ЖЭТФ, 2013, том 143, вып. 6, стр. 1039–1047 © 2013

АНИЗОТРОПИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

В. В. Учайкин *

Ульяновский государственный университет
432017, Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 29 октября 2012 г.

Рассматривается проблема анизотропии галактических космических лучей в двух версиях дробно-дифференциальной модели аномальной диффузии. На примере простейшей задачи о распространении космических лучей от точечного мгновенного источника в безграничной среде показано, что переход от стандартной диффузионной к дробно-дифференциальной модели Лагутина – Учайкина (с характеристическим показателем $\alpha = 3/5$ и учетом конечной скорости свободного движения частиц), приводящий к появлению излома в энергетическом спектре при 10^6 ГэВ, увеличивает коэффициент анизотропии всего на 20 %, тогда как в модели Лагутина – Тюменцева (характеризующейся показателями $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.8$, долговременным пребыванием частиц в ловушках и бесконечной скоростью их перелетов) коэффициент анизотропии близок к единице. Причины этого в неправильном выборе параметров модели Лагутина – Тюменцева.

DOI: 10.7868/S0044451013060037

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] нами была введена и в последующих работах [2, 3] и др. использована новая математическая модель переноса космических лучей в Галактике, основанная на дифференциальном исчислении дробных порядков. В ее основе лежит дробно-дифференциальное уравнение для пропагатора $G(\mathbf{r}, t)$, имеющее вид

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -K(-\triangle)^{\alpha/2} G(\mathbf{r}, t) = \delta(t)\delta(\mathbf{r}), \quad K > 0, \quad \alpha \in (0, 2]. \tag{1}$$

При $\alpha = 2$ оно превращается в обычное (нормальное) диффузионное уравнение, решение которого выражается через трехмерную плотность изотропного гауссова распределения. При $\alpha < 2$ уравнение (1) описывает изотропное леви-движение, его решение представляется с помощью устойчивой плотности Леви – Фельдгейма, отличающейся от гауссовой наличием степенных хвостов, приводящим к бесконечной дисперсии. Подобно броуновскому, леви-движение может быть построено на основе нескольких постулатов, но может быть получено предельным переходом от последовательности перелетов, разделенных интервалами неподвижности (скачкообразный процесс, обозначаемый в англоязычной литературе аббревиатурой CTRW — Continuous Time Random Walk) [4]. При $\alpha > 1$ уравнение (1) может быть получено как асимптотический предел уравнения непрерывного блуждания с конечной скоростью [5]. При $\alpha < 1$ средняя длина перелета оказывается бесконечной, что при мгновенности перелетов перестает соответствовать реальному процессу даже в качестве аппроксимации.

В рамках стандартной теории переноса космических лучей коэффициент анизотропии потока, создаваемого точечным мгновенным источником в однородной безграничной среде, определяется известной формулой [6]

$$\delta(r, t) = \frac{3r}{2vt}. \tag{2}$$

При ее выводе использованы P_1-приближение теории переноса [7], в котором угловое распределение представляется в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} vn(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \tag{3}$$

*E-mail: vuchaikin@gmail.com

и второй закон Фика, выражающий вектор плотности тока $\mathbf{j}$ через градиент концентрации n:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -K \text{grad}\, n(\mathbf{r}, t). \tag{4}$$

Следует отметить, что, во-первых, разложение (3) предполагает слабую анизотропию потока в рассматриваемой точке и, во-вторых, само диффузионное приближение применимо для описания процесса блужданий при достаточно больших временах, когда частица совершит достаточное число перелетов, чтобы распределение суммарного смещения перешло в асимптотический режим.

При $\alpha < 2$ дробная степень лапласиана $-(-\triangle)^{\alpha/2}$ представляет собой нелокальный (интегральный по пространству) оператор с асимптотически степенным ядром

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \propto |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3-\alpha},$$

отражающим далекие турбулентные корреляции межзвездного магнитного поля. В первых наших расчетах было использовано значение $\alpha = 5/3$, в этом случае при подходящем подборе «коэффициента диффузии» K присутствовал излом в энергетическом спектре при $E = 3 \cdot 10^6$ ГэВ, который исчезал при переходе к стандартной модели диффузии, потому что степенные хвосты пространственного распределения превращались в экспоненциальные. С общепринятой точки зрения этот переход эквивалентен переходу от турбулентной диффузии к диффузии в однородной среде. Разумеется, возможность связать энергетический излом в спектре космических лучей с турбулентностью межзвездных магнитных полей придала импульс дальнейшим исследованиям в этом направлении.

