ЖЭТФ, 2012, том 141, вып. 4, стр. 636–649 © 2012

НАХОЖДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ ВСЕХ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА КВАДРАТИЧНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ $\hat{\chi}^{(2)}(z, 2\omega; \omega, \omega)$ ОДНОМЕРНО НЕОДНОРОДНОЙ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЫ

*А. А. Голубков**, *В. А. Макаров***

Международный лазерный центр,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 мая 2011 г.

Доказана возможность и предложена методика однозначного нахождения координатных зависимостей всех компонент комплексного тензора квадратичной восприимчивости $\hat{\chi}^{(2)}(z, 2\omega; \omega, \omega)$, ответственной за генерацию второй гармоники в одномерно неоднородной пластинке, линейные диэлектрические свойства которой также неоднородны и характеризуются тензором диэлектрической проницаемости диагонального вида. Для ее осуществления необходимо в некотором диапазоне углов падения плоской волны основного излучения измерить комплексный коэффициент преобразования пластинкой падающей на нее волны в отраженную волну второй гармоники. Меняя плоскость падения волны и (или) ее поляризацию, а также измеряя коэффициенты преобразования в s- и p-поляризованные волны удвоенной частоты, можно однозначно определить пространственные зависимости всех компонент тензора квадратичной восприимчивости. Предложенная методика включает измерения интенсивностей волн второй гармоники, генерируемых в специальных условиях с использованием двух вспомогательных эталонных пластинок, что позволяет обойтись без сложных фазовых измерений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Восстановление пространственных зависимостей компонент тензора квадратичной восприимчивости $\hat{\chi}^{(2)}(z)$ нелинейной одномерно неоднородной среды становится все более востребованной практической задачей [1, 2]. Однако используемые для ее решения методы либо связаны с разрушением исследуемого образца [3–5], либо применимы только для непоглощающих сред с однородными линейными диэлектрическими свойствами [6–10]. Иногда для нахождения пространственных профилей компонент тензора $\hat{\chi}^{(2)}(z)$ используют также различные априорные предположения о функциях, задающих их форму, и далее находят значения нескольких входящих в эти функции подгоночных параметров, которые дают наилучшее согласие с данными эксперимента [11, 12]. Одной из основных проблем, возникающих при экспериментальном определении зависимости от z тензора $\hat{\chi}^{(2)}(z, 2\omega; \omega, \omega)$, ответственного за генерацию второй гармоники в одномерно неоднородной среде, является сложность нахождения фазы волны на удвоенной частоте, без знания которой нельзя однозначно восстановить пространственный профиль $\hat{\chi}^{(2)}(z, 2\omega; \omega, \omega)$ даже в простейшем случае непоглощающей среды с однородными линейными свойствами [9]. В работах [7, 9, 12] было предложено несколько методов решения этой проблемы, однако все они применимы только для линейно однородных непоглощающих сред.

В настоящей работе предложена и обоснована методика однозначного нахождения по данным эксперимента координатных зависимостей всех компонент комплексного тензора $\hat{\chi}^{(2)}(z, 2\omega; \omega, \omega)$ одномерно неоднородной вдоль оси z среды, имеющей вид плоскопараллельной пластинки, поверхности которой перпендикулярны направлению неоднородности. Предложенная методика применима, если линейные диэлектрические свойства рассматриваемой нелинейной среды также изменяются только вдоль

*E-mail: andrej2501@yandex.ru
**E-mail: vamakarov@phys.msu.ru

оси z и описываются диагональным тензором линейной диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(z,\omega)$, который может произвольным образом зависеть от частоты распространяющейся волны. Для ее реализации необходимо в некотором диапазоне углов падения плоской волны основного излучения с частотой ω измерить комплексные коэффициенты, характеризующие эффективность ее преобразования в s- и p-поляризованные волны второй гармоники, распространяющиеся по ту же сторону от пластинки, что и падающая на нее волна основного излучения. При этом, меняя плоскость падения и (или) поляризацию волны основного излучения, можно восстанавливать профили различных компонент тензора квадратичной нелинейности. Предложенная методика однозначного восстановления компонент тензора $\hat{\chi}^{(2)}(z,2\omega;\omega,\omega)$ включает две серии дополнительных измерений интенсивности волн на удвоенной частоте, генерируемых в специальных условиях с использованием исследуемой и дополнительных эталонных пластин, что позволяет обойтись без сложных фазовых измерений.

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С ОДНОМЕРНО НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДОЙ. УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим одномерно неоднородную вдоль оси z немагнитную среду, которая вдоль плоскостей $z = z_1$ и $z = z_2$ $(z_2 > z_1)$ граничит с однородными изотропными линейными не поглощающими и не диспергирующими средами с вещественной диэлектрической проницаемостью ε_0. Пусть на такую пластинку падает распространяющаяся в положительном направлении оси z волна с частотой ω, вектор напряженности электрического поля которой при $z < z_1$ равен

$$(E_{0x}\mathbf{e}_x+E_{0y}\mathbf{e}_y+E_{0z}\mathbf{e}_z)\exp\left[i(\omega t-k_xx-k_zz)\right]+\text{c.c.}$$

Здесь $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ — единичные векторы, направленные соответственно вдоль осей x, y, z; k_x и k_z — проекции на оси x и z волнового вектора падающей на пластинку волны. Тогда решение системы уравнений Максвелла можно искать в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x,z,t) = [E_x(z)\mathbf{e}_x + E_y(z)\mathbf{e}_y + E_z(z)\mathbf{e}_z] \times \\ \times \exp\left[i(\omega t - k_x x)\right] + \text{c.c.}, \\ \mathbf{H}(x,z,t) = [H_x(z)\mathbf{e}_x + H_y(z)\mathbf{e}_y + H_z(z)\mathbf{e}_z] \times \\ \times \exp\left[i(\omega t - k_x x)\right] + \text{c.c.},\end{aligned} \qquad (1)$$

где $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля.

Пусть оси x, y и z совпадают соответственно с осями X_1, X_2 и X_3 кристаллофизической системы координат [13] среды, образующей пластинку. Как известно, одномерно неоднородные среды, строго говоря, могут иметь пространственную симметрию, соответствующую одному из 10 классов (1, 2, m, $mm2$, 3, 4, 6, $3m$, $4mm$, $6mm$) или одной из двух предельных групп $(\infty, \infty m)$ [14]. Будем рассматривать среды, относящиеся к любой из этих предельных групп или к любому из классов симметрии, кроме 1, 2 и m. В этом случае в системе координат x, y, z линейные диэлектрические свойства среды пластинки будут описываться диагональным тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(z,\omega)$.

Будем считать также, что в среде имеется наведенная другими волнами нелинейная поляризация

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(x,z,t) = [P_x(z)\mathbf{e}_x + P_y(z)\mathbf{e}_y + P_z(z)\mathbf{e}_z] \times \\ \times \exp\left[i(\omega t - k_x x)\right] + \text{c.c.}\end{aligned}$$

Тогда материальное уравнение для вектора электрической индукции

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(x,z,t) = [D_x(z)\mathbf{e}_x + D_y(z)\mathbf{e}_y + D_z(z)\mathbf{e}_z] \times \\ \times \exp\left[i(\omega t - k_x x)\right] + \text{c.c.}\end{aligned}$$

внутри пластинки можно записать в виде

$$D_j(z) = \varepsilon_{jj}(z,\omega)E_j(z) + 4\pi P_j(z), \qquad (2)$$

где j принимает значения x, y, z. Подставляя выражения (1) в уравнения Максвелла и учитывая материальные уравнения (2), имеем

$$\begin{gathered}\frac{dE_y}{dz} = \frac{i\omega}{c}\,H_x, \\ \frac{dH_x}{dz} = \frac{i\omega}{c}\left[\varepsilon_{yy}(z,\omega)E_y + 4\pi P_y\right] - ik_xH_z, \\ H_z = \frac{ck_x}{\omega}\,E_y,\end{gathered} \qquad (3)$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\varepsilon_{xx}(z,\omega)}\,\frac{dH_y}{dz} = -\frac{i\omega}{c}\left(E_x + \frac{4\pi P_x}{\varepsilon_{xx}(z,\omega)}\right), \\ \frac{dE_x}{dz} = -\frac{i\omega}{c}\,H_y - ik_xE_z, \\ E_z = \frac{D_z - 4\pi P_z}{\varepsilon_{zz}(z,\omega)}, \quad D_z = -\frac{ck_xH_y}{\omega},\end{gathered} \qquad (4)$$

где c — скорость света в вакууме. После небольших преобразований из систем уравнений (3) и (4) соответственно получим

$$\frac{d^2E_y}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{yy}(z,\omega) - k_x^2\right)E_y = -4\pi\frac{\omega^2}{c^2}\,P_y, \qquad (5)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx}(z,\omega)}\frac{dH_y}{dz}\right)+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{k_x^2}{\varepsilon_{zz}(z,\omega)}\right)H_y = \\ = \frac{4\pi\omega k_x}{c\varepsilon_{zz}(z,\omega)}P_z - \frac{4\pi i\omega}{c}\frac{d}{dz}\left(\frac{P_x}{\varepsilon_{xx}(z,\omega)}\right). \quad (6)$$

