ЖЭТФ, 2012, том 141, вып. 1, стр. 56–70

ЗАРЯЖЕННЫЙ НЕТОПОЛОГИЧЕСКИЙ СОЛИТОН $SU(2) \times U(1)$ КАЛИБРОВОЧНОЙ МОДЕЛИ

А. Ю. Логинов *

Томский политехнический университет
634050, Томск, Россия

Поступила в редакцию 7 июня 2011 г.

Рассмотрена $SU(2) \times U(1)$ калибровочная модель, являющаяся бозонным сектором Стандартной модели электрослабых взаимодействий. Показано, что в этой модели возможно существование электрически заряженных нетопологических солитонов. Проведено исследование некоторых свойств заряженного нетопологического солитона. Методом пробных функций получены асимптотические выражения для радиуса, энергии и фазовой частоты солитона в «thin-wall» режиме. Получены численные решения полевых уравнений модели, соответствующие электрически заряженным нетопологическим солитонам. Для нескольких значений параметров модели приведены зависимости энергии и заряда солитона от фазовой частоты. Из полученных данных следует, что существует область параметров, в которой заряженный нетопологический солитон является устойчивым относительно перехода в плосковолновую полевую конфигурацию.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие модели теории поля, обладающие глобальными симметриями и сохраняющимися нетеровскими зарядами, допускают существование нетопологических солитонов [1, 2]. Нетопологический солитон представляет собой пространственно-локализованную полевую конфигурацию, которая является минимумом (в общем случае экстремумом) функционала энергии E при фиксированном значении нетеровского заряда Q_N. Характерным свойством нетопологических солитонов является их простая временная зависимость ($\propto \exp(i\omega t)$). Простейшим нетопологическим солитоном является Q-болл [3], возникающий в $U(1)$ инвариантной модели комплексного скалярного поля с нелинейным самодействием. Существование Q-боллов возможно также в моделях со спонтанным нарушением глобальной $U(1)$ симметрии [4, 5] и в моделях с глобальной неабелевой симметрией [6, 7]. В реальных моделях теории поля Q-боллы допустимы в суперсимметричных обобщениях Стандартной модели с плоскими направлениями в потенциале взаимодействия скалярных полей, в частности было показано [8, 9], что Q-боллы присутствуют в минимальной суперсимметричной Стандартной модели (MSSM). В этих суперсимметричных обобщениях Стандартной модели Q-болл формируется из скалярных полей (s-лептонов или s-кварков), несущих ненулевые лептонные или барионные числа. Q-болл представляет большой интерес в космологических моделях, описывающих эволюцию ранней Вселенной [10, 11]. В частности, Q-боллы могут являться местами сосредоточения темной материи, а также могут помочь объяснить наблюдаемое значение барионной асимметрии.

Во всех приведенных выше примерах существование нетопологических солитонов обусловлено глобальной симметрией модели, при этом сохраняющийся нетеровский заряд модели не является источником калибровочного поля. Существование нетопологических солитонов возможно также и в моделях с локальной калибровочной симметрией, как абелевой [12–14], так и неабелевой [15, 16]. В частности, в работе [15] была рассмотрена модель с неабелевой калибровочной группой $SU(2)$ и дублетом самодействующих скалярных полей. Было показано, что в этой модели возможно существование нетопологических солитонов и изучены их основные свойства. В этой модели вакуум полностью нарушает $SU(2)$ локальную калибровочную симметрию и существование солитона становится возможным лишь благодаря дополнительной глобальной симметрии лагранжиана [15]. Полное нарушение калибровочной группы $SU(2)$ приводит к тому, что калибровочные по-

*E-mail: polaroncircle@gmail.com, aloginov@tpu.ru

ля экспоненциально затухают на бесконечности и в решении отсутствуют дальнодействующие калибровочные поля. В то же время нетопологические солитоны абелевых моделей [12–14] обладают дальнодействующим калибровочным полем.

В настоящей работе рассмотрена модель с калибровочной группой $SU(2) \times U(1)$ и дублетом самодействующих скалярных полей. Эта модель представляет собой бозонный сектор классического (не суперсимметричного) варианта [17, 18] Стандартной модели электрослабых взаимодействий. В отличие от модели, рассмотренной в работе [15], в данной модели вакуум не нарушает $SU(2) \times U(1)$ калибровочную группу полностью, поэтому нетопологический солитон модели будет обладать дальнодействующим калибровочным полем. Это калибровочное поле в данном случае является обычным электрическим полем, а нетеровский заряд — электрическим зарядом. Наличие дальнодействующего электрического поля существенно изменяет свойства нетопологического солитона по сравнению с [15].

Работа построена следующим образом. В разд. 2 приведено краткое описание лагранжиана и полевых уравнений модели в унитарной калибровке. В разд. 3 приведен анзац, используемый при решении нелинейных полевых уравнений, и исследованы некоторые его свойства. Получена система нелинейных дифференциальных уравнений для функций анзаца и выражения функционалов энергии и заряда в терминах этих функций. Рассмотрен вопрос об инвариантности этой системы относительно $U(1)_{em}$ калибровочных преобразований и зарядового сопряжения. Исследованы асимптотические свойства решения при $r \to 0$ и $r \to \infty$. Проведено обсуждение зависимости энергии и нетеровского заряда солитона от фазовой частоты. В разд. 4 методом пробных функций получены асимптотические выражения для радиуса, энергии и фазовой частоты солитона в «thin-wall» режиме. В разд. 5 описана процедура численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений для функций анзаца. Приведены результаты численного решения функций анзаца, плотности энергии и плотности нетеровского заряда для нескольких значений параметров модели. Получены кривые зависимостей энергии E, нетеровского заряда Q_N и отношения E/Q_N от фазовой частоты Ω. В Заключении обсуждена возможность существования нетопологических солитонов при современных значениях параметров Стандартной модели, а также перечислены некоторые проблемы, которые не были рассмотрены в настоящей работе.

2. ЛАГРАНЖИАН И ПОЛЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Лагранжиан бозонного сектора Стандартной модели электрослабых взаимодействий имеет вид [17, 18]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^\dagger D^\mu\varphi - \frac{\lambda^2}{2}\left(\varphi^\dagger\varphi - \frac{K^2}{2}\right)^2, \quad (1)$$

где

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu,$$
$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

— тензоры напряженности калибровочных полей A^a_ν, B_ν, соответствующих локальной калибровочной группе $SU(2) \times U(1)$, φ — хиггсовский дублет комплексных скалярных полей,

$$D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi - i\frac{g}{2}\tau^a A^a_\mu\varphi - i\frac{g'}{2}B_\mu\varphi$$

— ковариантная производная хиггсовского дублета. Лагранжиан (1) инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований группы $SU(2) \times U(1)$. Для нахождения нетривиальных решений модели необходимо сначала зафиксировать калибровку в (1). Будем использовать унитарную калибровку, в которой хиггсовский дублет принимает вид

$$\widetilde{\varphi} = 2^{-\frac{1}{2}}(0, \chi),$$

где тильда означает транспонирование. В этой калибровке лагранжиан (1) имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{1}{8}\chi^2\left(g^2A^a_\mu A^{\mu a} + g'^2B_\mu B^\mu - 2gg'A^3_\mu B^\mu\right) - \frac{1}{8}\lambda^2\left(\chi^2 - K^2\right)^2. \quad (2)$$

Переход к унитарной калибровке не фиксирует калибровочную свободу полностью, лагранжиан (2) продолжает оставаться инвариантным относительно локальных калибровочных преобразований электромагнитной группы $U(1)_{em}$:

$$W'^{\pm}_\mu = \exp(\pm i\alpha(x))W^\pm_\mu, \quad A^{3\prime}_\mu = A^3_\mu + g^{-1}\partial_\mu\alpha,$$
$$B'_\mu = B_\mu + g'^{-1}\partial_\mu\alpha, \quad \chi' = \chi, \quad (3)$$

где

$$W^\pm_\mu = 2^{-\frac{1}{2}}\left(A^1_\mu \mp iA^2_\mu\right).$$

Частным случаем (3) являются глобальные калибровочные преобразования, соответствующие

$$\alpha(x) = \text{const}.$$

Наличие у лагранжиана (2) группы глобальной симметрии и соответствующего ей сохраняющегося нетеровского заряда является необходимым условием существования нетопологических солитонов [1]. В унитарной калибровке классическим вакуумом модели является следующая полевая конфигурация:

$$\begin{gathered} A_\mu^1 = 0, \quad A_\mu^2 = 0, \quad A_\mu^3 = g^{-1}\partial_\mu \alpha_{vac}(x), \\ B_\mu = g'^{-1}\partial_\mu \alpha_{vac}(x), \quad \chi = K. \end{gathered} \tag{4}$$

Из (3) следует, что вакуум (4) инвариантен относительно глобальных калибровочных преобразований. Эта инвариантность является необходимым условием существования нетривиальных решений, обладающих конечной энергией и конечным нетеровским зарядом. Таким образом, в Стандартной модели электрослабых взаимодействий возможно существование нетопологических солитонов, причем из-за наличия у (2) ненарушенной электромагнитной группы $U(1)_{em}$ эти солитоны будут электрически заряжены.