Позднее Лагутин и Тюменцев [8] изменили количественные характеристики модели, не меняя ее по существу: они понизили параметр α до 0.3 (что породило расходимость среднего пробега) и, кроме того, заменили первую производную по времени, обеспечивавшую ранее марковский характер процесса, производной дробного порядка $\beta = 0.8$. В результате этого они пришли к уравнению

$$\begin{gathered}\frac{\partial^\beta G}{\partial t^\beta} = -K(-\triangle)^{\alpha/2} G(\mathbf{r}, t) = \delta_\beta(t)\delta(\mathbf{r}), \\ \delta_\beta(t) = \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)},\end{gathered} \tag{5}$$

опубликованному в нашей книге [9], и воспользовались приведенными в [10] решениями в форме дробно-устойчивых распределений.

Назовем для удобства модель с $\alpha = 5/3$, $\beta = 1$ ЛУ-моделью, а ту же модель с $\alpha = 0.3$ и $\beta = 0.8$ — ЛТ-версией. Мы уже критиковали ЛТ-версию в отношении траекторий, приписываемых ею частицам, и временных характеристик процесса [11–14]. В данной работе рассматривается проблема анизотропии в ее простейшем варианте: точечный мгновенный источник в бесконечной однородной среде.

2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Когда мы говорим о том, что уравнение (5) описывает процесс аномальной диффузии (аномальных блужданий), мы кое-что не договариваем. Это уравнение всего лишь для плотности пространственного распределения частиц в один, хотя и произвольный, момент времени t. Она (плотность) зависит от пространственной и временной переменных, а также от четырех параметров: α, определяющего поведение хвостов пространственного распределения; β, характеризующего ее поведение вблизи источника; пространственного l и временного θ масштабов, определяющих в совокупности «коэффициент диффузии» $K = l^\alpha/\theta^\beta$. Решения эти выражаются через трехмерные дробно-устойчивые плотности, к числу которых (при $\alpha = 2$, $\beta = 1$) принадлежит гауссово распределение, представляющее собой стандартный результат классической теории диффузии. Слегка (или не слегка) изменяя эти параметры, можно постепенно изменять результаты и те выводы, которые основываются на этих 1-временных (т. е. зависящих только от одного момента времени) распределениях. Игнорируя изменение самого случайного процесса (т. е. множества возможных реализаций с заданной на нем вероятностной мерой), мы обращаемся с этим семейством, как с инструментом аппроксимации, слегка прикрытом флером таинственности дробно-дифференциального аппарата. Наиболее наглядную альтернативу этому подходу дает, конечно, метод Монте-Карло, просто показывающий нам, как меняются с изменением указанных параметров сами траектории, а не общие характеристики их пучков.

Но и в рамках аналитического подхода можно многое увидеть, если научиться «читать» уравнения с дробными производными подобно тому, как мы читаем их с целыми. Чтобы «прочитать» физическое содержание дробно-дифференциального уравнения (5) обратимся к его образу в переменных Фурье–Лапласа ($\mathbf{r} \Leftrightarrow \mathbf{k}$, $t \Leftrightarrow \lambda$ соответственно):

$$[\lambda^\beta + K|\mathbf{k}|^\alpha]G(\mathbf{k},\lambda) = \lambda^{\beta-1}. \tag{6}$$

Правую часть этого уравнения легко понять и без дополнительных вычислений. Действительно, при $\mathbf{k} = 0$ оно принимает вид

$$\lambda^\beta \widetilde{G}(0,\lambda) = \lambda^{\beta-1},$$

а

$$\widetilde{G}(0,\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int G(\mathbf{r},t)\,d\mathbf{r}\right] dt = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} 1 dt = \frac{1}{\lambda}$$

(интеграл по пространству от плотности пространственного распределения, содержащийся в квадратных скобках, равен единице, как и положено по условиям нормировки). Преобразуем теперь оператор в левой части уравнения (6) к виду

$$\lambda^\beta + K|\mathbf{k}|^\alpha = 1 - [1 - \lambda^\beta - K|\mathbf{k}|^\alpha]. \tag{7}$$

В асимптотическом ($k \to \infty$, $t \to \infty$) режиме слагаемые с $\mathbf{k}$ и λ можно считать бесконечно малыми и воспользоваться асимптотическим соотношением

$$1 - [1 - \lambda^\beta - K|\mathbf{k}|^\alpha] \sim 1 - (1-\lambda^\beta)(1 - K|\mathbf{k}|^\alpha).$$