При этом проекции векторов напряженности электрического и магнитного полей на оси x и z могут быть рассчитаны по следующим формулам, непосредственно следующим из систем уравнений (3) и (4):

$$H_x = -\frac{ic}{\omega}\frac{dE_y}{dz}, \quad H_z = \frac{ck_x}{\omega}E_y, \quad (7)$$

$$E_x = \frac{ic}{\omega\varepsilon_{xx}(z,\omega)}\frac{dH_y}{dz} - \frac{4\pi P_x}{\varepsilon_{xx}(z,\omega)}, \\ E_z = -\frac{ck_x}{\omega\varepsilon_{zz}(z,\omega)}H_y - \frac{4\pi P_z}{\varepsilon_{zz}(z,\omega)}. \quad (8)$$

На границе раздела сред, где их свойства претерпевают скачок, уравнения Максвелла необходимо дополнить граничными условиями. Как известно, в простейшем случае линейных немагнитных сред без пространственной дисперсии эти граничные условия выражают непрерывность касательных к поверхности раздела сред составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей. В рассматриваемой геометрии и с учетом уравнений (7) и (8) это означает непрерывность величин E_y, dE_y/dz, H_y и

$$\frac{1}{\varepsilon_{xx}(z,\omega)}\left(\frac{dH_y}{dz}+\frac{4\pi i\omega}{c}P_x\right)$$

при любых значениях координаты z как внутри пластинки, так и на ее поверхности:

$$E_y(z-0) = E_y(z+0), \\ \left(\frac{dE_y}{dz}\right)\bigg|_{z-0} = \left(\frac{dE_y}{dz}\right)\bigg|_{z+0}, \quad (9)$$

$$H_y(z-0) = H_y(z+0), \\ \left(\frac{1}{\varepsilon_{xx}(z,\omega)}\frac{dH_y}{dz}+\frac{4\pi i\omega}{c\varepsilon_{xx}(z,\omega)}P_x\right)\bigg|_{z-0} = \\ = \left(\frac{1}{\varepsilon_{xx}(z,\omega)}\frac{dH_y}{dz}+\frac{4\pi i\omega}{c\varepsilon_{xx}(z,\omega)}P_x\right)\bigg|_{z+0}. \quad (10)$$

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОМПОНЕНТ $\chi^{(2)}_{xxx}$, $\chi^{(2)}_{yyy}$, $\chi^{(2)}_{zxx}$ И $\chi^{(2)}_{zyy}$ ТЕНЗОРА $\hat{\chi}^{(2)}(z,2\omega;\omega,\omega)$

Для восстановления пространственных зависимостей всех компонент тензора $\hat{\chi}^{(2)}(z,2\omega;\omega,\omega)$ рассмотрим пять различных геометрий измерений. При этом будем считать, что во всех исследованных в настоящей статье случаях амплитуда и частота основного излучения, а также величины $\hat{\chi}^{(2)}_{jlm}(z,2\omega;\omega,\omega)$, где $j,l,m = x,y,z$, таковы, что в среде происходит достаточно сильная для надежной регистрации генерация второй гармоники. Но волна на удвоенной частоте не оказывает заметного влияния на распространение волны основного излучения в пластинке и не участвует в генерации волн на других частотах.

Пусть на исследуемую пластинку под углом α падает s-поляризованная плоская волна с частотой ω, распространяющаяся в положительном направлении оси z, вектор напряженности электрического поля которой при $z < z_1$ равен

$$E_{01}\mathbf{e}_y\exp\left[i(\omega t - k_x x - k_z(z-z_1))\right] + \text{c.c.},$$

где $k_x = k\sin\alpha$, $k_z = k\cos\alpha$, $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0}/c$. В результате в пластинке будет распространяться волна с частотой ω и напряженностью электрического поля $E_{01}E_1(z)\mathbf{e}_y\exp\left[i(\omega t - k_x x)\right] + \text{c.c.}$ Изменение ее безразмерной амплитуды $E_1(z)$ описывается уравнением (5) с правой частью, равной нулю:

$$\frac{d^2E_1}{dz^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{yy}(z,\omega) - k_x^2\right]E_1 = 0, \quad (11)$$

решение которого при $z = z_{1,2}$ удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{dE_1}{dz}\bigg|_{z=z_1} - ik_zE_1(z_1) = -2ik_z, \\ \frac{dE_1}{dz}\bigg|_{z=z_2} + ik_zE_1(z_2) = 0, \quad (12)$$

непосредственно следующим из максвелловских граничных условий (9). Заметим, что

$$k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 - k_z^2.$$

Поэтому решение задачи (11), (12) зависит только от одного параметра k_z.

Распространение в пластинке волны основного излучения приводит к возникновению нелинейной поляризации среды

$$P_{1j}(z,2\omega) = \chi^{(2)}_{jyy}(z,2\omega;\omega,\omega)I_1E_1^2(z)\times \\ \times\exp\left[i(2\omega t - 2k_x x)\right] + \text{c.c.}, \quad (13)$$

где $I_1 = E_{01}^2$, $j = x,y,z$, и, как следствие, к генерации волн второй гармоники, имеющих s- и p-поляризацию. При этом вектор напряженности электрического поля s-поляризованной волны на удвоенной частоте в пластинке может быть записан в виде

$$I_1E_{1s}(z)\mathbf{e}_y\exp\left[i(2\omega t - 2k_x x)\right] + \text{c.c.},$$

а вектор напряженности магнитного поля p-поляризованной волны на частоте 2ω — в виде

$$I_1 H_{1p}(z)\mathbf{e}_y \exp\left[i(2\omega t - 2k_x x)\right] + \text{c.c.},$$

где изменения величин $E_{1s}(z)$ и $H_{1p}(z)$ описываются уравнениями

$$\frac{d^2E_{1s}}{dz^2} + \left[\frac{4\omega^2}{c^2}\varepsilon_{yy}(z,2\omega) - 4k_x^2\right] E_{1s} = \\ = -\frac{16\pi\omega^2}{c^2}\chi^{(2)}_{yyy}(z)E_1^2(z), \quad (14)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx}(z,2\omega)}\frac{dH_{1p}}{dz}\right) + \left[\frac{4\omega^2}{c^2} - \frac{4k_x^2}{\varepsilon_{zz}(z,2\omega)}\right] H_{1p} = \\ = \frac{16\pi\omega k_x}{c\varepsilon_{zz}(z,2\omega)}\chi^{(2)}_{zyy}(z)E_1^2(z) - k_x\frac{d\tilde{p}_2}{dz}. \quad (15)$$

Здесь

$$\tilde{p}_2(z) = \frac{8\pi i\omega}{k_x c}\,\frac{\chi^{(2)}_{xyy}(z)E_1^2(z)}{\varepsilon_{xx}(z,2\omega)}\,.$$

Зависимость компонент тензора $\hat{\chi}^{(2)}(z,2\omega;\omega,\omega)$ от частотных аргументов здесь и далее опущена. Уравнения (14), (15) непосредственно следуют из выражения для нелинейной поляризации среды (13) и уравнений (5), (6) соответственно.

Линейную диэлектрическую проницаемость среды исследуемой пластинки можно считать известной, так как компоненты тензоров $\hat{\varepsilon}(z,\omega)$ и $\hat{\varepsilon}(z,2\omega)$, имеющих в рассматриваемых классах диагональный вид, могут быть найдены с помощью методики, предложенной в работах [15–17] и экспериментально реализованной для однородных сред в работе [18]. Поэтому зависимость $E_1(z)$, однозначно определяемую соотношениями (11) и (12), также считаем известной.

Возникающие в пластинке s- и p-поляризованные волны второй гармоники

$$I_1 E_{1s}(z)\mathbf{e}_y \exp\left[i(2\omega t - 2k_x x)\right] + \text{c.c.},$$

$$I_1 H_{1p}(z)\mathbf{e}_y \exp\left[i(2\omega t - 2k_x x)\right] + \text{c.c.}$$

будут продолжать распространяться в граничащих с нелинейной средой однородных линейных средах соответственно в виде s-поляризованной волны с напряженностью электрического поля

$$G^{(1)}_{1s} I_1 \mathbf{e}_y \exp\left[i(2\omega t - 2k_x x + 2k_z(z-z_1))\right] + \text{c.c.}$$

и p-поляризованной волны с напряженностью магнитного поля

$$G^{(1)}_{1p} I_1 \mathbf{e}_y \exp\left[i(2\omega t - 2k_x x + 2k_z(z-z_1))\right] + \text{c.c.}$$

в области $z < z_1$ (перед пластинкой) и в виде волн

$$G^{(2)}_{1s} I_1 \mathbf{e}_y \exp\left[i(2\omega t - 2k_x x - 2k_z(z-z_2))\right] + \text{c.c.},$$

$$G^{(2)}_{1p} I_1 \mathbf{e}_y \exp\left[i(2\omega t - 2k_x x - 2k_z(z-z_2))\right] + \text{c.c.}$$