Варьируя (2) по входящим в него полям, получим полевые уравнения в унитарной калибровке:

$$\begin{gathered} \partial_\mu F^{\mu\nu a} = -g\epsilon^{abc}A_\mu^b F^{\mu\nu c} - \\ -\frac{\chi^2}{4}\left(g^2 A^{\nu a} - gg' B^\nu \delta^{a3}\right), \end{gathered} \tag{5}$$

$$\partial_\mu B^{\mu\nu} = -\frac{\chi^2}{4}\left(g'^2 B^\nu - gg' A^{\nu\,3}\right), \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \partial_\mu \partial^\mu \chi = \frac{\chi}{4}\left(g^2 A_\mu^b A^{\mu b} + g'^2 B_\mu B^\mu - 2gg' A_\mu^3 B^\mu\right) - \\ -\frac{\lambda^2}{2}\left(\chi^2 - K^2\right)\chi. \end{gathered} \tag{7}$$

Из уравнений (5), (6) следует сохранение токов:

$$\begin{gathered} \partial_\nu J^{\nu a} = 0, \quad J^{\nu a} = -g\epsilon^{abc}A_\mu^b F^{\mu\nu c} - \\ -\frac{\chi^2}{4}\left(g^2 A^{\nu a} - gg' B^\nu \delta^{a3}\right), \end{gathered} \tag{8}$$

$$\partial_\nu j^\nu = 0, \quad j^\nu = -\frac{\chi^2}{4}\left(g'^2 B^\nu - gg' A^{\nu 3}\right). \tag{9}$$

Выражение для тока $J^{\nu 3}$ можно представить в виде

$$J^{\nu 3} = -g\epsilon^{3bc}A_\mu^b F^{\mu\nu c} - \frac{g}{g'}j^\nu,$$

из которого следует сохранение еще одного тока:

$$\partial_\nu j_N^\nu = 0, \quad j_N^\nu = -\epsilon^{3bc}A_\mu^b F^{\mu\nu c}. \tag{10}$$

Можно показать, что j_N^ν является нетеровским током, соответствующим глобальным калибровочным преобразованиям группы $U(1)_{em}$. Как и следовало ожидать, нетеровский ток j_N^ν сохраняется на уравнениях движения. Из уравнений (5), (6) получим уравнение для электромагнитного поля

$$A_\mu = \left(g^2 + g'^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(g' A_\mu^3 + g B_\mu\right),$$

которое имеет вид

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -gg'\left(g^2 + g'^2\right)^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{3bc}A_\mu^b F^{\mu\nu c} \equiv e j_{em}^\nu, \tag{11}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad e = gg'\left(g^2 + g'^2\right)^{-\frac{1}{2}} \equiv g\sin\theta_W.$$

Из уравнения (11) следует, что сохраняющийся нетеровский ток

$$j_N^\nu = -\epsilon^{3bc}A_\mu^b F^{\mu\nu c}$$

является электромагнитным током модели. Кроме того, заметим, что j_N^ν инвариантен относительно калибровочных преобразований (3), но не является ковариантным относительно общих калибровочных преобразований группы $SU(2)\times U(1)$.

3. АНЗАЦ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ

Характерной особенностью нетопологических солитонов является их простая временная зависимость ($\propto \exp(i\omega t)$). Это связано с тем, что нетопологический солитон является минимумом (в общем случае стационарной точкой) функционала энергии при фиксированном нетеровском заряде. Покажем, что аналогичная временная зависимость имеет место и для нашего случая. Энергию полевой конфигурации можно представить в виде

$$E = \int \mathcal{H}\left(P^{ia}, A^{ia}, P^i, B^i, p, \chi\right) d^3x,$$

где $\mathcal{H}$ — плотность гамильтониана, A^{ia}, B^i, χ — канонические поля модели в унитарной калибровке, P^{ia}, P^i, p — соответствующие им канонические импульсы. Плотность гамильтониана $\mathcal{H}$ не определена однозначно и может не совпадать с плотностью энергии, в дальнейшем нам не понадобится явный вид $\mathcal{H}$. Нетеровский заряд Q_N, записанный в терминах канонических переменных, имеет вид

$$Q_N = \int \epsilon^{3bc}A_\mu^b F^{0\mu c} d^3x = -\int \epsilon^{3bc}A^{ib}P^{ic} d^3x.$$

Используя уравнения Гамильтона, запишем вариацию E в окрестности солитона:

$$\delta E = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta A^{ia}}\delta A^{ia} + \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta P^{ia}}\delta P^{ia} + \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta B^{i}}\delta B^{i} + \\ + \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta P^{i}}\delta P^{i} + \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta \chi}\delta \chi + \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta p}\delta p = -\dot{P}^{ia}\delta A^{ia} + \\ + \dot{A}^{ia}\delta P^{ia} - \dot{P}^{i}\delta B^{i} + \dot{B}^{i}\delta P^{i} - \dot{p}\delta\chi + \dot{\chi}\delta p, \quad (12)$$

соответствующая вариация Q_N имеет вид

$$\delta Q_N = -\epsilon^{3bc}\delta A^{ib}P^{ic} - \epsilon^{3bc}A^{ib}\delta P^{ic}. \quad (13)$$

Используя метод множителей Лагранжа,

$$\delta E - \Omega\delta Q_N = 0,$$

из (12), (13) получим временные производные канонических полей и импульсов:

$$\dot{B}^{i} = 0, \quad \dot{P}^{i} = 0, \quad \dot{\chi} = 0, \quad \dot{p} = 0, \\ \dot{A}^{ia} = \epsilon^{abc}\omega^b A^{ic}, \quad \dot{P}^{ia} = \epsilon^{abc}\omega^b P^{ic}, \\ \omega = (0, 0, -\Omega). \quad (14)$$

Из (14) следует, что поля, соответствующие $W^{\pm}_{\mu}$-бозонам, вращаются вокруг оси z в изотопическом пространстве с частотой Ω:

$$W^{\pm}_{\mu}(\mathbf{x}, t) = \exp(\pm i\Omega t)\, W^{\pm}_{\mu}(\mathbf{x}), \quad (15)$$

а остальные поля не зависят от времени.

Для поиска решений полевых уравнений (5), (6), (7) используем сферически-симметричный радиальный анзац:

$$A^0_a(\mathbf{x}) = g^{-1}V_{0a}(r), \quad A^i_a(\mathbf{x}) = g^{-1}\widehat{x}^i V_a(r), \\ B^0(\mathbf{x}) = g'^{-1}W_0(r), \quad B^i(\mathbf{x}) = g'^{-1}\widehat{x}^i W(r), \\ \chi(\mathbf{x}) = 2g^{-1}M(r), \quad (16)$$

где

$$\widehat{x}^i = x^i/r.$$

Особенностью (16) является обращение в нуль пространственных компонент тензоров напряженности полей:

$$F^{00a} \equiv 0, \quad F^{i0a} = -F^{0ia} = \\ = -g^{-1}\widehat{x}^i\left(\epsilon^{abc}\widetilde{V}^{0b}V^c + V'^{0a}\right), \quad F^{ija} = 0, \\ B^{00} \equiv 0, \quad B^{i0} = -B^{0i} = \\ = -g'^{-1}\widehat{x}^i W'^0, \quad B^{ij} = 0, \quad (17)$$

где

$$\widetilde{V}_{0k} = V_{0k} - \delta_{k3}\Omega,$$

а штрих означает производную по r. Подставляя выражения (14), (16), (17) в уравнения (5), (6), (7), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций V_{0a}, W_0, M:

$$\widetilde{V}''_{0a} + 2r^{-1}\widetilde{V}'_{0a} - \left(M^2 + \sum_{k\neq a} V_k^2\right)\widetilde{V}_{0a} + \\ + \epsilon_{abc}\widetilde{V}_{0b}\left(V'_c + 2r^{-1}V_c\right) + 2\epsilon_{abc}\widetilde{V}'_{0b}V_c + \\ + \left(\sum_{k\neq a}\widetilde{V}_{0k}V_k\right)V_a + \delta_{a3}(W_0 - \Omega)M^2 = 0, \quad (18)$$

$$W''_0 + 2r^{-1}W'_0 + \mathrm{tg}^2(\theta_W)M^2(V_{03} - W_0) = 0, \quad (19)$$

$$M'' + 2r^{-1}M' + \frac{1}{4}\times \\ \times\left(\sum_{k=1}^{2}\left(V_{0k}^2 - V_k^2\right) + (V_{03} - W_0)^2 - (V_3 - W)^2\right)M - \\ - \frac{1}{2\kappa^2}\left(M^2 - m_W^2\right)M = 0, \quad (20)$$

где

$$m_W = gK/2, \quad \kappa = g/2\lambda.$$

Заметим, что уравнения (18), (19) получаются при подстановке (14), (16), (17) в те из уравнений (5), (6), которые являются условиями Гаусса. Поэтому (18), (19) не содержат множителей Ω выше первой степени. Из оставшихся уравнений (5), (6) можно выразить V_a, W в терминах V_{0a}, W_0, M:

$$V_a = \epsilon_{3ab}\frac{V_{0b}}{2}\times \\ \times\frac{-\widetilde{V}_{03}\left(V_{01}^2 + V_{02}^2\right)' + 2\widetilde{V}'_{03}\left(V_{01}^2 + V_{02}^2\right)}{\left(V_{01}^2 + V_{02}^2\right)\left(V_{01}^2 + V_{02}^2 + \widetilde{V}_{03}^2 - M^2\right)}, \\ a = 1, 2, \quad (21)$$

$$V_3 = W = \epsilon_{3bc}\frac{V_{0b}V'_{0c}}{V_{01}^2 + V_{02}^2}, \quad (22)$$