Проведя эту замену в (7) и подставив результат в уравнение (6), запишем его в виде

$$\widetilde{G}(\mathbf{k},\lambda) = (1-\lambda^\beta)(1-K|\mathbf{k}|^\alpha)\widetilde{G}(\mathbf{k},\lambda) + \lambda^{\beta-1}. \tag{8}$$

Содержимое двух круглых скобок в первом члене правой части можно трактовать как асимптотические выражения для характеристических функций временной и пространственной плотностей вероятностей $q(t)$ и $p(\mathbf{r})$:

$$\widetilde{q}(\lambda) \equiv \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} q(t)\,dt \sim 1 - \lambda^\beta, \quad \lambda \to 0, \tag{9}$$

и

$$\widetilde{p}(\mathbf{k}) \equiv \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} p(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \sim 1 - K|\mathbf{k}|^\alpha, \quad \mathbf{k} \to 0. \tag{10}$$

Заметим также, что

$$\lambda^{\beta-1} \sim \widetilde{Q}(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t)\,dt,$$

где

$$Q(t) = \int\limits_t^\infty q(t)\,dt. \tag{11}$$

Заменяя в уравнении (8) асимптотические выражения (9)–(11) их характеристическими обобщениями, получаем

$$[1 - p(k)q(\lambda)]G(\mathbf{k},\lambda) = Q(\lambda) \equiv \frac{1-q(\lambda)}{\lambda}.$$

Выполняя обратные преобразования Фурье–Лапласа, приходим к интегральному уравнению,

$$G(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{r}' \int\limits_0^\infty dt' p(\mathbf{r}')q(t')G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') + \\ + Q(t)\delta(\mathbf{r}), \tag{12}$$

в котором $p(\mathbf{r})$ и $q(t)$ характеризуются степенным поведением при больших значениях аргументов:

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^2}p(r), \quad p(r) \sim \alpha A r^{-1-\alpha}, \\ r \equiv |\mathbf{r}| \to \infty, \tag{13}$$

$$q(t) \sim \beta B t^{-1-\beta}, \quad t \to \infty. \tag{14}$$

Физический смысл этого допредельного (по отношению к дробно-дифференциальному) уравнения уже более ясен. Действительно, представляя решение этого интегрального уравнения в виде ряда Неймана,

$$G(\mathbf{r},t) = Q(t)\delta(\mathbf{r}) + \int\limits_0^t dt' Q(t-t')p(\mathbf{r}')q(t') + \ldots,$$

видим, что вероятность обнаружить в момент измерения t частицу в точке $\mathbf{r}$ складывается из вероятности изначального пребывания частицы в данной точке (первый член), вероятности того, что в один из промежуточных моментов $t' \in (0,t)$ она совершит мгновенный перескок из точки рождения $\mathbf{r}_0 = 0$ в точку наблюдения $\mathbf{r}$ и останется в ней до момента наблюдения t, (второй член), вероятности обнаружения частицы, совершившей два мгновенных перескока, разделенных между собой временны́м случайным интервалом с плотностью $q(t)$ (следующий член) и т. д. Одномерная траектория такого процесса изображена на рис. 1*a*: вертикальные отрезки соответствуют пребыванию частицы в покое, когда координата частицы не меняется, горизонтальные отрезки показывают мгновенные перелеты частицы из одной точки в другую, длины этих перелетов случайны и никак не коррелированы с временами задержки частицы в состояниях покоя (будем называть эти состояния ловушками).

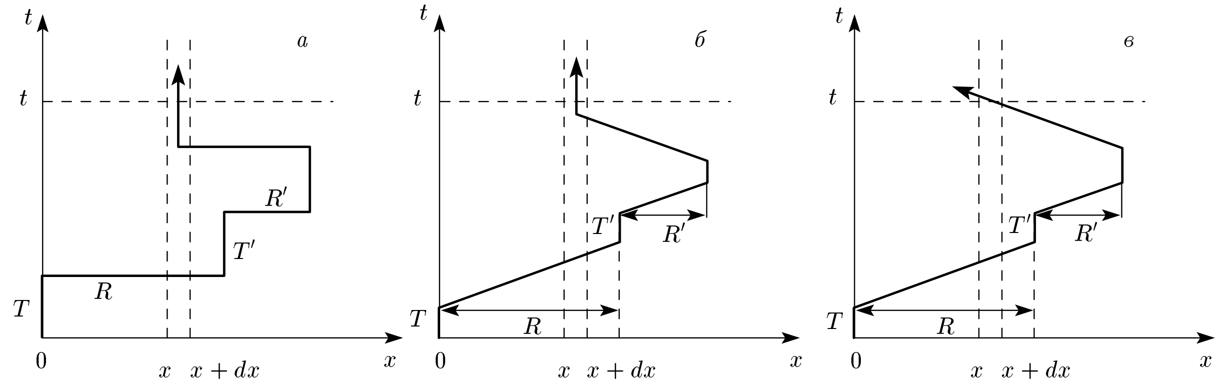

Рис. 1. Начальный фрагмент траектории в координатах (x,t) частицы с бесконечной (a) и конечной ($б$,$в$) скоростями. В последнем случае частица в момент t может находиться в одном из двух состояний: покоя ($б$) и движения ($в$)