в области $z > z_2$ (за пластинкой). Коэффициенты $G^{(1)}_{1s}(k_z)$, $G^{(2)}_{1s}(k_z)$ и $G^{(1)}_{1p}(k_z)$, $G^{(2)}_{1p}(k_z)$ в этих формулах характеризуют эффективность преобразования пластиной падающей на нее s-поляризованной волны с частотой ω соответственно в s- и p-поляризованные волны второй гармоники, распространяющиеся по обе стороны от пластинки. В дальнейшем будем называть их коэффициентами преобразования в волны второй гармоники s- и p-поляризации «на отражении» ($G^{(1)}_{1s}$, $G^{(1)}_{1p}$) или «на прохождении» ($G^{(2)}_{1s}$, $G^{(2)}_{1p}$). На плоских поверхностях пластинки функции $E_{1s}(z)$ и $H_{1p}(z)$ удовлетворяют граничным условиям соответственно (9) и (10), непосредственно следующим из максвелловских граничных условий. С учетом введенных выше обозначений их можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &E_{1s}(z_1) = G^{(1)}_{1s}, \quad \left.\frac{dE_{1s}}{dz}\right|_{z=z_1} = 2ik_z G^{(1)}_{1s}, \\ &E_{1s}(z_2) = G^{(2)}_{1s}, \quad \left.\frac{dE_{1s}}{dz}\right|_{z=z_2} = -2ik_z G^{(2)}_{1s}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &H_{1p}(z_1) = G^{(1)}_{1p}, \\ &\varepsilon^{-1}_{xx}(z_1,2\omega)\left.\frac{dH_{1p}}{dz}\right|_{z=z_1} + k_x\tilde{p}_2(z_1) = \\ &\qquad = 2ik_z\varepsilon_0^{-1}G^{(1)}_{1p}, \\ &H_{1p}(z_2) = G^{(2)}_{1p}, \\ &\varepsilon^{-1}_{xx}(z_2,2\omega)\left.\frac{dH_{1p}}{dz}\right|_{z=z_2} + k_x\tilde{p}_2(z_2) = \\ &\qquad = -2ik_z\varepsilon_0^{-1}G^{(2)}_{1p}. \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть $R_s(z,k_z)$ — некоторое непрерывно дифференцируемое решение однородного уравнения (14):

$$\frac{d^2R_s}{dz^2} + \left[\frac{4\omega^2}{c^2}\varepsilon_{yy}(z,2\omega) - 4k_x^2\right] R_s = 0. \quad (18)$$

Умножая уравнения (14) и (18) соответственно на $R_s(z)$ и $E_{1s}(z)$ и вычитая из первого произведения второе, получим

$$-\frac{16\pi\omega^2}{c^2}\chi^{(2)}_{yyy}(z)E_1^2(z,k_z)R_s(z,k_z) = \\ = \frac{d^2E_{1s}}{dz^2}R_s - \frac{d^2R_s}{dz^2}E_{1s}. \quad (19)$$

Интегрируя равенство (19) в пределах от z_1 до z_2 и пользуясь при вычислении интеграла от правой части (19) методом интегрирования по частям, а также граничными условиями (16), после небольших преобразований получим следующее уравнение Фредгольма первого рода для функции $\chi^{(2)}_{yyy}(z)$:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} \chi^{(2)}_{yyy}(s) K_1(s,k_z)\,ds = \\ = \left[R'_s(z_1) - 2ik_z R_s(z_1)\right] G^{(1)}_{1s}(k_z) - \\ - \left[R'_s(z_2) + 2ik_z R_s(z_2)\right] G^{(2)}_{1s}(k_z) \quad (20)$$

с известным нормируемым ядром

$$K_1(z,k_z) = -16\pi\omega^2 E_1^2(z,k_z) R_s(z,k_z)/c^2.$$

Заметим, что правая часть уравнения (20) перестает зависеть от коэффициента преобразования «на отражении» $G^{(1)}_{1s}$, если $R_s(z,k_z)$ удовлетворяет граничным условиям

$$R_s(z_1) = 1, \quad (dR_s/dz)|_{z=z_1} = 2ik_z, \quad (21)$$

и не зависит от коэффициента преобразования «на прохождении» $G^{(2)}_{1s}$, если

$$R_s(z_2) = 1, \quad (dR_s/dz)|_{z=z_2} = -2ik_z. \quad (22)$$

Пусть для слоя данной толщины в некотором интервале углов падения α известны из эксперимента значения коэффициентов преобразования «на отражении» $G^{(1)}_{1s}(k_z)$ и (или) «на прохождении» $G^{(2)}_{1s}(k_z)$. Тогда при соответствующем выборе граничных условий для вспомогательной функции $R_s(z,k_z)$ правая часть уравнения (20) становится известной. И следовательно, пользуясь стандартными методами решения уравнений Фредгольма первого рода [19, 20], можно восстановить координатную зависимость компоненты $\chi^{(2)}_{yyy}(z)$ тензора квадратичной восприимчивости.

Если повернуть пластинку на 90° вокруг оси z, не меняя плоскость падения и поляризацию падающей волны, то, измерив в некотором интервале углов падения α один из новых коэффициентов преобразования в s-поляризованную волну второй гармоники и действуя аналогично предыдущему случаю, можно восстановить профиль компоненты $\chi^{(2)}_{xxx}(z)$.

В итоге оказываются известными и некоторые другие компоненты симметричного по перестановке последних двух индексов тензора $\hat{\chi}^{(2)}(z,2\omega;\omega,\omega)$, связанные в рассматриваемых нами классах симметрии с компонентами $\chi^{(2)}_{yyy}(z)$ и $\chi^{(2)}_{xxx}(z)$ следующими соотношениями [13]:

$$\begin{aligned} \chi^{(2)}_{yxy}(z) = \chi^{(2)}_{yyx}(z) = \chi^{(2)}_{xyy}(z) = \\ = -\chi^{(2)}_{xxx}(z) = \sigma_1(z), \\ \chi^{(2)}_{xyx}(z) = \chi^{(2)}_{xxy}(z) = \chi^{(2)}_{yxx}(z) = \\ = -\chi^{(2)}_{yyy}(z) = \sigma_2(z). \end{aligned} \quad (23)$$

При этом функция $\sigma_1(z)$ тождественно не равна нулю только в классе 3, а $\sigma_2(z)$ — только в классе $3m$ (с плоскостью симметрии, перпендикулярной оси x) и в классе 3 [13]. Поэтому измерения коэффициентов преобразования s-поляризованной волны основного излучения в s-поляризованную волну второй гармоники имеет смысл проводить только в этих двух классах.

Рассмотрим теперь, какую спектроскопическую информацию можно получить из коэффициентов преобразования s-поляризованной волны основного излучения в p-поляризованную волну второй гармоники. Такое преобразование описывается соотношениями (11), (12), (15) и (17). В правой части (15) нам известна зависимость $\tilde{p}_2(z)$, поскольку профиль компоненты $\chi^{(2)}_{xyy}(z) = \sigma_1(z)$ в классе 3 может быть восстановлен по описанной выше методике (в остальных рассматриваемых классах $\chi^{(2)}_{xyy}(z) \equiv 0$).

Пусть $R_p(z,k_z)$ — непрерывное решение однородного уравнения (15)

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx}(z,2\omega)}\frac{dR_p}{dz}\right) + \\ + \left[\frac{4\omega^2}{c^2} - \frac{4k_x^2}{\varepsilon_{zz}(z,2\omega)}\right] R_p = 0, \quad (24)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$R_p(z_2) = 1, \quad \left.\frac{dR_p}{dz}\right|_{z=z_2} = -\frac{2ik_z}{\varepsilon_0}\,\varepsilon_{xx}(z_2,2\omega) \quad (25)$$

и такое, что $(dR_p/dz)/\varepsilon_{xx}(z,2\omega)$ также является непрерывной функцией. Умножая уравнения (15) и (24) соответственно на $R_p(z)$ и $H_{1p}(z)$ и вычитая из первого произведения второе, получим

$$k_x \chi^{(2)}_{zyy}(z) K_2(z,k_z) = \\ = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx}(z,2\omega)}\frac{dH_{1p}}{dz} + k_x\tilde{p}_2(z)\right) R_p(z) - \\ - \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx}(z,2\omega)}\frac{dR_p}{dz}\right) H_{1p}(z), \quad (26)$$

где

$$K_2(z, k_z) = \frac{16\pi\omega}{c\varepsilon_{zz}(z, 2\omega)} E_1^2(z, k_z) R_p(z, k_z).$$

Интегрируя равенство (26) в пределах от z_1 до z_2 и пользуясь при вычислении интеграла от правой части (26) методом интегрирования по частям, а также граничными условиями (17) и (25), получим следующее уравнение Фредгольма первого рода для пространственного профиля компоненты $\chi^{(2)}_{zyy}(z)$:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} \chi^{(2)}_{zyy}(s) K_2(s, k_z)\, ds = \\ = \left[\frac{R_p'(z_1)}{\varepsilon_{xx}(z_1, 2\omega)} - \frac{2ik_z}{\varepsilon_0} R_p(z_1)\right] \times \\ \times \frac{G^{(1)}_{1p}(k_z)}{k_x} - \int\limits_{z_1}^{z_2} \tilde{p}_2(s) R_p'(s)\, ds, \quad (27)$$

с известным нормируемым ядром $K_2(z, k_z)$ и известной правой частью.