таким образом V_a и W не являются независимыми величинами. Используя (16), (17), можно показать, что пространственные компоненты нетеровского тока j^{μ}_N обращаются в нуль на уравнениях движения (18)–(22), а временная компонента имеет вид

$$j^0_N = g^{-2}\left(-\widetilde{V}_{03}\left(V_1^2 + V_2^2\right) + \\ + V_3\left(V_{01}V_1 + V_{02}V_2\right) - \epsilon_{3bc}V_bV'_{0c}\right). \quad (23)$$

Этого и следовало ожидать, так как, вследствие (17), нетопологический солитон может иметь только электрическое поле. Плотность энергии в унитарной калибровке, записанную в терминах функций анзаца (16), можно представить в виде

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2g^2}\left(V_{01}^{\prime 2} + V_{02}^{\prime 2} + V_{03}^{\prime 2}\right) + \frac{1}{2g'^2}W_0^{\prime 2} + \frac{2}{g^2}M^{\prime 2} + \\ + \frac{1}{g^2}\epsilon_{abc}\widetilde{V}_{0a}'\widetilde{V}_{0b}V_c + \frac{1}{2g^2}\epsilon_{abc}\epsilon_{ade}\widetilde{V}_{0b}V_c\widetilde{V}_{0d}V_e + \\ + \frac{M^2}{2g^2}\Big(V_{01}^2 + V_{02}^2 + (V_{03} - W_0)^2 + V_1^2 + V_2^2 + \\ + (V_3 - W)^2\Big) + \frac{1}{2g^2\kappa^2}\left(M^2 - m_W^2\right)^2. \quad (24)$$

Интегрируя слагаемые $V_{01}^{\prime 2}$, $V_{02}^{\prime 2}$, $V_{03}^{\prime 2}$, $W_0'^2$ в $E = 4\pi\int_0^\infty \mathcal{E}r^2 dr$ по частям, используя уравнения (18), (19), (22) и выражение (23) для плотности нетеровского заряда

$$Q_N = 4\pi\int\limits_0^\infty j_N^0 r^2\,dr,$$

можно записать выражение для функционала E в виде

$$E = \frac{\Omega Q_N}{2} + 4\pi g^{-2}\int\limits_0^\infty \Bigg(2M^{\prime 2} + \frac{1}{2}M^2\left(V_1^2 + V_2^2\right) + \\ + \frac{1}{2}\kappa^{-2}\left(M^2 - m_W^2\right)^2\Bigg) r^2 dr. \quad (25)$$

Рассмотрим теперь вопрос об инвариантности уравнений (18)–(22), а также (23), (24) относительно $U(1)_{em}$ калибровочных преобразований и зарядового сопряжения. Единственным $U(1)_{em}$ калибровочным преобразованием, которое не меняет формы анзаца (16) и при котором $F_{\mu\nu}^{1,2}$ преобразуется ковариантно с $A_\mu^{1,2}$, является преобразование

$$\alpha(\mathbf{x}, t) = \delta t.$$

При этом функции, входящие в анзац (16), преобразуются следующим образом:

$$\begin{gathered} V_{03} \to V_{03} + \delta, \quad V_3 \to V_3, \quad W_0 \to W_0 + \delta, \\ W \to W, \quad \Omega \to \Omega + \delta, \quad \widetilde{V}_{03} \to \widetilde{V}_{03}, \\ V_{01} - iV_{02} \to \exp(i\delta t)(V_{01} - iV_2), \\ V_1 - iV_2 \to \exp(i\delta t)(V_1 - iV_2), \quad M \to M. \end{gathered} \quad (26)$$

Легко видеть, что плотность нетеровского заряда (23) и плотность энергии (24) инвариантны относительно (26), а уравнения (18)–(22) преобразуются при этом ковариантно. Зарядовое сопряжение приводит к следующему преобразованию функций анзаца (16):

$$\begin{gathered} V_{01} \to V_{01}, \quad V_1 \to V_1, \quad V_{02} \to -V_{02}, \\ V_2 \to -V_2, \quad V_{03} \to -V_{03}, \\ V_3 \to -V_3, \quad \widetilde{V}_{03} \to -\widetilde{V}_{03}, \\ W_0 \to -W_0, \quad W \to -W, \quad M \to M, \end{gathered} \quad (27)$$

а также к соответствующему преобразованию плотности заряда, плотности энергии и фазовой частоты:

$$j_N^0 \to -j_N^0, \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \quad \Omega \to -\Omega.$$

Таким образом, зарядовое сопряжение приводит к изменению знака нетеровского (электрического) заряда солитона и его фазовой частоты вращения.

Рассмотрим граничные условия, которым должны удовлетворять решения полевых уравнений (18)–(20), обладающие конечной энергией. Из условия отсутствия сингулярности решения при $r \to 0$ и уравнений (18)–(20) следуют граничные условия:

$$\lim_{r\to 0} V_{01}'(r) = \lim_{r\to 0} V_{02}'(r) = \lim_{r\to 0} V_{03}'(r) = \\ = \lim_{r\to 0} W_0'(r) = \lim_{r\to 0} M'(r) = 0. \quad (28)$$

Из условия конечности энергии солитона и (24) получим граничные условия при $r \to \infty$:

$$\begin{gathered} \lim_{r\to\infty} M(r) = m_W, \quad \lim_{r\to\infty} V_{01}(r) = 0, \\ \lim_{r\to\infty} V_{02}(r) = 0, \quad \lim_{r\to\infty}(V_{03}(r) - W_0(r)) = 0. \end{gathered} \quad (29)$$

Условия (29) не определяют значений V_{03} и W_0 при $r \to \infty$. Используя оставшуюся $U(1)_{em}$ калибровочную свободу (26), фиксируем $U(1)_{em}$ калибровку, накладывая на V_{03}, W_0 граничные условия при $r \to \infty$:

$$\lim_{r\to\infty} V_{03}(r) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} W_0(r) = 0. \quad (30)$$

Условие (30) все еще не фиксирует $U(1)_{em}$ калибровку окончательно. Уравнения (18)–(22) продолжают оставаться ковариантными относительно глобальных $U(1)_{em}$ калибровочных преобразований, соответствующих $\alpha(\mathbf{x}, t) = \mathrm{const}$. Окончательно фиксируем калибровку условием $V_{01} = 0$. Из уравнений (21), (22) тогда получим

$$V_2 = V_3 = W = 0.$$

Из уравнений (18)–(20), а также (21), (22) и граничных условий (28) следует характер поведения V_1 при $r \to 0$:

$$V_1 = \frac{1}{3}V_{02}(W_0 - \Omega)\,r. \quad (31)$$

Из выражения (31) следует, что в центре нетопологического солитона пространственные компоненты A_i^a обращаются в нуль. Из уравнений (18)–(20) и граничных условий (29), (30) получим асимптотику решения при $r \to \infty$:

$$\begin{gathered} V_{02}(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{c_{02}}{r}\exp(-m_\Omega r), \\ V_1 \xrightarrow[r\to\infty]{} c_{02}\Omega\frac{\exp(-m_\Omega r)}{m_\Omega r}, \\ Z_0(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{c_Z}{r}\exp(-m_Z r), \\ A_0(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{c_A}{r}, \\ M(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} m_W + \frac{c_M}{r}\exp(-m_H r), \end{gathered} \tag{32}$$

где

$$m_W = \frac{1}{2}gK, \quad m_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}K, \quad m_H = \lambda K$$

— массы $W^\pm$-бозона, Z-бозона и бозона Хиггса,

$$m_\Omega = \sqrt{m_W^2 - \Omega^2},$$

c_{02}, c_Z, c_A, c_M — константы. Функция Z_0 соответствует полю массивного векторного Z-бозона, функция A_0 — электромагнитному полю:

$$Z_0 = \left(g^2+g'^2\right)^{-1/2}\left(V_{03}-W_0\right),$$

$$A_0 = \left(g^2+g'^2\right)^{-1/2}\left(g'g^{-1}V_{03} + gg'^{-1}W_0\right).$$

Из асимптотики (32) и из конечности энергии солитона следует, что фазовая частота Ω должна удовлетворять условию

$$|\Omega| < m_W.$$

Выпишем также асимптотическое поведение плотности нетеровского заряда и плотности энергии при $r \to \infty$:

$$j_N^0 \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{c_{02}^2 m_W^2}{g^2 m_\Omega^2}\Omega\frac{\exp(-2m_\Omega r)}{r^2}, \tag{33}$$

$$\mathcal{E} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{\alpha}{4\pi}\frac{Q_N^2}{2r^4}, \tag{34}$$

где

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{g^2 g'^2\left(g^2+g'^2\right)^{-1}}{4\pi}$$

— постоянная тонкой структуры. Из выражения (34) следует, что основной вклад в плотность энергии при $r \to \infty$ дает дальнодействующее кулоновское поле солитона.