Подчеркнем еще раз, что главное отличие движения Леви от движения Броуна — это разрывы траекторий: кривая, описывающая траекторию (след) движения в плоскости (x,t), характеризуется многочисленными разрывами вдоль оси x. Пока производная по x имела целый (второй) порядок, разрывов не было (были только изломы), когда порядок производной стал дробным, появились разрывы, которые при $\alpha < 1$ (средний пробег бесконечен) видны на всех масштабах. Выполняющая такое движение частица некоторое время как бы «топчется» в окрестности относительно небольших размеров, затем внезапно «улетает» на большое расстояние и начинает «топтаться» там (рис. 2).

Такой тип движения называют «полетами Леви» (или движением Леви по аналогии с броуновским движением) по имени открывшего устойчивые распределения французского математика. В целом физический процесс, в котором диффузионный пакет расширяется быстрее, чем в нормальном случае, т. е. пропорционально t^γ с $\gamma > 1/2$, принадлежит к классу супердиффузионных.

Превращение первой производной по времени в дробную обогащает траекторию разрывами вдоль оси времени (частица замирает: время идет, а она не движется). В плоскости (x,t) мы видим уже сгустки точек — кластеры, разделенные между собой областями «перелетов» и «сидений в ловушках».

Эта динамика и нуждается в интерпретации при введении дробных производных. Однако сами уравнения записаны для распределения координаты частицы в текущий (один) момент времени, и обсуждаемая динамика в нем практически[1)] незаметна. Видно лишь, что дробный характер производной приводит к появлению степенных хвостов у плотности пространственного распределения, расходимости дисперсии и изменению скорости расплывания диффузионного пакета (хотя закон этого расплывания по-прежнему остается степенным).

3. КОЭФФИЦИЕНТ АНИЗОТРОПИИ В МОДЕЛЯХ С МГНОВЕННЫМИ ПЕРЕЛЕТАМИ

Все три уравнения — нормальное уравнение диффузии ($\alpha = 2$, $\beta = 1$), уравнение супердиффузии (1) ($\alpha < 2$, $\beta = 1$) и уравнение аномальной диффузии (5) ($\alpha < 1$, $\beta < 1$) — имеют автомодельные решения, которые запишем в общем виде (для точечного мгновенного источника концентрация совпадает с пропагатором)

$$n(r,t) = (Kt^\beta)^{-3/\alpha}\Psi^{(\alpha,\beta)}(r(Kt^\beta)^{-1/\alpha}), \qquad (15)$$

где $\Psi^{(\alpha,\beta)}(r)$ — дробно-устойчивая плотность распределения. В модели мгновенных перелетов мы не можем непосредственно воспользоваться классическим соотношением между плотностью потока ϕ и концентрацией n, однако отношение тока к концентрации вычислить очень легко. Действительно, в рассматриваемой постановке задача сферически симметрична и

[1)] Заметим, что переходная вероятность представлена произведением $p(\mathbf{r})q(t)$, означающим статистическую независимость пространственных скачков и разделяющих их временных интервалов.

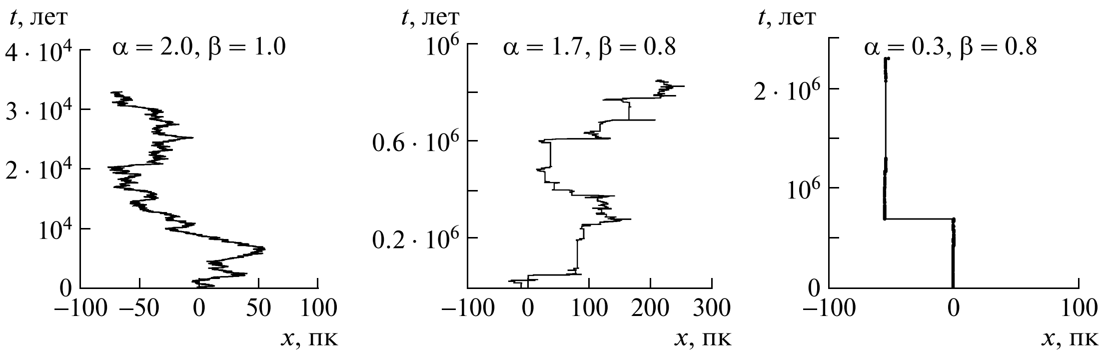

Рис. 2. Типичные реализации одномерных траекторий, соответствующие трем рассматриваемым моделям

$$j(r,t) = j_r(r,t) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}\int_r^\infty n(r,t)r^2 dr. \qquad (16)$$

