизмы магнитосопротивления, возникающие при проводимости по состояниям с моментом $l = 1$ в квантовых точках. Мы показали, что механизм магнитосопротивления, связанный с разрушением узловых плоскостей p-состояний в магнитном поле, существует и в случае несферических квантовых точек, однако в этом случае его сила определяется формой квантовых точек, а не случайным потенциалом. Спин-орбитальное взаимодействие ограничивает применимость этого механизма (сильное спин-орбитальное взаимодействие разрушает его полностью). Учет интерференционных эффектов сам по себе не нарушает механизма магнитосопротивления, связанного с формой p-функций, но конкурирует с этим механизмом. Кроме того, мы показали, что учет изменения энергии орбитального движения электрона с $l = 1$ в магнитном поле приводит к положительному магнитосопротивлению квадратичному по полю.

Автор благодарит Н. П. Степину, А. В. Ненашева и В. И. Козуба за плодотворные дискуссии. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № мол а 12-02-31655).

ЛИТЕРАТУРА

1. B. I. Shklovskii and A. L. Efros, *Electronic Properties of Doped Semiconductors*, Springer, Berlin (1984).

2. В. Л. Нгуен, Б. З. Спивак, Б. И. Шкловский, Письма в ЖЭТФ **41**, 35 (1985); V. L. Nguyen, B. Z. Spivak, and B. I. Shklovskii, ЖЭТФ **89**, 1770 (1985).

3. B. I. Shklovskii and B. Z. Spivak, in: *Hopping Transport in Solids*, ed. by M. Pollak and B. Shklovskii, Elsevier (1991), p. 271.

4. M. E. Raikh and G. F. Wessels, Phys. Rev. B **47**, 15609 (1993).

5. A. V. Shumilin and V. I. Kozub, Phys. Rev. B **85**, 115203 (2012).

6. M. E. Raikh, Sol. St. Comm. **75**, 935 (1990).

7. M. E. Raikh and L. I. Glazman, Phys. Rev. Lett. **75**, 128 (1995).

8. A. Kurobe and H. Kamimura, J. Phys. Soc. Jpn. **51**, 1904 (1982).

9. K. A. Matveev, L. I. Glazman, P. Clarke, D. Ephron, and M. R. Beasley, Phys. Rev. B **52**, 5289 (1995).

10. H. L. Zhao, B. Z. Spivak, M. P. Gelfand, and S. Feng, Phys. Rev. B **44**, 10760 (1991).

11. A. I. Yakimov, A. V. Dvurechenskii, A. V. Nenashev, and A. I. Nikiforov, Phys. Rev. B **68**, 205310 (2003).

12. А. И. Якимов, А. В. Двуреченский, Г. М. Миньков и др., ЖЭТФ **127**, 817 (2005).

13. N. P. Stepina, E. S. Koptev, A. G. Pogosov et al., J. Phys.: Confer. Series **376**, 012016 (2012).

14. J. Zhang and B. I. Shklovskii, Phys. Rev. B **70**, 115317 (2004).

15. А. В. Шумилин, Письма в ЖЭТФ **95**, 462 (2012).

16. A. S. Alexandrov, V. A. Dediu, and V. V. Kabanov, Phys. Rev. Lett. **108**, 186601 (2012).

17. А. С. Иоселевич, ФТП **15**, 2373 (1981).

18. A. V. Dvurechenskii, A. V. Nenashev, and A. I. Yakimov, Nanotechnology **13**, 75 (2002).

19. A. V. Nenashev, A. V. Dvurechenskii, and A. F. Zinovieva, Phys. Rev. B **67**, 205301 (2003).