Для электрически заряженного солитона имеет место теорема Гаусса:

$$\begin{aligned} Q_N = 4\pi\int_0^\infty r^2 j_N^0(r)\,dr = \\ = -4\pi\lim_{r\to\infty} r^2\left(g^{-2}V_{03}' + g'^{-2}W_0'\right) = \\ = -4\pi e^{-2}\lim_{r\to\infty} r^2\mathcal{A}_0', \end{aligned} \tag{35}$$

где

$$\mathcal{A}_0 \equiv eA_0 = \left(g^2+g'^2\right)^{-1}\left(g'^2 V_{03} + g^2 W_0\right).$$

С помощью теоремы Гаусса можно вывести некоторые важные свойства нетопологического солитона. Используя (23), (31), получим выражение для нетеровского заряда, заключенного внутри сферы малого радиуса R:

$$\begin{aligned} Q_N(R) \xrightarrow[R\to 0]{} 4\pi R^5 V_{02}^2 \times \\ \times\left(\Omega - W_0\right)^2\left(\Omega - V_{03}\right)/45g^2. \end{aligned} \tag{36}$$

Из теоремы Гаусса получим тогда выражение для $\mathcal{A}_0'$ при малых R:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0'(R) \xrightarrow[R\to 0]{} \frac{\sin^2(\theta_W)}{45} \times \\ \times V_{02}^2\left(\Omega - W_0\right)^2\left(V_{03}-\Omega\right)R^3. \end{aligned} \tag{37}$$

Из (37) следуют соотношения

$$\lim_{r\to 0}\mathcal{A}_0'(r) = \lim_{r\to 0}\mathcal{A}_0''(r) = \lim_{r\to 0}\mathcal{A}_0'''(r) = 0. \tag{38}$$

Таким образом, не только первая, но и вторая производная $\mathcal{A}_0$ обращается в нуль при $r \to 0$. Первой отличной от нуля производной $\mathcal{A}_0$ при $r \to 0$ является четвертая производная. Теорема Гаусса позволяет также выразить коэффициент c_A в выражении (32) через нетеровский заряд солитона:

$$c_A = gg'\left(g^2+g'^2\right)^{-1/2}Q_N/4\pi \equiv eQ_N/4\pi.$$

Используя выражения (31), (36), можно определить интервал допустимых значений $\mathcal{A}_0$ при $r = 0$. В связи с этим отметим, что в данной работе знаки частот выбраны так, что положительным значениям Ω соответствуют положительные значения Q_N. Очевидно, что для нетопологического солитона с $\Omega > 0$, $Q_N > 0$ плотность нетеровского заряда $\rho \equiv j_N^0$ должна быть положительной. Действительно, из электростатики следует, что предположение о том, что в некоторой области внутри солитона с

$Q_N > 0$ плотность нетеровского заряда может быть отрицательной, приводит к увеличению энергии солитона E при данном фиксированном значении Q_N. Это предположение приводит к тому, что у плотности нетеровского заряда появляется как минимум один радиальный узел, что также является признаком возбужденности решения. Поскольку нетопологический солитон является минимумом функционала энергии E при фиксированном Q_N, предположение о $\rho < 0$ в некоторой области внутри солитона не может быть выполнено. Из выражения (36) тогда следует неравенство

$$V_{03}(0) < \Omega. \qquad (39)$$

Из выражений (21), (39) следует, что при $r \to 0$ V_{02} и V_1 имеют противоположные знаки. Из выражения (31) тогда следует неравенство

$$W_0(0) < \Omega. \qquad (40)$$

Из неравенств (39), (40) и выражения

$$\mathcal{A}_0 \equiv eA_0 = \left(g^2 + g'^2\right)^{-1} \left(g'^2 V_{03} + g^2 W_0\right)$$

получим важное ограничение на величину потенциала электрического поля (в калибровке (30)) в центре солитона:

$$0 < \mathcal{A}_0(0) < \Omega, \quad 0 < A_0(0) < \Omega/e. \qquad (41)$$

Нижняя граница в неравенствах (41) следует из того, что в калибровке (30)

$$\lim_{r\to\infty} \mathcal{A}_0(r) = 0$$

и потенциал электрического поля солитона всюду с положительной плотностью заряда является строго убывающей функцией.

При исследовании нетопологических солитонов в скалярной электродинамике с самодействующим скалярным полем утверждалось [12], что начиная с некоторого Q_N энергетически более выгодной становится полевая конфигурация, состоящая из нетопологического солитона и свободных заряженных частиц на бесконечности. Критерием этого должно являться выполнение неравенства

$$\left|\frac{dE}{dQ_N}\right| > m,$$

где m — масса заряженной частицы. В нашем случае подобный сценарий невозможен. Действительно, использование метода множителей Лагранжа,

$$\delta E - \Omega \delta Q_N = 0,$$

приводит к тому, что для нетопологического солитона имеет место общее соотношение

$$\frac{dE}{dQ_N} = \Omega. \qquad (42)$$

Далее, из асимптотического поведения (32) заряженных полей при $r \to \infty$ следует, что для пространственно локализованного решения с конечной энергией и конечным зарядом должно выполняться соотношение $|\Omega| < m_W$. Случай $|\Omega| > m_W$ соответствует сферическим нелинейным волнам с бесконечной полной энергией и бесконечным зарядом. Поэтому, если для данного Q_N существует нетопологический солитон, то для него всегда имеет место неравенство

$$\left|\frac{dE}{dQ_N}\right| < m_W.$$

В этом случае абсорбция дополнительного заряда δQ_N солитоном энергетически более выгодна, чем рассеяние этого заряда в виде свободных частиц (сферических волн) на бесконечности.

В заключение приведем некоторые общие соображения относительно зависимости энергии и нетеровского заряда солитона от фазовой частоты Ω. Для случая $g' = 0$ было показано [15], что нетопологические солитоны могут существовать лишь при $\kappa > 2$, при этом фазовая частота Ω должна быть внутри допустимого интервала значений $\left(2\kappa^{-1}(\kappa-1)^{1/2}, 1\right)$. При

$$\Omega \to 2\kappa^{-1}(\kappa - 1)^{1/2}$$

нетопологический солитон переходит в так называемый «thin-wall» режим, в котором амплитуды полей, плотность энергии и плотность заряда постоянны внутри солитона за исключением переходных областей в центре и на границе, которыми можно пренебречь. В этом режиме энергия и заряд солитона стремятся к бесконечности, причем Ω является монотонно убывающей функцией Q_N, асимптотически стремящейся к $2\kappa^{-1}(\kappa-1)^{1/2}$ сверху [15]. Появление дальнодействующего электрического поля при $g' \neq 0$ должно существенно изменить эту картину. В этом случае при достаточно больших значениях r можно пренебречь всеми полями, кроме электрического. Вклад электрического поля области $r > \langle R \rangle$ в полную энергию солитона можно представить в виде

$$E_C \approx \alpha \frac{Q_N^2}{2\langle R \rangle}, \qquad (43)$$

где $\langle R \rangle$ — эффективный радиус солитона. Понятие эффективного радиуса является хорошо определенным при $\Omega < m_W$, так как все поля, кроме электрического, экспоненциально стремятся при больших r

к своим вакуумным значениям. Если предположить, что заряд равномерно распределен внутри солитона и объемная плотность заряда слабо зависит или вообще не зависит от Q_N, то имеет место соотношение

$$\langle R\rangle \sim Q_N^{1/3} \Rightarrow E_C \sim Q_N^{5/3}.$$

В другом предельном случае, когда весь заряд сосредоточен на поверхности солитона и поверхностная плотность заряда слабо зависит или вообще не зависит от Q_N, имеет место соотношение

$$\langle R\rangle \sim Q_N^{1/2} \Rightarrow E_C \sim Q_N^{3/2}.$$

В любом из этих двух предельных случаев имеем

$$E_C \sim Q_N^{1+\Delta}, \quad \Delta > 0.$$

Полную энергию солитона можно формально записать в виде

$$E = F\left(Q_N\right) + aQ_N^{1+\Delta}, \tag{44}$$

где F — сложная функция Q_N, которую невозможно получить аналитическими методами, a — некоторый положительный коэффициент. Из выражения (44) получим

$$\frac{dE}{dQ_N} \equiv \Omega = F'\left(Q_N\right) + a\left(1+\Delta\right) Q_N^{\Delta}. \tag{45}$$

В «thin-wall» режиме при $g' = 0$ производная $F'\left(Q_N\right)$ является убывающей функцией Q_N [15]. Поэтому мы можем ожидать, что по крайней мере для малых g' производная $F'\left(Q_N\right)$ в выражении (45) также будет убывающей функцией Q_N в «thin-wall» режиме. В то же время второе слагаемое в выражении (45) является возрастающей функцией Q_N. Следовательно, существует некоторый заряд Q_N^*, при котором $\Omega = dE/dQ_N$ достигает минимума:

$$\left.\frac{d\Omega}{dQ_N}\right|_{Q_N=Q_N^*} = \left.\frac{d^2E}{dQ_N^2}\right|_{Q_N=Q_N^*} = 0. \tag{46}$$

Из (46) следует, что кривая $E\left(Q_N\right)$ имеет при $Q_N = Q_N^*$ точку перегиба. При дальнейшем росте Q_N фазовая частота Ω должна возрастать. В классическом «thin-wall» режиме Ω является монотонно убывающей функцией Q_N, стремящейся сверху к некоторому предельному значению. Таким образом, даже при малых g' выход в классический «thin-wall» режим невозможен. С ростом g' отклонения от классического «thin-wall» режима будут лишь возрастать.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ СОЛИТОНА В «THIN-WALL» РЕЖИМЕ МЕТОДОМ ПРОБНЫХ ФУНКЦИЙ

Одним из методов, с помощью которого можно исследовать свойства нетопологического солитона в «thin-wall» режиме является метод пробных функций. Суть этого метода заключается в том, что сложные решения системы нелинейных полевых уравнений заменяются пробными функциями простой формы. Эти пробные функции могут зависеть от нескольких параметров и должны удовлетворять тем же граничным условиям, что и точные решения. Пробные функции должны быть выбраны так, чтобы приближенно соответствовать точным решениям в «thin-wall» режиме. Далее эти пробные функции подставляются в выражения для функционалов энергии и заряда. Поскольку пробные функции имеют простой вид, функционалы энергии и заряда можно вычислить аналитически. Они будут представлять собой относительно простые функции параметров, которые входят в выражения для пробных функций. Величины этих параметров определяются из задачи на условный экстремум: необходимо найти значения параметров, при которых E достигает минимума при фиксированном значении Q_N. Подставляя полученные значения параметров в формулу для E, получим значение энергии солитона при данном Q_N. Функционал энергии достигает на точных решениях своего минимума в секторе полевых конфигураций с данным значением Q_N. Поэтому полученное методом пробных функций значение энергии будет являться верхней границей для истинного значения энергии солитона. Метод пробных функций применим прежде всего в «thin-wall» режиме, так как в этом режиме поля приближенно постоянны внутри солитона (за исключением малых областей в центре и на границе).