Зная в некотором диапазоне углов падения коэффициенты $G^{(1)}_{1p}(k_z)$ преобразования s-поляризованной волны основного излучения в отраженную волну второй гармоники p-поляризации и решая уравнение (27), можем найти профиль компоненты $\chi^{(2)}_{zyy}(z)$. Последняя не равна нулю во всех рассматриваемых классах симметрии и предельных группах. При этом $\chi^{(2)}_{zxx}(z) = \chi^{(2)}_{zyy}(z)$ во всех случаях, кроме сред класса $mm2$. В кристаллах класса симметрии $mm2$ зависимость $\chi^{(2)}_{zxx}(z)$ может быть восстановлена по той же методике, что и компонента $\chi^{(2)}_{zyy}(z)$, если исследуемую пластину повернуть на 90° вокруг оси z без изменения плоскости падения и поляризации падающей волны.

Таким образом, использование s-поляризованной волны основного излучения позволяет восстанавливать профили трех независимых компонент тензора $\hat{\chi}^{(2)}(z, 2\omega; \omega, \omega)$ в одномерно неоднородных кристаллах, относящихся к классу 3, двух независимых компонент в кристаллах классов $mm2$, $3m$ и одной — во всех остальных рассматриваемых классах и предельных группах (4, 6, $4mm$, $6mm$, ∞, ∞m).

4. НАХОЖДЕНИЕ КООРДИНАТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОМПОНЕНТЫ $\chi^{(2)}_{yxz}(z)$

При исследовании пластин, среда которых имеет класс симметрии 3, 4, 6 или предельную группу симметрии ∞, можно найти еще одну независимую компоненту $\hat{\chi}^{(2)}_{yxz}(z)$, используя третью геометрию измерений (в остальных рассматриваемых классах эта компонента равна нулю). В этом случае используется p-поляризованная волна основного излучения, падающая на пластину под углом α, вектор напряженности магнитного поля которой в области $z < z_1$ равен

$$H_{02}\mathbf{e}_y \exp\left[i(\omega t - k_x x - k_z(z - z_1))\right] + \text{c.c.},$$

а измерение амплитуды волны второй гармоники производится для ее s-поляризации. При этом в пластинке будет распространяться плоская волна с частотой ω и напряженностью магнитного поля

$$H_{02} H_2(z)\mathbf{e}_y \exp\left[i(\omega t - k_x x)\right] + \text{c.c.}$$

Изменение ее безразмерной амплитуды описывается уравнением (6) с правой частью, равной нулю:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx}(z, \omega)} \frac{dH_2}{dz}\right) + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k_x^2}{\varepsilon_{zz}(z, \omega)}\right] H_2 = 0, \quad (28)$$

решение которого удовлетворяет при $z = z_{1,2}$ граничным условиям

$$\varepsilon_{xx}^{-1}(z_1, \omega) \left.\frac{dH_2}{dz}\right|_{z=z_1} - ik_z\varepsilon_0^{-1} H_2(z_1) = \\ = -2ik_z\varepsilon_0^{-1}, \quad (29) \\ \varepsilon_{xx}^{-1}(z_2, \omega) \left.\frac{dH_2}{dz}\right|_{z=z_2} + ik_z\varepsilon_0^{-1} H_2(z_2) = 0,$$

непосредственно следующим из максвелловских граничных условий (10). Уравнения (28), (29) позволяют однозначно рассчитать зависимость $H_2(z)$, так как линейные диэлектрические свойства исследуемой пластины мы считаем известными [15–17]. Распространение в пластинке волны

$$H_{02} H_2(z)\mathbf{e}_y \exp\left[i(\omega t - k_x x)\right] + \text{c.c.}$$

приведет к возникновению нелинейной поляризации среды:

$$P_{2j}(z, 2\omega) = \\ = I_2 \left[\chi^{(2)}_{jxx}(z) E_{2x}^2(z) + 2\chi^{(2)}_{jxz}(z) E_{2x}(z) E_{2z}(z) + \right. \\ \left. + \chi^{(2)}_{jzz}(z) E_{2z}^2(z)\right] \exp\left[i(2\omega t - 2k_x x)\right] + \text{c.c.}, \quad (30)$$

где $I_2 = H_{02}^2$ и в силу формулы (8)

$$E_{2x}(z) = \frac{ic}{\omega\varepsilon_{xx}(z, \omega)} \frac{dH_2}{dz},$$

$$E_{2z}(z) = -\frac{ck_x}{\omega\varepsilon_{zz}(z, \omega)} H_2(z).$$

При записи выражения (30) использована симметричность тензора $\hat{\chi}^{(2)}(z)$ по перестановке двух последних индексов.

Наличие нелинейной поляризации среды (30) в пластинке приводит к генерации s- и p-поляризованных волн второй гармоники. При этом вектор напряженности электрического поля s-поляризованной волны на удвоенной частоте в пластинке может быть записан в виде

$$I_2 E_{2s}(z) e_y \exp\left[i(2\omega t - 2k_x x)\right] + \text{c.c.},$$

где изменение $E_{2s}(z)$ описывается уравнением

$$\frac{d^2 E_{2s}}{dz^2} + \left[\frac{4\omega^2}{c^2}\varepsilon_{yy}(z, 2\omega) - 4k_x^2\right] E_{2s} = \\ = \frac{16\pi i k_x}{\varepsilon_{xx}(z,\omega)\varepsilon_{zz}(z,\omega)} \frac{dH_2^2}{dz} \chi_{yxz}^{(2)}(z) + k_x p_3(z), \quad (31)$$

следующим из уравнения (5) и выражения (30) для нелинейной поляризации среды. Здесь

$$p_3(z) = \frac{16\pi \chi_{yxx}^{(2)}(z)}{k_x \varepsilon_{xx}^2(z,\omega)} \left(\frac{dH_2}{dz}\right)^2.$$

При записи уравнения (31) учтено, что в рассматриваемых классах компонента $\chi_{yzz}^{(2)}$ тождественно равна нулю. В точках $z = z_{1,2}$ безразмерная амплитуда $E_{2s}(z)$ удовлетворяет граничным условиям, аналогичным (16):

$$\begin{aligned} E_{2s}(z_1) &= G_{2s}^{(1)}, & \left.\frac{dE_{2s}}{dz}\right|_{z=z_1} &= 2ik_z G_{2s}^{(1)}, \\ E_{2s}(z_2) &= G_{2s}^{(2)}, & \left.\frac{dE_{2s}}{dz}\right|_{z=z_2} &= -2ik_z G_{2s}^{(2)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь $G_{2s}^{(1)}(k_z)$ и $G_{2s}^{(2)}(k_z)$ — коэффициенты преобразования p-поляризованной волны основного излучения в волны второй гармоники s-поляризации, распространяющиеся от пластинки соответственно в отрицательном и положительном направлениях оси z. Если значения коэффициента преобразования «на отражении» $G_{2s}^{(1)}(k_z)$ известны в некотором диапазоне углов падения α волны основного излучения, то пространственную зависимость компоненты $\chi_{yxz}^{(2)}(z)$ можно восстановить. При исследовании одномерно неоднородных сред с классом симметрии 3 для расчета $p_3(z)$ также необходимо знать профиль компоненты $\chi_{yxx}^{(2)}(z) \equiv \sigma_2$, который может быть найден с использованием s-поляризованного излучения основной частоты (см. уравнения (20), (23)). Процедура восстановления $\chi_{yxz}^{(2)}(z)$, как и в предыдущих двух случаях, сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с нормируемым ядром и известной правой частью. Последнее получается из уравнения (31) и граничных условий (32), точно так же как было выведено уравнение (20), и имеет вид

$$\int_{z_1}^{z_2} \chi_{yxz}^{(2)}(s) K_3(s, k_z)\, ds = \left[R_s'(z_1) - 2ik_z R_s(z_1)\right] \times \\ \times \frac{G_{2s}^{(1)}(k_z)}{k_x} - \int_{z_1}^{z_2} p_3(s) R_s(s, k_z)\, ds. \quad (33)$$

В формуле (33)

$$K_3(z, k_z) = \frac{16\pi i R_s(z, k_z)}{\varepsilon_{xx}(z,\omega)\varepsilon_{zz}(z,\omega)} \frac{dH_2^2}{dz},$$

где $H_2(z, k_z)$ — решение уравнения (28) с граничными условиями (29), $R_s(z, k_z)$ — решение уравнения (18), удовлетворяющее граничным условиям (22), а функция $p_3(z)$ определена после формулы (31) и не равна нулю только для кристаллов классов $3m$ и 3. Как уже говорилось, тензор $\hat{\chi}^{(2)}(z, 2\omega; \omega, \omega)$ симметричен по перестановке последних двух индексов, поэтому $\chi_{yzx}^{(2)}(z) = \chi_{yxz}^{(2)}(z)$. Эти компоненты не равны нулю только в средах, относящихся к классам симметрии 3, 4, 6 или к предельной группе ∞. При этом также $\chi_{xzy}^{(2)}(z) = \chi_{xyz}^{(2)}(z) = -\chi_{yxz}^{(2)}(z)$.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ КОМПОНЕНТ $\chi_{yyz}^{(2)}(z)$, $\chi_{xxz}^{(2)}(z)$ И $\chi_{zzz}^{(2)}(z)$