Вследствие автомодельного характера решения уравнения (5), интеграл приводится к виду

$$\int_r^\infty n(r,t)r^2 dr =$$

$$= \int_r^\infty (Kt^\beta)^{-3/\alpha}\Psi^{(\alpha,\beta)}(r(Kt^\beta)^{-1/\alpha})r^2 dr =$$

$$= \int_{r(Kt^\beta)^{-1/\alpha}}^\infty \Psi^{(\alpha,\beta)}(\xi)\xi^2 d\xi.$$

Подставляя его в правую часть выражения (16) и выполняя дифференцирование, получим

$$j_r(r,t) = n(r,t)\frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{t}.$$

Следовательно, если бы коэффициент анизотропии определялся отношением плотности тока j к концентрации n, мы имели бы простую общую формулу для любой автомодельной концентрации:

$$\frac{j_r(r,t)}{n(r,t)} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{t}. \qquad (17)$$

Если бы частицы двигались с постоянной и одинаковой по величине скоростью v, тогда плотность потока ϕ выразилась бы через концентрацию n как $\phi = vn$ и коэффициент анизотропии в соответствии со стандартным определением принял бы вид

$$\delta(r,t) = \frac{3\beta}{\alpha}\frac{r}{vt}. \qquad (18)$$

Для нормальной диффузионной модели ($\alpha = 2$, $\beta = 1$) выражение (18) превращается в известную формулу (2) ([6], с. 96). Неприменимость уравнения (18) к ЛТ-версии объясняется неопределенностью произведения vn типа $\infty \cdot 0$: скорость v с точки зрения обсуждаемой модели бесконечна, а вместо полной концентрации n мы должны поставить концентрацию частиц, находящихся в данный момент в движении, но частицы перелетают мгновенно (если бы мы могли их видеть, то видели бы просто исчезновение–появление частиц, но не их движение), поэтому число частиц в полете в момент наблюдения равно нулю. Второе соображение, заставляющее с осторожностью отнестись и к общему результату (15) сводится к тому, что он точен по отношению к дробно-дифференциальному уравнению (5), но само это уравнение представляет собой асимптотику более полного кинетического уравнения (12). Последнее включает в себя распределения пробегов и временны́х интервалов между перелетами и поэтому однозначно описывает случайные блуждания, тогда как дробно-дифференциальное уравнение содержит всю эту информацию в коэффициенте диффузии, где уже невозможно отделить характеристики длин перелетов от времен ожидания. Несколько огрубляя ситуацию, можно сказать, что коэффициент диффузии

$$K_\infty \approx \frac{\hat{\xi}^\alpha}{\hat{\tau}^\beta}, \qquad (19)$$

где $\hat{\xi}$ и $\hat{\tau}$ — характерные масштабы пробега и времени ожидания для данного процесса, а индекс ∞ означает, что речь идет о модели перелетов с бесконечной скоростью.

4. БЛУЖДАНИЯ С КОНЕЧНОЙ СКОРОСТЬЮ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ

4.1. Случай $\alpha > 1$

Глядя на уравнение (12), мы отчетливо видим взаимную независимость длины вектора перелета и промежутка времени пребывания в ловушке: их совместное распределение $\psi(\mathbf{r}, t)$ дается произведением их плотностей вероятности:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}) q(t).$$

Из-за конечности скорости движения частицы требуется учесть и время, затрачиваемое на сам перелет (рис. 2), тогда уравнение (12) примет вид

$$G_v(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' p(\mathbf{r}') q(t') \times \\ \times G_v\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - \frac{r'}{v} - t'\right) + Q(t)\delta(\mathbf{r}). \quad (20)$$

Если времена пребывания в ловушках имеют более узкое степенное или экспоненциальное распределение, чем пробеги, последние будут играть главную роль в асимптотике больших времен, и ловушки можно игнорировать, т. е. считать, что частица движется непрерывно с постоянной по величине и меняющейся на концах пробегов по направлению скоростью $\mathbf{v}$,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}) q(t|\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) \delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{v}\right).$$