Подробное исследование свойств нетопологического солитона $SU(2)$ калибровочной модели было выполнено в работе [15]. В частности там был предложен простой набор пробных функций, правильно описывающий свойства солитона в «thin-wall» режиме $Q_N \gg 1$. Следуя работе [15], в этом разделе мы изучим влияние электрического поля на свойства солитона в «thin-wall» режиме $Q_N \gg 1$ при малых значениях калибровочной константы связи e.

При исследовании свойств нетопологического солитона в работе [15] был использован гамильтонов подход, в котором в качестве независимых полевых переменных выбраны поля и канонически сопряженные им импульсы. Плотность энергии при $e = 0$

в этом подходе можно приближенно записать в виде [15]

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2g^2}Y^2 + \frac{1}{2M^2}\left(r^{-2}\frac{d}{dr}\left(r^2 Y\right)\right)^2 + \\ + \frac{1}{2g^2}\frac{\Omega^2 M^2 Y^2}{(M^4+Y^2)} + \frac{2M'^2}{g^2} + \frac{\left(M^2 - m_W^2\right)^2}{2g^2\kappa^2}, \quad (47)$$

где $Y \equiv P_2$ — радиальная функция, описывающая поведение обобщенного импульса

$$P_2^i = F^{0i\,2} \equiv g^{-1}\widehat{x}^i P_2.$$

При включении калибровочной константы связи e у нетопологического солитона возникает электрическое поле. Его вклад в энергию солитона при малых значениях e в «thin-wall» режиме можно приближенно считать равным энергии электрического поля равномерно заряженного шара с электрическим зарядом eQ_N:

$$E_C = 3e^2 Q_N^2/20\pi\left\langle R\right\rangle.$$

Нетеровский заряд солитона Q_N в гамильтоновом подходе можно представить в виде [15]:

$$Q_N = 4\pi g^{-2}\Omega\int\limits_0^\infty \frac{M^2 Y^2}{M^4+Y^2} r^2 dr. \quad (48)$$

Подставляя пробные функции, явный вид которых приведен в работе [15], получим довольно громоздкое выражение для энергии солитона. Удерживая в этом выражении главные члены при $Q_N \to \infty$, $\langle R\rangle \to \infty$, получим

$$E = \frac{2}{3}\pi B^2\left\langle R\right\rangle^3 + \frac{2\pi\left\langle R\right\rangle^3\left(A^2 - m_W^2\right)^2}{3g^2\kappa^2} + \\ + \frac{3Q_N^2\left(A^4 + B^2 g^2\right)}{8\pi A^2 B^2\left\langle R\right\rangle^3} + \frac{3e^2 Q_N^2}{20\pi\left\langle R\right\rangle}, \quad (49)$$

где A, B — значения скалярного поля M и обобщенного импульса Y внутри солитона (за исключением малых областей в центре и на границе). Нам необходимо найти значения параметров A, B, $\langle R\rangle$, при которых выражение (49) становится минимальным. Дифференцируя (49) по A, B и $\langle R\rangle$, получим систему трех алгебраических уравнений, решение которой при $e \neq 0$ нельзя выразить в радикалах. Однако при $e = 0$ решение можно выразить в радикалах. Система алгебраических уравнений определяет неявным образом A, B, $\langle R\rangle$ как функции e^2. Используя формулу для производной неявной функции и известные значения $A\,(0)$, $B\,(0)$, $\langle R\,(0)\rangle$ получим выражения для

$$\left.\frac{dA}{de^2}\right|_{e=0}, \quad \left.\frac{dB}{de^2}\right|_{e=0}, \quad \left.\frac{d\left\langle R\right\rangle}{de^2}\right|_{e=0}.$$

Так как калибровочная константа связи предполагается малой, значения $A\left(e^2\right)$, $B\left(e^2\right)$, $\left\langle R^2\left(e^2\right)\right\rangle$ можно получить, удерживая линейные по e^2 члены тейлоровских разложений:

$$A = m_W\left(\kappa-1\right)^{-1/2} - e^2\frac{Q_N^{2/3} m_W}{g^{2/3}20\cdot 6^{1/3}\pi^{2/3}}\times \\ \times\frac{\left(\kappa-4\right)\kappa^{2/3}}{\left(\kappa-2\right)^{2/3}\left(\kappa-1\right)^{3/2}}, \quad (50)$$

$$B = \frac{\left(\kappa-2\right)^{1/2} m_W^2}{(\kappa-1)\sqrt{\kappa}} - e^2\frac{Q_N^{2/3} m_W^2}{g^{2/3}10\cdot 6^{1/3}\pi^{2/3}}\times \\ \times\frac{\left(\kappa^{7/3} + (7-5\kappa)\kappa^{1/3}\right)}{(\kappa-2)^{7/6}(\kappa-1)^2\kappa^{1/6}}, \quad (51)$$

$$\left\langle R\right\rangle = \frac{Q_N^{1/3}}{m_W}\frac{g^{2/3}3^{1/3}}{2^{2/3}\pi^{1/3}}\frac{\left(\kappa-1\right)^{1/2}\kappa^{1/3}}{\left(\kappa-2\right)^{1/3}} + \\ + e^2\frac{Q_N}{120\pi m_W}\frac{\kappa(\kappa(3\kappa-14)+20)}{(\kappa-2)^2\left(\kappa-1\right)^{1/2}}. \quad (52)$$

Подставляя (50), (51), (52) в выражение (49) и удерживая линейные по e^2 члены, получим

$$E = 2Q_N m_W\frac{\left(\kappa-1\right)^{1/2}}{\kappa} + e^2\frac{Q_N^{5/3} m_W}{g^{2/3}}\times \\ \times\frac{3^{2/3}}{10\cdot 2^{1/3}\pi^{2/3}}\frac{\left(\kappa-2\right)^{1/3}}{\kappa^{1/3}\left(\kappa-1\right)^{1/2}}. \quad (53)$$

Дифференцируя (53) по Q_N, получим выражение для фазовой частоты в «thin-wall» режиме:

$$\Omega = \frac{dE}{dQ_N} = 2m_W\frac{\left(\kappa-1\right)^{1/2}}{\kappa} + e^2\frac{Q_N^{2/3} m_W}{g^{2/3}}\times \\ \times\frac{1}{2^{4/3}3^{1/3}\pi^{2/3}}\frac{\left(\kappa-2\right)^{1/3}}{\kappa^{1/3}\left(\kappa-1\right)^{1/2}}. \quad (54)$$

Из условия малости поправочных членов $\sim e^2$ по сравнению с главными членами получим условие применимости выражений (50)–(54):

$$e \ll Q_N^{-1/3}.$$

Из выражений (52), (53), (54) следует, что поправки к величинам эффективного радиуса, энергии и фазовой частоты солитона положительны при $\kappa > 2$. Следовательно, появление электрического поля при $e \neq 0$ приводит к увеличению эффективного радиуса, энергии и фазовой частоты солитона в «thin-wall» режиме, что вполне соответствует физическим представлениям. Заметим, что результаты этого раздела согласуются с выводами конца разд. 3.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

После фиксации калибровки система (18)–(20) будет включать в себя четыре нелинейных дифференциальных уравнения. Вместе с граничными условиями (28)–(30) эта система представляет собой смешанную краевую задачу на интервале $r \in [0, \infty)$. Эта краевая задача может быть решена только с использованием численных методов. В данной работе краевая задача (18)–(20), (28)–(30) решалась при помощи пакета Maple методом конечных разностей и последующих ньютоновских итераций. Как уже говорилось, функция V_1 не является независимой величиной, а выражается через функции V_{02}, V_{03}, M посредством (21). После фиксации калибровки выражение (21) содержит знаменатель

$$V_{02}^2 + (V_{03} - \Omega)^2 - M^2.$$

Этот знаменатель может обращаться в нуль при одном или нескольких значениях r. При этом функция V_1 не обращается в бесконечность, так как в этих точках числитель (21) также обращается в нуль. Несмотря на это, прямая подстановка (21) в уравнения (18)–(20) приводит к существенным трудностям при численном решении краевой задачи, так как невозможно численно в точности компенсировать нуль в знаменателе. Поэтому при решении краевой задачи имеет смысл формально считать V_1 независимой функцией. Дифференцируя (21) по r, можно показать, что V_1 удовлетворяет уравнению:

$$V_1' - V_{02}\left(W_0 - \Omega\right) + 2\frac{V_1 M'}{M} + \frac{1}{rM^2} \times \\ \times \left(V_1\left(V_{02}^2 + \widetilde{V}_{03}^2\right) + V_{02}'\widetilde{V}_{03} - V_{02}\widetilde{V}_{03}'\right) = 0. \quad (55)$$

Уравнение (55) вместе с граничным условием $V_1(0) = 0$ и исходная краевая задача (18)–(20), (28)–(30) вместе образуют новую краевую задачу без сингулярных знаменателей, которая может быть решена численно. В этом разделе при решении краевой задачи использовалась система единиц, в которой $m_W = 1$.