Пусть из области $z < z_1$ на исследуемую пластинку под углом α падает плоская волна основного излучения, имеющая s- и p-поляризованные компоненты. Векторы напряженности электрического поля ее s-поляризованной компоненты и магнитного поля ее p-поляризованной компоненты задаются соответственно формулами

$$E_{03}\mathbf{e}_y \exp\left[i(\omega t - k_x x - k_z(z - z_1))\right] + \text{c.c.},$$

$$H_{03}\mathbf{e}_y \exp\left[i(\omega t - k_x x - k_z(z - z_1))\right] + \text{c.c.}$$

В этом случае в пластинке распространяются s- и p-поляризованные волны с частотой ω. При этом напряженность электрического поля в s-поляризованной волне имеет вид

$$E_{03}E_1(z)\mathbf{e}_y \exp\left[i(\omega t - k_x x)\right] + \text{c.c.},$$

а напряженность магнитного поля в p-поляризованной волне —

$$H_{03}H_2(z)\mathbf{e}_y \exp\left[i(\omega t - k_x x)\right] + \text{c.c.}$$

Изменение безразмерных амплитуд $E_1(z)$ и $H_2(z)$ этих волн описывается уравнениями (11), (12) и (28), (29).

Распространяющаяся в среде волна основного излучения создает в ней нелинейную поляризацию на удвоенной частоте, проекция которой на ось y равна

$$\begin{aligned} &P_{3y}(z, 2\omega) = \\ &= I_3 \Big[\chi^{(2)}_{yxx}(z)E^2_{2x}(z) + 2\chi^{(2)}_{yxy}(z)E_{2x}(z)E_1(z) + \\ &\quad + 2\chi^{(2)}_{yxz}(z)E_{2x}(z)E_{2z}(z) + \\ &\quad + \chi^{(2)}_{yyy}(z)E^1_1(z) + 2\chi^{(2)}_{yyz}(z)E_1(z)E_{2z}(z)\Big] \times \\ &\quad \times \exp\left[i(2\omega t - 2k_x x)\right] + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь $I_3 = E_{03}H_{03}$, а $E_{2x}(z)$ и $E_{2z}(z)$ связаны с dH_2/dz и $H_2(z)$ соотношениями, приведенными после формулы (30). В равенстве (34) также учтено, что в рассматриваемых классах компонента $\chi^{(2)}_{yzz} \equiv \equiv 0$. В результате в пластинке происходит генерация s-поляризованной волны второй гармоники, вектор напряженности электрического поля которой можно записать в виде

$$I_3 E_{3s}(z) e_y \exp\left[i(2\omega t - 2k_x x)\right] + \text{c.c.},$$

где изменение $E_{3s}(z)$ описывается уравнением (5):

$$\frac{d^2 E_{3s}}{dz^2} + \left[\frac{4\omega^2}{c^2}\varepsilon_{yy}(z, 2\omega) - 4k_x^2\right] E_{3s} = = -\frac{16\pi\omega^2}{I_3 c^2} P_{3y}(z, 2\omega). \quad (35)$$

В точках $z = z_{1,2}$ безразмерная амплитуда $E_{3s}(z)$ удовлетворяет граничным условиям, аналогичным (16):

$$\begin{aligned} E_{3s}(z_1) &= G^{(1)}_{3s}, \quad \left.\frac{dE_{3s}}{dz}\right|_{z=z_1} = 2ik_z G^{(1)}_{3s}, \\ E_{3s}(z_2) &= G^{(2)}_{3s}, \quad \left.\frac{dE_{3s}}{dz}\right|_{z=z_2} = -2ik_z G^{(2)}_{3s}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь $G^{(1)}_{3s}(k_z)$ и $G^{(2)}_{3s}(k_z)$ — коэффициенты преобразования двухкомпонентной волны основного излучения в волны второй гармоники s-поляризации, распространяющиеся от пластинки соответственно в отрицательном и положительном направлениях оси z.

Пользуясь уравнениями (14), (31), (35), граничными условиями (16), (32), (36) и материальным уравнением (34) для нелинейной поляризации среды $P_{3y}(z, 2\omega)$, можно получить следующую граничную задачу для функции $E(z) \equiv E_{3s}(z) - - [E_{1s}(z) + E_{2s}(z)]$:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 E}{dz^2} + \left[\frac{4\omega^2}{c^2}\varepsilon_{yy}(z, 2\omega) - 4k_x^2\right] E = \\ &= \frac{32\pi\omega k_x}{c\varepsilon_{zz}(z, \omega)} E_1(z)H_2(z)\chi^{(2)}_{yyz}(z) + k_x p_4(z), \\ &E(z_1) = G^{(1)}_s, \\ &\left.\frac{dE}{dz}\right|_{z=z_1} = 2ik_z G^{(1)}_s, \quad E(z_2) = G^{(2)}_s, \\ &\left.\frac{dE}{dz}\right|_{z=z_2} = -2ik_z G^{(2)}_s, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$p_4(z) = -\frac{32\pi i\omega\chi^{(3)}_{yxy}(x)}{ck_x\varepsilon_{xx}(z, \omega)} E_1(z, k_z)\frac{dH_2}{dz},$$

$$G^{(1)}_s \equiv G^{(1)}_{3s} - \left(G^{(1)}_{1s} + G^{(1)}_{2s}\right),$$

$$G^{(2)}_s \equiv G^{(2)}_{3s} - \left(G^{(2)}_{1s} + G^{(2)}_{2s}\right).$$

Заметим, что коэффициенты $G^{(1)}_{1s}$ и $G^{(2)}_{1s}$ не равны нулю только для кристаллов классов 3, $3m$, а коэффициенты $G^{(1)}_{2s}$ и $G^{(2)}_{2s}$ — для сред, имеющих класс симметрии 3, $3m$, 4, 6 или предельную группу симметрии ∞.

Действуя так же, как при выводе уравнения (20), из граничной задачи (37) можно получить следующее интегральное уравнение Фредгольма с нормируемым ядром для пространственного профиля компоненты $\chi^{(2)}_{yyz}(z)$:

$$\int_{z_1}^{z_2} \chi^{(2)}_{yyz}(s)K_4(s, k_z)\,ds = \left[R'_s(z_1) - 2ik_z R_s(z_1)\right] \times \frac{G^{(1)}_s(k_z)}{k_x} - \int_{z_1}^{z_2} p_4(s)R_s(s, k_z)\,ds. \quad (38)$$

В формуле (38)

$$K_4(z, k_z) = \frac{32\pi\omega}{c\varepsilon_{zz}(z, \omega)} E_1(z, k_z)H_2(z, k_z)R_s(z, k_z),$$

где $E_1(z, k_z)$ — решение граничной задачи (11), (12), $H_2(z, k_z)$ — решение уравнения (28) с граничными условиями (29), а $R_s(z, k_z)$ — решение уравнения (18), удовлетворяющее граничным условиям (22).

Для кристаллов класса 3 зависимость $\chi^{(2)}_{yxy}(z) = = \sigma_1(z)$ можно восстановить по описанной в разд. 3

методике (в остальных рассматриваемых классах $\chi^{(2)}_{yxy}(z) \equiv 0$) и, следовательно, в правой части уравнения (38) функция $p_4(z)$ известна. Зная также в некотором диапазоне углов падения коэффициенты $G^{(1)}_{1s}$, $G^{(1)}_{2s}$, $G^{(1)}_{3s}$ и решая уравнение (38), мы можем найти профиль компоненты $\chi^{(2)}_{yyz}(z)$. Последняя не равна нулю во всех рассматриваемых классах симметрии и предельных группах. Кроме того, $\chi^{(2)}_{xxz}(z) = \chi^{(2)}_{yyz}(z)$ во всех случаях, кроме сред класса $mm2$. В кристаллах класса симметрии $mm2$ зависимость $\chi^{(2)}_{xxz}(z)$ может быть восстановлена по той же методике, что и профиль компоненты $\chi^{(2)}_{yyz}(z)$, если исследуемую пластину повернуть на 90° вокруг оси z без изменения плоскости падения и поляризации падающей волны. Заметим также, что поскольку тензор $\hat{\chi}^{(2)}(z, 2\omega; \omega, \omega)$ симметричен по перестановке последних двух индексов, выполняются равенства $\chi^{(2)}_{yzy}(z) = \chi^{(2)}_{yyz}(z)$ и $\chi^{(2)}_{xzx}(z) = \chi^{(2)}_{xxz}(z)$.