Соответствующий пропагатор удовлетворяет уравнению

$$G(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' p(\mathbf{r}') G\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}'|}{v}\right) + \delta(t)\delta(\mathbf{r}). \quad (21)$$

В работе [15] показано (и в [16] подтверждено), что при $\alpha \in (1, 2]$ и $\beta = 1$ (последнее означает, что среднее время пребывания в ловушке конечно) асимптотика решения уравнения (20) выражается через пропагатор

$$G_\infty(\mathbf{r}, t) \sim (Kt)^{-3/\alpha} \Psi_3^{(\alpha)}(\mathbf{r}(Kt)^{-1/\alpha}), \\ t \to \infty, \quad \alpha \in (1, 2), \quad (22)$$

простой заменой «коэффициента диффузии»:

$$K \mapsto K_v = \frac{K}{1 + V/v}, \quad (23)$$

в которой, как и выше, v обозначает скорость свободного движения частицы, а V — средний путь, проходимый этой частицей в единицу времени при условии мгновенных перелетов. Эта формула может быть выведена как из общего уравнения (20), так и из элементарных соображений. Если дисперсия времени пребывания частицы в ловушке конечна, а перелеты мгновенны, при $t \to \infty$ их число стремится к детерминированной функции $n = \mu t$, а положение в пространстве представляется случайным вектором

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{R}_j \sim (bn)^{1/\alpha} \mathbf{S}(\alpha),$$

где $\mathbf{S}(\alpha)$ — случайный вектор с изотропным устойчивым распределением порядка $\alpha \in (1, 2)$. Учет конечной величины скорости v увеличивает затраты времени на каждый перелет пропорционально его длине и уменьшает тем самым число таковых за данное время t:

$$n = \mu t \mapsto n_v = \frac{n}{1 + \mu\langle\xi\rangle/v} = \frac{n}{1 + V/v}.$$

Это преобразование эквивалентно замене

$$t \mapsto t_v = \frac{t}{1 + V/v},$$

так что $Kt_v = K_v t$, откуда и следует (23). В результате аналог пропагатора (22) для космических частиц с конечной скоростью записывается в виде

$$G_v(\mathbf{r}, t) \sim (K_v t)^{-3/\alpha} \Psi_3^{(\alpha)}(\mathbf{r}(K_v t)^{-1/\alpha}), \\ t \to \infty, \quad \alpha \in (1, 2), \quad (24)$$

где $K_v = Kv/(v + V)$. Таким образом, при $\alpha > 1$, $\beta = 1$ (т. е. при условии конечности среднего пробега частиц и среднего времени пребывания в ловушке) пропагатор по-прежнему обладает свойством автомодельности и формула (19) остается справедливой. Этим условиям удовлетворяет модель Лагутина–Учайкина. Более того, характеристики времен пробега и пребывания в ловушке входят в знаменатель формулы для K_v аддитивно, поэтому можно игнорировать наличие неподвижных состояний, полагая, что частица постоянно движется с одной и той же скоростью v, и коэффициент анизотропии принимает вид

$$\delta(r, t) = \frac{3}{\alpha} \frac{r}{vt}.$$

Поскольку для нормальной диффузии $\alpha = 2$, а для ЛУ-модели $\alpha = 5/3$, имеем $\delta_\alpha/\delta = 1.2$, т. е. переход от стандартной модели к ЛУ-модели, обеспечивающий появление излома в энергетическом спектре, всего на 20 % повышает коэффициент анизотропии потока от мгновенного точечного источника.

В случае $\beta < 1$ среднее значение времени пребывания в ловушках бесконечно, а средний пробег конечен, поэтому в асимптотике больших времен ловушки доминируют, связанная с пробегами поправка к скорости исчезает и результат по-прежнему описывается формулой (22) с коэффициентом $K = K_\infty$ (19).