Приведем сначала численные результаты для V_1, V_{02}, M,

$$\mathcal{A}_0 = \left(g^2 + g'^2\right)^{-1}\left(g'^2 V_{03} + g^2 W_0\right) \equiv eA_0,$$

$$\mathcal{Z}_0 = g\left(g^2 + g'^2\right)^{-1/2}\left(V_{03} - W_0\right) \equiv gZ_0$$

при некоторых значениях параметров κ, g, g', Ω. Напомним, что A_0 — временная компонента 4-потенциала электромагнитного поля, Z_0 — временная компонента массивного 4-векторного поля Z-бозона. На рис. 1*a* представлены V_1, V_{02}, M, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{Z}_0$, плотность энергии $\mathcal{E}$ и плотность заряда $\rho \equiv j_N^0$ для значений параметров $\kappa = 5$, $g = 0.6414$, $g' = 0.005$, $e \approx 0.005$, $\Omega = 0.836$. Значение $\Omega = 0.836$ является минимальным значением, для которого удалось получить численное решение при данных κ, g, g'.

Трудность численного решения краевой задачи при дальнейшем уменьшении Ω связана с тем, что краевая задача становится жесткой — малым изменениям Ω соответствуют большие изменения в решении. В связи с этим, приведенное на рис. 1*a* решение ближе всего соответствует «thin-wall» режиму теории с $g' = 0$, описанному в работе [15]. Характерными особенностями решения на рис. 1*a* являются: наличие переходной области при малых r, дальнодействующий характер поля A_0, обращение в нуль плотности заряда и существенное уменьшение плотности энергии при $r = 0$, некоторое увеличение плотности энергии и плотности заряда на границе солитона. Наличие переходной области при малых r и обращение в нуль плотности заряда при $r = 0$ следуют из граничных условий (28) и поведения V_1 при малых значениях r в (31). Такое поведение V_1 связано с тем, что пространственные компоненты сферически-симметричного векторного поля должны обращаться в нуль при $r = 0$.

Отметим в связи с этим, что в «thin-wall» режимах чисто скалярных моделей переходная область при малых r отсутствует, и плотность заряда в центре нетопологического солитона не обращается в нуль [12]. Некоторое увеличение плотности энергии и плотности заряда на границе солитона связано со спонтанным нарушением $U(1)_{em}$ симметрии внутри солитона. Этот эффект был описан в работе [12] для случая скалярной электродинамики с самодействующим скалярным полем. За пределами центральной переходной области и до граничной переходной области V_1, V_{02}, M, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{Z}_0$, $\mathcal{E}$, ρ приблизительно постоянны, что является характерным свойством «thin-wall» режима. Вклад кулоновской энергии солитона E_C составляет для $\langle R\rangle \approx 37\, m_W^{-1}$ около $60\, m_W$ ($\approx 0.14\,\%$ полной энергии солитона).

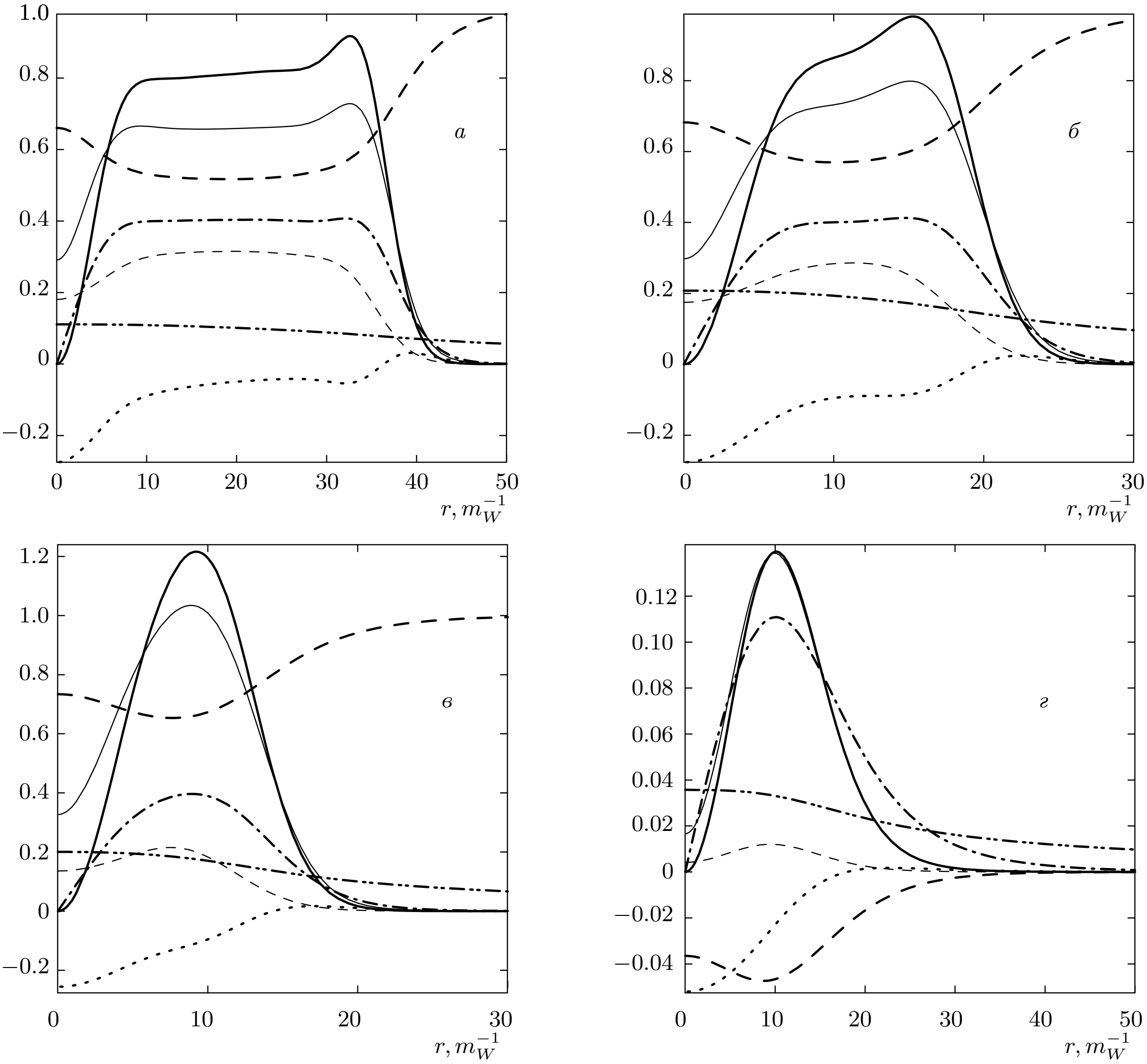

Рис. 1. Численные результаты, соответствующие параметрам $\kappa = 5$, $g = 0.6414$, $g' = 0.005$, $\Omega = 0.836$ (*а*); $g' = 0.03$, $\Omega = 0.8905$ (*б*); $g' = 0.06$, $\Omega = 0.947$ (*в*); $g' = 0.06$, $\Omega = 0.999$ (*г*). Пунктирная кривая — V_{02}, штриховая — $\mathcal{Z}_0$, штрихпунктирная — V_1, штрих-двойной пунктир — $30\mathcal{A}_0$ (*а*), $5\mathcal{A}_0$ (*б*), $2.5\mathcal{A}_0$ (*в,г*), длинные штрихи — M, сплошная тонкая — $4\mathcal{E}$ (*а,б*), $5\mathcal{E}$ (*в,г*), сплошная жирная — 4ρ (*а,б*), 5ρ (*в,г*)

На рис. 1*б* представлены V_1, V_{02}, M, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{Z}_0$, $\mathcal{E}$, ρ для значений параметров $\kappa = 5$, $g = 0.6414$, $g' = 0.03$, $e \approx 0.03$, $\Omega = 0.8905$. Так же как и в предыдущем случае, $\Omega = 0.8905$ является минимальным значением, для которого удалось получить численное решение при данных κ, g, g'. Из рис. 1*а,б* видно, что при $g' = 0.03$ «thin-wall» режим становится менее выраженным по сравнению со случаем $g' = 0.005$. Увеличение $U(1)_{em}$ калибровочной константы связи e в 6 раз приводит к тому, что солитон не может перейти в классический «thin-wall» режим даже при наименьшем численно достижимом Ω. Характерные особенности решения, отмеченные для $g' = 0.005$, сохраняются и для случая $g' = 0.03$. Заметим также существенное уменьшение размера солитона $\langle R\rangle \approx 22 m_W^{-1}$ и увеличение вклада кулоновской энергии $E_C \approx 106\, m_W$ ($\approx 1.43\,\%$ полной энергии солитона) по сравнению с $g' = 0.005$.