В разд. 4 обсуждались возможности восстановления зависимости $\chi^{(2)}_{yxz}(z)$ по результатам исследования генерации s-поляризованной волны второй гармоники, происходящей в пластинке при падении на нее p-поляризованной волны основного излучения. Однако в этом случае также будет происходить и генерация p-поляризованной волны на удвоенной частоте. Вектор напряженности ее магнитного поля можно записать в виде

$$I_2 H_{2p}(z)\mathbf{e}_y \exp\left[i(2\omega t - 2k_x x)\right] + \text{c.c.},$$

при этом изменение нормированной амплитуды $H_{2p}(z)$ описывается уравнением

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx}(z,2\omega)}\,\frac{dH_{2p}}{dz}\right) + \left[\frac{4\omega^2}{c^2} - \frac{4k_x^2}{\varepsilon_{zz}(z,2\omega)}\right] H_{2p} = \\ = \frac{16\pi c k_x^3 H_2^2(z)\chi^{(2)}_{zzz}(z)}{\omega\varepsilon_{zz}(z,2\omega)\varepsilon^2_{zz}(z,\omega)} + k_x^3\left[p_5(z) - \frac{d\tilde{p}_5}{dz}\right], \quad (39)$$

непосредственно следующим из уравнения (6) и выражения для нелинейной поляризации среды (30). Здесь

$$\tilde{p}_5(z) = \frac{8\pi c}{\omega k_x^3 \varepsilon_{xx}(z,2\omega)\varepsilon_{xx}(z,\omega)}\,\frac{dH_2}{dz} \times \\ \times \left(\frac{2k_x\chi^{(2)}_{xxz}(z)}{\varepsilon_{zz}(z,\omega)}\,H_2 - \frac{i\chi^{(2)}_{xxx}(z)}{\varepsilon_{xx}(z,\omega)}\,\frac{H_2}{dz}\right),$$

$$p_5(z) = -\frac{16\pi c\chi^{(2)}_{zxx}(z)}{\omega k_x^2 \varepsilon_{zz}(z,2\omega)\varepsilon^2_{xx}(z,\omega)}\left(\frac{dH_2}{dz}\right)^2.$$

При записи уравнения (39) учтено, что в рассматриваемых классах компоненты $\chi^{(2)}_{zxz}$ и $\chi^{(2)}_{xzz}$ тождественно равны нулю. В точках $z = z_{1,2}$ безразмерная амплитуда $H_{2p}(z)$ удовлетворяет граничным условиям, аналогичным (17):

$$\begin{aligned} H_{2p}(z_1) &= G^{(1)}_{2p}, \\ \varepsilon^{-1}_{xx}(z_1,2\omega)\,\frac{dH_{2p}}{dz}\bigg|_{z=z_1} &+ k_x^3\tilde{p}_5(z_1) = \\ &= 2ik_z\varepsilon_0^{-1}G^{(1)}_{2p}, \\ H_{2p}(z_2) &= G^{(2)}_{2p}, \\ \varepsilon^{-1}_{xx}(z_2,2\omega)\,\frac{dH_{2p}}{dz}\bigg|_{z=z_2} &+ k_x^3\tilde{p}_5(z_2) = \\ &= -2ik_z\varepsilon_0^{-1}G^{(2)}_{2p}. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь $G^{(1)}_{2p}(k_z)$ и $G^{(2)}_{2p}(k_z)$ — коэффициенты преобразования p-поляризованной волны основного излучения в волны второй гармоники p-поляризации, распространяющиеся от пластинки по обе стороны от нее. Если значения коэффициента преобразования «на отражении» $G^{(1)}_{2p}(k_z)$ известны в некотором диапазоне углов падения α волны основного излучения, то пространственную зависимость компоненты $\chi^{(2)}_{zzz}(z)$ можно восстановить. Но это можно сделать только после предварительного восстановления по описанным выше методикам профилей компонент $\chi^{(2)}_{zxx}(z)$ и $\chi^{(2)}_{xxz}(z)$, необходимых для расчета функций $p_5(z)$ и $\tilde{p}_5(z)$. При исследовании одномерно неоднородных сред с классом симметрии 3 для этого также необходимо знать профиль компоненты $\chi^{(2)}_{xxx}(z) \equiv -\sigma_1$, который может быть найден с использованием s-поляризованного излучения основной частоты (см. разд. 3). Процедура восстановления $\chi^{(2)}_{zzz}(z)$, как и в предыдущих случаях, сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с нормируемым ядром и известной правой частью. Это уравнение получается из равенства (39) и граничных условий (40), так же как из уравнений (15), (17) было получено соотношение (27), и имеет вид

$$\int_{z_1}^{z_2} \chi^{(2)}_{zzz}(s)K_5(s,k_z)\,ds = \\ = \left[\frac{R'_p(z_1)}{\varepsilon_{xx}(z_1,2\omega)} - \frac{2ik_z}{\varepsilon_0}\,R_p(z_1)\right]\frac{G^{(1)}_{2p}(k_z)}{k_x^3} - \\ - \int_{z_1}^{z_2}\left[p_5(s)R_p(s) + \tilde{p}_5(s)R'_p(s)\right]\,ds. \quad (41)$$

В формуле (41)

$$K_5(z,k_z) = \frac{16\pi c H_2^2(z,k_z) R_p(z,k_z)}{\omega \varepsilon_{zz}(z,2\omega)\varepsilon_{zz}^2(z,\omega)},$$

где $H_2(z,k_z)$ — решение уравнения (28) с граничными условиями (29), а $R_p(z,k_z)$ — использовавшееся ранее при записи (27) решение уравнения (24), удовлетворяющее граничным условиям (25).

6. ЗАМЕНА ФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ ИНТЕНСИВНОСТИ

До сих пор считалось, что из эксперимента известны комплексные коэффициенты преобразования волны основного излучения в волну второй гармоники. Однако для их определения требуются достаточно сложные фазовые измерения. Докажем, что фазовых измерений можно избежать, если для каждого угла падения волны основного излучения провести по три измерения модуля коэффициентов преобразования. Первое измерение проводится только с исследуемой пластинкой, два других — с исследуемой и дополнительной пластинками. Линейные и нелинейные свойства дополнительной пластинки должны быть известными, класс симметрии ее среды может быть любым, кроме классов 1, 2 и m, а оси ее кристаллофизической системы координат должны быть ориентированы по осям x, y, z.

Пусть измерения интенсивности волны второй гармоники проводятся только на отражении. В этом случае для функции $R_s(z,k_z)$, входящей в интегральные уравнения (20), (33) и (38), следует брать граничные условия (22), а для функции $R_p(z,k_z)$, входящей в уравнения (27) и (41), — граничные условия (25). Тогда уравнения (20), (27), (33), (38) и (41) можно рассматривать как частные случаи следующего уравнения Фредгольма первого рода:

$$\int_{z_1}^{z_2} q(s)K(s,k_z)\,ds + \int_{z_1}^{z_2} [p(s,k_z)R(s,k_z) + \tilde{p}(s,k_z)R'(s,k_z)]\,ds = I_0(k_z), \quad (42)$$

где

$$I_0(k_z) = [T(z_1)R'(z_1) - 2ik_z r_0 R(z_1)]\,\frac{G^{(1)}(k_z)}{k_x^n}.$$

Уравнение (42) переходит в (20), если в нем положить

$$q(z) = \chi_{yyy}^{(2)}(z), \quad K(z,k_z) = K_1(z,k_z),$$

$$p(z,k_z) = \tilde{p}(z,k_z) = 0,$$
$$R(z,k_z) = R_s(z,k_z), \quad T(z) = r_0 = 1,$$
$$G^{(1)}(k_z) = G_{1s}^{(1)}(k_z), \quad n = 0.$$

При

$$q(z) = \chi_{zyy}^{(2)}(z), \quad K(z,k_z) = K_2(z,k_z),$$

$$p(z,k_z) = 0, \quad \tilde{p}(z,k_z) = \tilde{p}_2(z,k_z),$$
$$R(z,k_z) = R_p(z,k_z), \quad T(z) = 1/\varepsilon_{xx}(z,2\omega),$$
$$r_0 = 1/\varepsilon_0, \quad G^{(1)}(k_z) = G_{1p}^{(1)}(k_z), \quad n = 1$$

уравнение (42) переходит в уравнение (27). Если положить

$$q(z) = \chi_{yxz}^{(2)}(z), \quad K(z,k_z) = K_3(z,k_z),$$

$$p(z,k_z) = p_3(z,k_z), \quad \tilde{p}(z,k_z) = 0,$$
$$R(z,k_z) = R_s(z,k_z), \quad T(z) = r_0 = 1,$$
$$G^{(1)}(k_z) = G_{2s}^{(1)}(k_z), \quad n = 1,$$

то уравнение (42) совпадает с уравнением (33). При

$$q(z) = \chi_{yyz}^{(2)}(z), \quad K(z,k_z) = K_4(z,k_z),$$

$$p(z,k_z) = p_4(z,k_z), \quad \tilde{p}(z,k_z) = 0,$$
$$R(z,k_z) = R_s(z,k_z), \quad T(z) = r_0 = 1,$$
$$G^{(1)}(k_z) = G_{s}^{(1)}(k_z), \quad n = 1$$

уравнение (42) переходит в уравнение (38). И наконец, уравнение (42) совпадает с уравнением (41), если

$$q(z) = \chi_{zzz}^{(2)}(z), \quad K(z,k_z) = K_5(z,k_z),$$

$$p(z,k_z) = p_5(z,k_z), \quad \tilde{p}(z,k_z) = \tilde{p}_5(z,k_z),$$
$$R(z,k_z) = R_p(z,k_z), \quad T(z) = 1/\varepsilon_{xx}(z,2\omega),$$
$$r_0 = 1/\varepsilon_0, \quad G^{(1)}(k_z) = G_{2p}^{(1)}(k_z), \quad n = 3.$$

Поскольку комплексные функции $K(z,k_z)$, $R(z,k_z)$, $p(z,k_z)$, $\tilde{p}(z,k_z)$ и $T(z)$ в каждом случае определяются только линейными или найденными на предшествующих этапах исследования нелинейными свойствами исследуемой пластинки, их можно считать известными. Поэтому наиболее существенный шаг к нахождению $q(z)$ связан с определением из эксперимента действительной и мнимой частей комплексной функции $I_0(k_z)$.