4.2. Случай $\alpha < 1$

Что же касается области $\alpha < 1$, то тут ситуация иная [15–21]. Средний пробег бесконечен, а его распределение степенное. В отсутствие баллистического ограничения (т. е. при $v = \infty$) диффузионный пакет, представляемый автомодельным решением дробно-дифференциального уравнения, расплывался бы пропорционально $t^{\beta/\alpha}$ и при $\beta > \alpha$ быстро вышел бы за баллистические границы $|\mathbf{r}| = vt$. Ограниченная скорость движения частиц не дает этого сделать, баллистические границы зажимают диффузионный пакет в конус, придавая ему характерную W-образную, или даже U-образную форму [12, 13]. Это форма никак не соответствует решению дробно-дифференциального уравнения, использованному Лагутиным и Тюменцевым. Замечание о неприменимости дробно-дифференциального уравнения в этих условиях было сделано еще в нашей работе [15] и вызвало ответную реакцию авторов работы [16], указавших на то, что при малых временах пространственное распределение укладывается в рамки баллистического ограничения. Дело в том, что в [16] речь шла об интегральном уравнении, адекватно представляющем случайные блуждания при всех временах, тогда как в расчетах Лагутина – Тюменцева использовано решение дробно-дифференциального уравнения, адекватно представляющее лишь долговременную асимптотику скачкообразного процесса, явно противоречащую релятивистской ограниченности скорости. В этом и заключается основная претензия к ЛТ-модели.

Роль баллистических ограничений при $\alpha < 1$ наглядно проявляется в асимптотическом поведении ширины диффузионного пакета $\Delta(t) = \sqrt{\langle R^2(t)\rangle}$ при $t \to \infty$. Из асимптотического анализа интегрального уравнения (20) при условиях (13), (14) было найдено [18, 22], что

$$\Delta(t) \sim \\ \sim \begin{cases} \sqrt{1-\alpha}\; vt, & \alpha < \beta, \\ \left(\dfrac{A(1-\alpha)}{A + Bv^\alpha}\right)^{1/2} vt, & \alpha = \beta, \\ \left(\dfrac{2A\Gamma(2-\alpha)v^{-\beta}}{B\Gamma(1-\beta)\Gamma(3-\alpha+\beta)}\right)^{1/2} \times \\ \qquad \times (vt)^{1-(\alpha-\beta)/2}, & \alpha > \beta. \end{cases}$$

Из верхней строки полученного решения можно сделать вывод, что при $\alpha < \beta$ (напомним, что в ЛТ-модели $\alpha = 0.3$ и $\beta = 0.8$) диффузионный пакет представляет собой сферическую оболочку небольшой толщины, прилегающую с внутренней стороны к фронту $r = vt$. Такое поведение близко к баллистическому режиму (и переходит в него при $\alpha \to 0$). Это объясняется присутствием в траектории лидирующего пробега, многократно отличающегося от остальных по длине, и по этой причине имеющего наибольшую вероятность пересечь сферу наблюдения. В силу совокупной малости остальных пробегов пересечение это происходит практически вдоль радиуса, и действительный коэффициент анизотропии в ЛТ-версии близок к единице и не убывает со временем, что противоречит выводам, сделанным в работе [8]. Из этого также следует, что если бы даже ЛТ-версия отвечала реальности, ее не имело бы смысла рассматривать без учета процессов на границах Галактики.

На рис. 3 показаны результаты расчетов[2)] методом Монте-Карло величины $\delta/3$ (точки) в сопоставлении с приведенными выше формулами (линии). Верхняя горизонтальная линия, составленная из точек (результаты моделирования), соответствует параметрам ЛТ-модели.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Изложенное выше приводит к выводу о том, что причина несостоятельности ЛТ-версии лежит в неудачном выборе параметров α, β, «коэффициента диффузии» (здесь кавычки, потому что настоящий коэффициент диффузии в ЛТ-версии неприменим вследствие его расходимости в этой модели) и, как следствие, масштабных параметров времени и координат. Изначальным критерием выбора было максимальное согласие с энергетическим спектром первичного космического излучения и положением его

[2)] Автор благодарен Р. Т. Сибатову за предоставленные результаты.

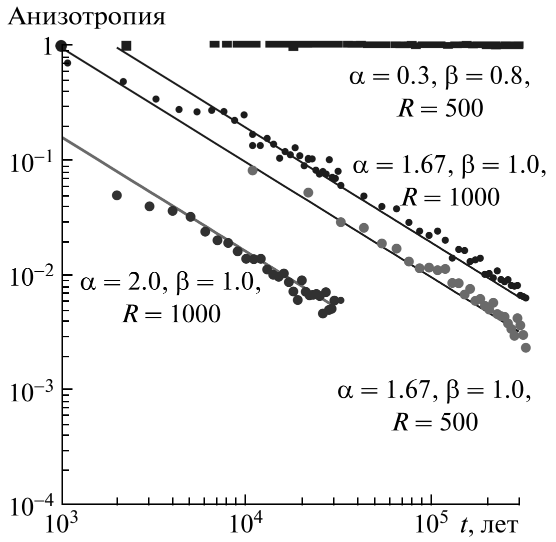

Рис. 3. Результаты расчетов коэффициента анизотропии потока на расстояниях $R = 500, 1000$ пк от точечного мгновенного источника с энергией $E = 10^6$ ГэВ в неограниченной галактической среде для стандартной и двух дробно-дифференциальных моделей