На рис. 1*в* представлены численные результаты для $\kappa = 5$, $g = 0.6414$, $g' = 0.06$, $e \approx 0.06$, $\Omega = 0.947$. Как и в двух предыдущих случаях, $\Omega = 0.947$ является минимальным значением, которое удалось достигнуть численно при данных κ, g, g'. Из рис. 1*в* видно, что при $g' = 0.06$ «thin-wall» режим полностью отсутствует — в решении нет областей приближенно постоянных значений величин V_1, V_{02}, M, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{Z}_0$, $\mathcal{E}$, ρ. Также происходит дальнейшее уменьшение размеров солитона $\langle R\rangle \approx 16\, m_W^{-1}$ и увеличение вклада кулоновской энергии $E_C \approx 72\, m_W$ ($\approx 2.58\,\%$ полной энергии солитона).

До сих пор были представлены результаты, соответствующие минимальным численно достижимым Ω. На рис. 1*г* представлено численное решение для $\kappa = 5$, $g = 0.6414$, $g' = 0.06$, $e \approx 0.06$, $\Omega = 0.999$. В этом случае Ω близко к своему максимально допустимому значению, равному 1. Такая область значений Ω соответствует так называемому «thick-wall» режиму. Характерной особенностью этого режима является уменьшение показателя экспоненциального затухания полей V_{02}, V_1, соответствующих заряженному векторному полю. Можно сказать, что при $\Omega \to 1$ нетопологический солитон перестает быть пространственно локализованным распределением электрического заряда и растекается по всему пространству, переходя в плосковолновое решение с бесконечной энергией и зарядом. Из рис. 1*в* и *г* следует, что для представленных значений r плотности энергии и заряда при $\Omega \to 1$ существенно меньше, чем при $\Omega \to 0.947$. Несмотря на это, энергия и заряд солитона стремятся к бесконечности при $\Omega \to 1$ из-за того, что показатель экспоненциального затухания полей V_{02}, V_1 в выражении (32) стремится к нулю.

Еще одним характерным свойством полученных численных решений является наличие радиального узла у функции V_{02}. Несмотря на это, численные решения рис. 1*а*–*г* не являются возбужденными. Действительно, в работе [15] было показано, что при Ω, направленной вдоль третьей оси в изотопическом пространстве, имеет место соотношение

$$\int\limits_0^\infty V_1 P_3 r^2 dr = 0,$$

где

$$P_3 \equiv V_{03}' - V_1 V_{02}.$$

Это соотношение выражает тот факт, что при $\omega = (0, 0, \omega_3)$ лишь один нетеровский заряд $Q_3 \neq 0$, а два оставшихся (в теории с $g' = 0$ имеется три сохраняющихся нетеровских заряда) обращаются в нуль. Из этого соотношения следует, что обобщенный импульс P_3 должен иметь по крайней мере один радиальный узел. Таким образом, критерием возбужденности решения является число радиальных узлов P_3, а не V_{02}. Для невозбужденного решения P_3 должен иметь в точности один радиальный узел. Для всех полученных численных решений P_3 имеет один радиальный узел — следовательно, эти решения являются невозбужденными.

Рассмотрим теперь зависимость полной энергии E и нетеровского заряда Q_N солитона от фазовой частоты Ω. На рис. 2*а* представлены зависимости $E(\Omega)$ для значений параметров $g = 0.6414$, $\kappa = 5$, $g' = 0$, 0.03, 0.06, 0.09. Каждая зависимость, соответствующая данному g', представлена в интервале от минимального до максимального значения Ω, которых удалось достичь численными методами. Случай $g' = 0$, при котором отсутствует дальнодействующее калибровочное поле, был исследован в работе [15]. Лишь в этом случае возможен классический «thin-wall» режим, в котором при

$$\Omega \to 2\kappa^{-1}(\kappa - 1)^{1/2}$$

функции V_1, V_{02}, M, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{Z}_0$, $\mathcal{E}$, ρ постоянны внутри солитона, а его энергия и заряд стремятся к бесконечности. При включении дальнодействующего калибровочного поля ($g' \neq 0$) ситуация существенно меняется. С ростом g' происходит увеличение Ω_{min} (тем самым уменьшается допустимый интервал $(\Omega_{min}, 1)$ значений Ω), при этом также уменьшается энергия солитона при $\Omega = \Omega_{min}$. При $\Omega \to \Omega_{min}$ классический «thin-wall» режим уже не достигается, причем чем больше g', тем больше отклонения от этого режима. При $\Omega \to 1$ все кривые достигают «thick-wall» режима. В этом режиме энергия и заряд солитона стремятся к бесконечности, а сам солитон растекается по всему пространству, переходя при $\Omega = 1$ в плосковолновое решение.

На рис. 2*б* представлены зависимости Q_N от Ω для значений параметров $g = 0.6414$, $\kappa = 5$, $g' = 0$, 0.03, 0.06, 0.09. Кривые $Q_N = Q_N(\Omega)$, представленные на этом рисунке, почти идентичны кривым $E = E(\Omega)$ рис. 2*а*. Соответственно все выводы, сделанные для рис. 2*а*, применимы и к рис. 2*б*.

Зная зависимости $E = E(\Omega)$, $Q_N = Q_N(\Omega)$, можно получить зависимость энергии солитона E от его нетеровского заряда Q_N. Как и в случае чисто скалярных теорий [1] кривые $E = E(Q_N)$ будут иметь характерную особенность — точку возврата (касп). Эти кривые не приведены здесь из-за того, что их верхние ветви, соответствующие «thick-wall» режиму, визуально неотличимы от прямой $E = Q_N$, соответствующей плосковолновому решению. Отметим также, что для контроля численных результатов использовалась проверка выполнения соотношения

$$dE/dQ_N = \Omega.$$

Это соотношение выполняется для кривых рис. 2*а*,*б* с точностью $\sim 10^{-3}$.

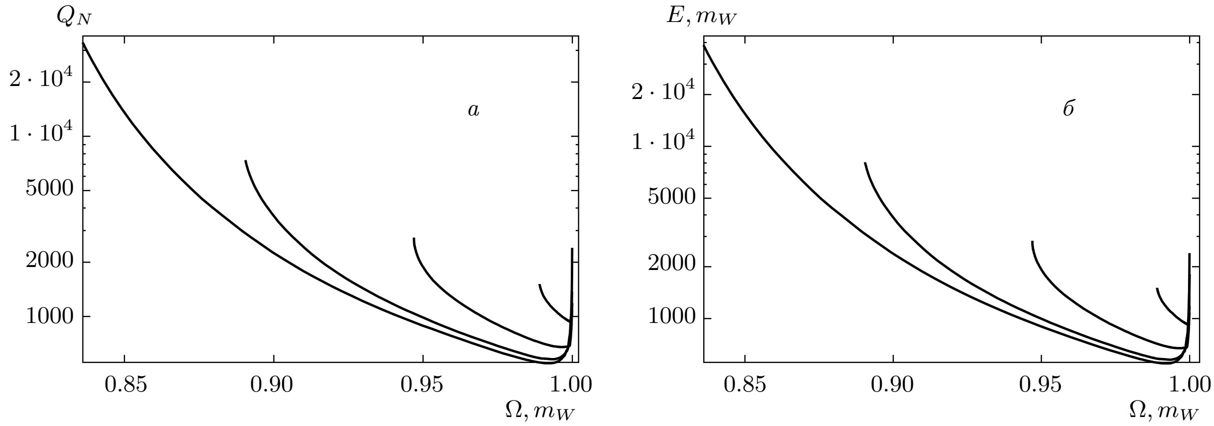

Рис. 2. Зависимости нетеровского заряда Q_N (a) и энергии E ($б$) от фазовой частоты Ω. По часовой стрелке кривые соответствуют значениям $g' = 0$, 0.03, 0.06, 0.09. Значения остальных параметров: $\kappa = 5$, $g = 0.6414$

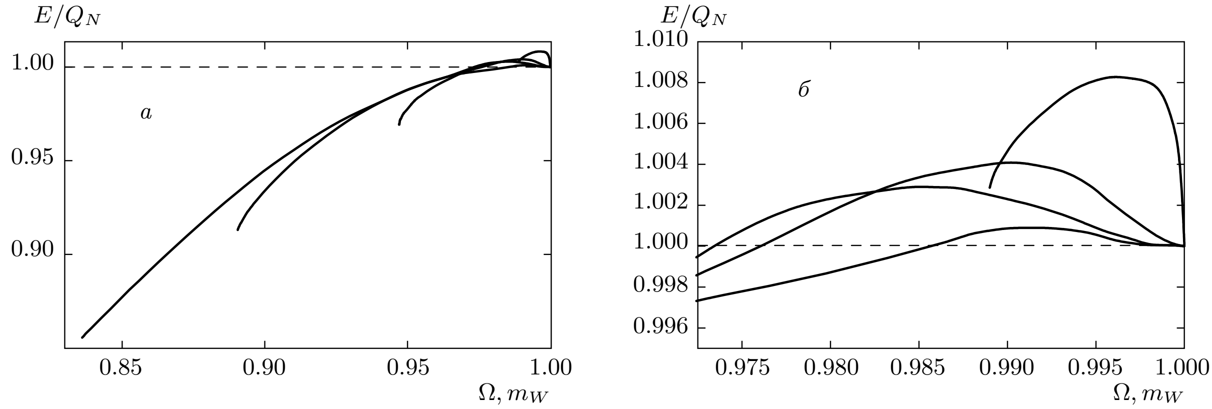

Рис. 3. a — Зависимости отношения энергии E к заряду Q_N от фазовой частоты Ω. По часовой стрелке (считая от точки с координатами $(1,1)$) кривые соответствуют значениям $g' = 0$, 0.03, 0.06, 0.09. Значения остальных параметров: $\kappa = 5$, $g = 0.6414$. $б$ — То же в области $\Omega \sim 1$