Поместим в области $z_{d1} < z < z_1$ перед исследуемой пластиной (необязательно вплотную к ней) первую дополнительную пластину с известными линейными и нелинейными свойствами. Для новой одномерно неоднородной структуры можно записать уравнение, аналогичное (42):

$$\int_{z_{d1}}^{z_2} q_{d1}(s)K_{d1}(s,k_z)\,ds + \\ + \int_{z_{d1}}^{z_2} \left[p_{d1}(s,k_z)R_{d1}(s,k_z) + \tilde{p}_{d1}(s,k_z)R'_{d1}(s,k_z)\right] ds = \\ = \left[T_{d1}(z_{d1})R'_{d1}(z_{d1}) - 2ik_z r_0 R_{d1}(z_{d1})\right] \times \\ \times \frac{G^{(1)}_{d1}(k_z)}{k_x^n}. \quad (43)$$

Здесь $G^{(1)}_{d1}(k_z)$ — коэффициент, характеризующий эффективность преобразования волны с частотой ω в отраженную волну второй гармоники исследуемой и эталонной пластинами вместе взятыми. Входящие в формулу (43) функции $q_{d1}(z)$, $K_{d1}(z,k_z)$, $p_{d1}(z,k_z)$, $\tilde{p}_{d1}(z,k_z)$, $R_{d1}(z,k_z)$ и $T_{d1}(z)$, а также величины r_0 и n определяются соотношениями, аналогичными тем, что выписаны после уравнения (42). Их значения в области $z_{d1} < z < z_1$ известны благодаря известным линейным свойствам исследуемой пластины, а также линейным и нелинейным диэлектрическим параметрам эталонной пластины. Следовательно, функция

$$J_1(k_z) \equiv \int_{z_{d1}}^{z_1} q_{d1}(s)K_{d1}(s,k_z)\,ds + \\ + \int_{z_{d1}}^{z_1} \left[p_{d1}(s,k_z)R_{d1}(s,k_z) + \\ + \tilde{p}_{d1}(s,k_z)R'_{d1}(s,k_z)\right] ds \quad (44)$$

также может считаться известной.

Заметим, что при $z \in [z_1, z_2]$ выполняются равенства $q_{d1}(z) = q(z)$, $T_{d1}(z) = T(z)$, $R_{d1}(z,k_z) = R(z,k_z)$. Первые два равенства очевидны, а справедливость последнего соотношения следует из того, что граничные условия (22) и (25) для вспомогательных функций $R_s(z)$ и $R_p(z)$ задаются в точке $z = z_2$ и поэтому решения уравнений (18) и (24) для этих функций при $z \in [z_1, z_2]$ никак не зависят от области $z < z_1$.

Наличие дополнительной эталонной пластины, конечно, изменит комплексную амплитуду поля волны основного излучения в исследуемой пластине. Но при этом функции $E_1^{(1d)}(z)$ и $H_2^{(1d)}(z)$ должны удовлетворять при $z = z_2$ тому же однородному граничному условию, что и функции $E_1(z)$, $H_2(z)$ (см. вторые формулы в системах (12) и (29)). Любое однородное граничное условие определяет решение дифференциального уравнения второго порядка с точностью до постоянного множителя, поэтому

$$E_1^{(1d)}(z,k_z) = C_{e1}(k_z)E_1(z,k_z), \\ H_2^{(1d)}(z,k_z) = C_{h1}(k_z)H_2(z,k_z) \quad (45)$$

при $z \in [z_1, z_2]$. Здесь C_{e1} и C_{h1} — известные постоянные комплексные множители, зависящие только от угла падения волны основного излучения на пластинки, от их линейных свойств и взаимного расположения. Из формулы (45) и определения функций $K(z,k_z)$, $p(z,k_z)$ и $\tilde{p}(z,k_z)$ следует, что при $z \in [z_1, z_2]$ имеют место равенства

$$K_{d1}(z,k_z) = C_1(k_z)K(z,k_z), \\ p_{d1}(z,k_z) = C_1(k_z)p(z,k_z), \\ \tilde{p}_{d1}(z,k_z) = C_1(k_z)\tilde{p}(z,k_z),$$

где комплексная константа C_1 равна C_{e1}^2, C_{h1}^2 или $C_{e1}C_{h1}$ в зависимости от используемой геометрии измерений. Таким образом, разбивая область интегрирования в левой части уравнения (43) на две подобласти ($[z_{d1}, z_1]$ и $[z_1, z_2]$) и учитывая соотношения (42) и (44), уравнение (43) для составной пластинки можно записать в виде

$$J_1(k_z) + C_1(k_z)I_0(k_z) = \left[T_{d1}(z_{d1})R'_{d1}(z_{d1}) - \\ - 2ik_z r_0 R_{d1}(z_{d1})\right] \frac{G^{(1)}_{d1}(k_z)}{k_x^n}. \quad (46)$$

Если теперь сместить дополнительную пластину на некоторое расстояние вдоль оси z или заменить ее другой эталонной пластиной таким образом, чтобы пластинка находилась в области $z_{d2} < z < z_1$, то значение правой части формулы (44) изменится на $J_2(k_z)$. Рассуждая далее аналогично первому случаю, получим

$$J_2(k_z) + C_2(k_z)I_0(k_z) = \left[T_{d2}(z_{d2})R'_{d2}(z_{d2}) - \\ - 2ik_z r_0 R_{d2}(z_{d2})\right] \frac{G^{(1)}_{d2}(k_z)}{k_x^n}. \quad (47)$$

После измерения модулей коэффициентов преобразования $G^{(1)}(k_z)$, $G^{(1)}_{d1}(k_z)$ и $G^{(1)}_{d2}(k_z)$ модули правых частей уравнений (42), (46) и (47), которые мы соответственно обозначим A_0, A_1 и A_2, оказываются известными величинами, и становится возможным записать соотношения

$$|I_0(k_z)| = A_0, \quad \left|I_0(k_z) + \tilde{J}_1(k_z)\right| = \tilde{A}_1,$$
$$\left|I_0(k_z) + \tilde{J}_2(k_z)\right| = \tilde{A}_2, \tag{48}$$

где

$$\tilde{J}_n(k_z) = \frac{J_n(k_z)}{C_n(k_z)}, \quad \tilde{A}_n = \frac{A_n}{|C_n(k_z)|}, \quad n = 1, 2.$$

Из формулы (48) после небольших преобразований можно получить систему линейных уравнений

$$\operatorname{Re}\tilde{J}_{1,2}\operatorname{Re}I_0 + \operatorname{Im}\tilde{J}_{1,2}\operatorname{Im}I_0 = \\ = \frac{\tilde{A}_{1,2}^2 - A_0^2 - |\tilde{J}_{1,2}|^2}{2}, \tag{49}$$

позволяющую однозначно найти $\operatorname{Re}I_0$ и $\operatorname{Im}I_0$, если ее определитель

$$\operatorname{Re}\tilde{J}_1\operatorname{Im}\tilde{J}_2 - \operatorname{Im}\tilde{J}_1\operatorname{Re}\tilde{J}_2 \equiv \operatorname{Im}\{\tilde{J}_1^*\tilde{J}_2\}$$

не равен нулю. Заметим, что последнее обстоятельство является решающим при выборе эталонных пластин и их расположения относительно исследуемой пластины. Выполнение этого условия должно быть проверено до проведения измерений. Нетрудно видеть, что предлагаемая методика замены фазовых измерений измерениями интенсивности основана на использовании интерференции волн второй гармоники и учитывает интерференцию волн основного излучения в системе из двух параллельных пластин. Поэтому для ее реализации необходимо обеспечить достаточно точные измерения взаимного расположения пластин.

7. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПРОФИЛЯ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА $\hat{\chi}^{(2)}(z)$ ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ «НА ОТРАЖЕНИИ»

К сожалению, описанное выше восстановление компонент тензора $\hat{\chi}^{(2)}(z)$ на основе решения неоднородного уравнения Фредгольма не всегда является однозначным. В частности, решая уравнение (20), в общем случае нельзя однозначно восстановить профиль компоненты $\chi^{(2)}_{yyy}(z)$ только по значениям коэффициентов преобразования «на прохождении». В качестве примера рассмотрим пластинку из линейно однородной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{yy}(z,\omega) = \varepsilon_{yy}(z, 2\omega) = \varepsilon_0$. В этом случае решения задач (11), (12) и (18), (21) имеют вид соответственно

$$E_1(z, k_z) = \exp\left[-ik_z(z - z_1)\right],$$
$$R_s(z, k_z) = \exp\left[2ik_z(z - z_1)\right]$$

и, следовательно, из уравнения (20) получаем

$$\frac{4\pi\omega^2}{c^2}\int\limits_{z_1}^{z_2}\chi^{(2)}_{yyy}(s)\,ds = \\ = ik_zG^{(2)}_{1s}(k_z)\exp\left[2ik_z(z_2 - z_1)\right]. \tag{50}$$

Очевидно, последнее уравнение позволяет найти только среднее значение компоненты $\chi^{(2)}_{yyy}(z)$.