излома, затем решался вопрос обоснования. Выбор $\beta = 0.8$ был обоснован ссылкой на работу [23], в которой речь шла о диффузии ярких точек в фотосфере Солнца, ассоциированных с магнитными элементами. Рассматривая их блуждание как движение в некой клеточной системе, авторы установили, что это движение проявляет субдиффузионные свойства на временах, меньших 20 мин, когда действительно время пребывания в межклеточных ловушках распределено по степенному закону с показателем $\beta \approx 0.76$, обрывающемуся при $t \approx 20$ мин (см. формулу (1) статьи [23]). Таким образом, ни физических (блуждание магнитных точек в фотосфере Солнца в интервалах, измеряемых десятками минут, никак не соотносится с блужданием космических частиц в Галактике в интервалах, исчисляемых сотнями тысяч лет), ни математических (степенной хвост оборван и по этой причине среднее значение времени пребывания в ловушке конечно, что влечет за собой первый порядок производной по времени) оснований для дробного дифференцирования по времени этот факт не дает.

Выбор $\alpha = 0.3$ авторы ЛТ-версии обосновали повторением расчетов, выполненных для пробегов среди коррелированной системы галактик. В расчетах учитывалось, что размеры галактик очень малы по сравнению с расстояниями между ними, поэтому траектории представляли собой длинные прямолинейные участки с редкими компактными кластерами узлов (точек «рассеяния»). Перенос этих результатов на внутригалактическую среду означает предположение, что межзвездное магнитное поле сосредоточено в неоднородностях (облаках), столь же относительно малых по размерам и так же редко разбросанных в пространстве, как галактики во Вселенной, что, конечно, противоречит сегодняшним представлениям.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки России 2.1894.2011 и при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 12-01-00660, 13-01-00585).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Лагутин, Ю. А. Никулин, В. В. Учайкин, Препринт Алтайского гос. унив. № 4, Барнаул (2000); A. A. Lagutin, Yu. A. Nikulin, and V. V. Uchaikin, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **97**, 267 (2001).

2. A. A. Lagutin and V. V. Uchaikin, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B **201**, 212 (2003).

3. В. В. Учайкин, ЖЭТФ **124**, 903 (2003).

4. В. В. Учайкин, УФН **173**, 847 (2003).

5. V. V. Uchaikin, Physica A **255**, 65 (1998).

6. С. Хаякава, *Физика космических лучей, ч. 2, Астрофизический аспект*, Мир, Москва (1974).

7. А. М. Кольчужкин, В. В. Учайкин, *Введение в теорию прохождения частиц через вещество*, Атомиздат, Москва (1978).

8. А. А. Лагутин, А. Г. Тюменцев, Изв. Алтайского гос. унив. № 5, 4 (2004).

9. V. V. Uchaikin and V. M. Zolotarev, *Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications*, Utrecht, VCP (1999).

10. V. V. Uchaikin, Int. J. Theor. Phys. **39**, 2087 (2000).

11. В. В. Учайкин, Письма в ЖЭТФ **91**, 115 (2010).

12. V. V. Uchaikin, R. T. Sibatov, and V. V. Saenko, in *Proc. 32^{nd} ICRC*, Beijing (2011), p. 1249.

13. V. V. Uchaikin, R. T. Sibatov, and V. V. Saenko, arXiv:1207.0937v1.

14. V. V. Uchaikin and R. T. Sibatov, Gravitation and Cosmology **18**, 122 (2012).

15. В. М. Золотарев, В. В. Учайкин, В. В. Саенко, ЖЭТФ **115**, 1411 (1999).

16. В. Ю. Забурдаев, К. В. Чукбар, ЖЭТФ **121**, 299 (2002).

17. G. Zumofen and J. Klafter, Phys. Rev. E **47**, 851 (1993).

18. V. V. Uchaikin, Physica A **255**, 65 (1998).

19. E. Barkai, Chem. Phys. **284**, 13 (2002).

20. I. M. Sokolov and R. Metzler, Phys. Rev. E **67**, 010101(R) (2003).

21. В. В. Учайкин, Р. Т. Сибатов, Письма в ЖТФ **30**, 27 (2004).

22. В. В. Учайкин, ТМФ **115**, 154 (1998).

23. A. C. Cadavid, J. K. Lawrence, and A. A. Ruzmaikin, Astrophys. J. **521**, 844 (1999).