На рис. 3a,$б$ представлены зависимости отношения энергии к заряду E/Q_N от фазовой частоты Ω. Значения параметров такие же, как и для рис. 2a,$б$. Мы использовали два рисунка для того, чтобы лучше показать поведение кривых в области $\Omega \sim 1$. Из рис. 3a,$б$ следует, что для $g' \lesssim 0.07$ существует значение Ω_{st} такое, что при $\Omega \in (\Omega_{min}, \Omega_{st})$ отношение $E/Q_N < 1$, а при $\Omega \in (\Omega_{st}, 1)$ отношение $E/Q_N > 1$. Таким образом, при $\Omega \in (\Omega_{min}, \Omega_{st})$ решение устойчиво относительно перехода в плосковолновую конфигурацию (для которой $E/Q_N \geq 1$), а при $\Omega \in (\Omega_{st}, 1)$ — неустойчиво.

Известно [1], что нетопологический солитон в «thick-wall» режиме $\Omega \to 1$ можно рассматривать как аналитическое продолжение плосковолнового решения по параметру Ω. Очевидно, что плосковолновое решение существует для любых физически допустимых значений параметров κ, g, g'. Поэтому, в силу аналитического продолжения, можно предположить, что если при данных κ, g нетопологический солитон существует для некоторого значения g', то он будет существовать и при любых значениях g'. С ростом g' происходит уменьшение допустимого интервала частот $(\Omega_{min}, 1)$ и солитон становится неустойчивым относительно перехода в плосковолновую конфигурацию во всем допустимом интервале значений Ω. Кроме того, наличие точки возврата (каспа) в зависимости $E\,(Q_N)$ говорит [1] о том, что в «thick-wall» режиме солитон будет классически неустойчивым относительно малых флуктуаций.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение рассмотрим вопрос о возможности существования описанных в данной работе нетопологических солитонов при современных значениях параметров Стандартной модели. В работе [15] было показано, что необходимым условием существования нетопологического солитона для случая $g' = 0$ является выполнение неравенства

$$\kappa \equiv m_W/m_H = g/2\lambda > 2.$$

Действительно, существование нетопологического солитона при $g' = 0$ возможно в интервале частот $\left(2\kappa^{-1}(\kappa-1)^{1/2}, 1\right)$, а при $\kappa = 2$ этот интервал вырождается в точку. В случае $g' \neq 0$ существование нетопологического солитона возможно в интервале частот $(\Omega_{min}, 1)$. Из рассуждений разд. 3 следует, что наличие электрического поля при $g' \neq 0$ приводит к тому, что

$$\Omega_{min} > 2\kappa^{-1}\left(\kappa-1\right)^{1/2}.$$

Из этого неравенства следует, что если для $g' = 0$ имеет место неравенство $\kappa > 2$, то оно тем более должно иметь место для $g' \neq 0$. Последние данные [19] дают следующее значение массы $W^{\pm}$ бозона: $m_W = 80.33$ ГэВ. Ограничение Линде–Вайнберга [20, 21] устанавливает нижнюю границу для массы бозона Хиггса, $m_H \gtrsim 8$ ГэВ, и допускает возможность существования нетопологического солитона. Однако последние данные [19] говорят о том, что с уровнем достоверности 95 % имеет место ограничение снизу на массу бозона Хиггса: $m_H > 114.4$ ГэВ. Поэтому с таким же уровнем достоверности можно сказать, что существование нетопологических солитонов, описанных в данной работе, в современных условиях невозможно.

Остановимся кратко на вопросах, не рассмотренных в настоящей работе. Хотя вопрос об устойчивости солитона относительно перехода в плосковолновую конфигурацию был исследован численно, для полного решения проблемы устойчивости необходимо исследовать спектр оператора квадратичных флуктуаций. В частности надо исследовать, как ведут себя собственные значения оператора квадратичных флуктуаций в зависимости от κ, g, g', Ω. Разумеется, такое исследование может быть выполнено лишь численными методами. Имея в виду алгебраическую сложность выражения (24) и тот факт, что при исследовании спектра мы, вообще говоря, не должны ограничиваться флуктуациями полей вида (16), а должны рассмотреть флуктуации общего вида, даже численное исследование этой проблемы может столкнуться с большими трудностями.

Квантование нетопологического солитона может быть выполнено несколькими альтернативными методами [22–25]. Все эти методы тем или иным образом требуют знания спектра оператора квадратичных флуктуаций. Такой спектр может быть найден лишь численно для конкретных значений параметров модели. Из полученных численных результатов разд. 4 можно сделать вывод, что нетопологический солитон является классическим объектом, так как его действие за период

$$S_T = \int\limits_0^{2\pi/\Omega} \mathcal{L} d^3x\, dt$$

составляет порядка 10^3–$10^5 \gg 1$, а комптоновская длина волны порядка $(10^{-2}$–$10^{-4})m_W^{-1}$ много меньше его размеров порядка $(10^1$–$10^2)m_W^{-1}$. Поскольку рассмотренная $SU(2)\times U(1)$ калибровочная модель является перенормируемой, можно ожидать, что при малых константах связи g, g', λ квантовые поправки к массе нетопологического солитона также будут малыми.

Возможным квантовым эффектом, возникающим благодаря наличию дальнодействующего калибровочного поля, является рождение пар $W^{\pm}$ из вакуума электрическим полем. Вероятность такого процесса в квазиклассическом приближении

$$w \sim \exp\left(-\pi m_W^2 \left|e\right|^{-1} \left|\mathbf{E}\right|^{-1}\right),$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля [26]. Оценивая максимальную напряженность электрического поля как

$$|\mathbf{E}| \sim |e|\,|Q_N|\,\langle R\rangle^{-2},$$

получим

$$w \sim \exp\left(-\pi m_W^2 \langle R\rangle^2 \alpha^{-1} Q_N^{-1}\right).$$

Для всех численных решений данной работы имеет место соотношение

$$\pi m_W^2 \langle R\rangle^2 \alpha^{-1} Q_N^{-1} \gg 1,$$

следовательно, процесс рождения пар $W^{\pm}$ будет экспоненциально подавлен.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. D. Lee and Y. Pang, Phys. Rep. **221**, 251 (1992).

2. E. Radu and M. S. Volkov, Phys. Rep. **468**, 101 (2008).
3. S. Coleman, Nucl. Phys. B **262**, 263 (1985).
4. A. Kusenko, Phys. Lett. B **406**, 26 (1997).
5. F. Paccetti Correia and M. G. Schmidt, Eur. Phys. J. C **21**, 181 (2001).
6. A. Safian, S. Coleman, and M. Axenides, Nucl. Phys. B **297**, 498 (1988).
7. A. Safian, Nucl. Phys. B **304**, 403 (1988).
8. A. Kusenko, Phys. Lett. B **405**, 108 (1997).
9. A. Kusenko, M. Shaposhnikov, and P. Tinyakov, Pis'ma v ZhETF **67**, 229 (1998).
10. A. Kusenko and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **418**, 46 (1998).
11. K. Enquist and A. Mazumdar, Phys. Rep. **380**, 99 (2003).
12. K. Lee, J. A. Stein-Schabes, R. Watkins, and L. W. Widraw, Phys. Rev. D **39**, 1665 (1989).
13. K. N. Anagnostopoulos, M. Axenides, E. G. Floratos, and N. Tetradis, Phys. Rev. D **64**, 125006 (2001).
14. T. S. Levi and M. Gleiser, Phys. Rev. D **66**, 087701 (2002).
15. R. Friedberg, T. D. Lee, and A. Sirlin, Nucl. Phys. B **115**, 1 (1976).
16. R. Friedberg, T. D. Lee, and A. Sirlin, Nucl. Phys. B **115**, 32 (1976).
17. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
18. A. Salam, in *Elementary Particle Physics*, ed. by N. Svartholm, Almqvist and Wiksells, Stockholm (1968), p. 367.
19. K. Nakamura, K. Hagiwara, K. Hikasa et al. (ParticleData Group), J. Phys. G **37**, 075021 (2010).
20. А. Д. Линде, Письма в ЖЭТФ **23**, 23 (1976).
21. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **36**, 294 (1976).
22. N. H. Christ and T. D. Lee, Phys. Rev. D **12**, 1606 (1975).
23. R. F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, Phys. Rev. D **10**, 4114 (1974).
24. R. F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, Phys. Rev. D **10**, 4130 (1974).
25. R. Rajaraman and E. J. Weinberg, Phys. Rev. D **11**, 2950 (1975).
26. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).