С другой стороны, если для функции $R_s(z, k_z)$ использовать граничные условия (22), то

$$R_s(z, k_z) = \exp\left[-2ik_z(z - z_2)\right]$$

и из (20) получается другое интегральное уравнение:

$$\frac{4\pi\omega^2}{c^2}\int\limits_{z_1}^{z_2}\chi^{(2)}_{yyy}(s)\exp\left[-4ik_z(s - z_1)\right]\,ds = \\ = ik_zG^{(1)}_{1s}(k_z), \tag{51}$$

правая часть которого зависит только от коэффициентов преобразования пластинкой падающей на нее волны в отраженную волну второй гармоники. Его решение дает возможность восстановить профиль компоненты $\chi^{(2)}_{yyy}(z)$ однозначным образом.

Ниже будет доказано, что восстановление координатных зависимостей всех компонент тензора квадратичной восприимчивости по значениям соответствующих коэффициентов преобразования «на отражении», известным в некотором интервале углов падения α, всегда является однозначным. В этом случае для функции $R_s(z, k_z)$, входящей в интегральные уравнения (20), (33) и (38), следует брать граничные условия (22), а для функции $R_p(z, k_z)$, входящей в уравнения (27) и (41), — граничные условия (25). Тогда уравнения (20), (27), (33), (38) и (41) можно рассматривать как частные случаи уравнения Фредгольма первого рода (42). Докажем, что для однозначного восстановления $q(z)$ (см. обозначения, приведенные после уравнения (42)) достаточно знать коэффициент преобразования $G^{(1)}(k_z)$ в некотором диапазоне углов падения волны основного излучения.

Подчеркнем, что все выписанные ранее уравнения и граничные условия имеют физический смысл только при действительных значениях параметра $k_z \in (0; k]$. Однако формально эти формулы и входящие в них величины можно рассматривать и при любых других действительных, а также комплексных значениях этого параметра.

Во всех пяти рассмотренных выше геометриях измерений ядро уравнения Фредгольма $K(z, k_z)$ равно произведению трех множителей. Первый не зависит от параметра k_z. Вторым множителем является одно из четырех выражений $E_1^2(z, k_z)$, $H_2^2(z, k_z)$, $E_1(z, k_z)H_2(z, k_z)$ или $dH_2^2(z, k_z)/dz$. И наконец, третий множитель — одна из вспомогательных функций $R_s(z, k_z)$ или $R_p(z, k_z)$. При этом функции $R_s(z, k_z)$, $R_p(z, k_z)$, $E_1(z, k_z)$ и $H_2(z, k_z)$ являются решениями однородных дифференциальных уравнений второго порядка с непрерывно дифференцируемыми по k_z коэффициентами (напомним, что $k_x^2 = \omega^2\varepsilon_0/c^2 - k_z^2$). Кроме того, эти четыре функции удовлетворяют граничным условиям, линейно зависящим от k_z. Поэтому $R_s(z, k_z)$, $R_p(z, k_z)$, $E_1(z, k_z)$, $H_2(z, k_z)$ и их производные по координате z являются однозначными аналитическими функциями k_z [21]. Таким образом, для каждого значения z функция $K(z, k_z)$ является произведением однозначных аналитических функций k_z. Поэтому первый из интегралов, стоящих в левой части формулы (42), будет также аналитической функцией этого параметра.

Пусть коэффициент преобразования $G^{(1)}(k_z)$ известен в некотором диапазоне углов падения волны основного излучения с частотой ω, т. е. в некотором диапазоне $K_0 \subset (0; \omega\varepsilon_0^{1/2}/c]$ действительных значений параметра k_z. Тогда, пользуясь формулой (42), можно рассчитать значения функции

$$F(k_z) \equiv \int\limits_{z_1}^{z_2} q(s)K(s, k_z)\, ds$$

на интервале K_0, а затем однозначно найти ее аналитическое продолжение [20] на всю комплексную плоскость параметра k_z.

Предположим, что существуют две функции $q_1(z)$ и $q_2(z)$, такие что

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} q_1(s)K(s, k_z)\, ds = F(k_z)$$

и

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} q_2(s)K(s, k_z)\, ds = F(k_z)$$

при любых значениях k_z. Тогда, очевидно, имеем

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} (q_1(s) - q_2(s))K(s, k_z)\, ds = 0. \qquad (52)$$

Последнее соотношение с точностью до обозначений совпадает с исследованным в работе [17] уравнением (см. уравнение (16) работы [17]). Действуя аналогично [17], можно доказать, что, если функции $\varepsilon_{xx}(z, \omega)$, $\varepsilon_{xx}(z, 2\omega)$, $\varepsilon_{yy}(z, \omega)$, $\varepsilon_{yy}(z, 2\omega)$, $\varepsilon_{zz}(z, \omega)$, $\varepsilon_{zz}(z, 2\omega)$ являются кусочно-аналитическими и принимают значения только в открытой нижней (или только в открытой верхней) комплексной полуплоскости и на положительной части ее вещественной оси, то асимптотика ядра $K(z, k_z)$ при больших значениях k_z такова, что уравнение (52) справедливо на всей комплексной плоскости параметра k_z, только если $q_1(z) \equiv q_2(z)$.

Все эти условия для компонент тензора линейной диэлектрической проницаемости, очевидно, выполняются для реальных поглощающих сред, в том числе и кусочно-неоднородных, и, следовательно, для однозначного восстановления $q(z)$ достаточно знать значения коэффициента преобразования $G^{(1)}(k_z)$ в некотором диапазоне углов падения волны основного излучения с частотой ω.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нами предложена и обоснована методика однозначного восстановления пространственных зависимостей всех компонент комплексного тензора квадратичной восприимчивости, ответственной за генерацию волны второй гармоники в одномерно неоднородной пластине, среда которой может иметь любой класс симметрии (кроме классов 1, 2 или m). Она включает дополнительные измерения интенсивностей волн второй гармоники, генерируемых в специальных условиях с использованием двух дополнительных эталонных пластин, что позволяет избежать сложных фазовых измерений. Меняя частоту ω падающей волны, можно определять профили компонент тензора $\hat{\chi}^{(2)}(z, 2\omega; \omega, \omega)$ на разных частотах и, следовательно, исследовать частотную дисперсию квадратичной восприимчивости различных частей среды. Последнее, в частности, может быть использовано для задач неразрушающего контроля внутренней структуры среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Голенищев-Кутузов, В. А. Голенищев-Кутузов, Р. И. Калимуллин, УФН **170**, 697 (2000).
2. Г. Х. Китаева, А. Н. Пенин, КЭ **34**, 597 (2004).
3. A. Kudlinski, Y. Quiquempois, M. Lelek et al., Appl. Phys. Lett. **83**, 3623 (2003).
4. H. An and S. Fleming, J. Opt. Soc. Amer. B **23**, 2303 (2006).
5. A. Kudlinski, G. Martinelli, and Y. Quiquempois, J. Appl. Phys. **103**, 063109 (2008).
6. S. J. Holmgren, V. Pasiskevicius, S. Wang et al., Opt. Lett. **28**, 1555 (2003).
7. S. K. Johansen and P. Baldi, J. Opt. Soc. Amer. B **21**, 1137 (2004).
8. G. Kh. Kitaeva, V. V. Tishkova, and A. N. Penin, J. Raman Spectr. **36**, 116 (2005).
9. A. Ozcan, M. J. F. Digonnet, and G. S. J. Kino, J. Appl. Phys. **97**, 013502 (2005).
10. A. Ozcan, Proc. SPIE **6389**, 63890Y (2006).
11. H. Guillet de Chatellus, S. Montant, and E. Freysz, Opt. Lett. **25**, 1723 (2000).
12. V. Treanton, N. Godbout, and S. Lacroix, J. Opt. Soc. Amer. B **21**, 2213 (2004).
13. Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская, *Основы кристаллофизики*, Наука, Москва (1975).
14. А. А. Голубков, В. А. Макаров, КЭ **40**, 1045 (2010).
15. А. А. Голубков, В. А. Макаров, Вестник МГУ. Физ. и астрон. № 6, 95 (2009).
16. А. А. Голубков, В. А. Макаров, Опт. и спектр. **108**, 849 (2010).
17. А. А. Голубков, В. А. Макаров, Вестник МГУ. Физ. и астрон. № 3, 32 (2010).
18. А. А. Ангелуц, А. А. Голубков, В. А. Макаров и др., Письма в ЖЭТФ **93**, 209 (2011).
19. И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений*, т. 2, Наука, Москва (1966).
20. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1984).
21. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, Москва (1971).