ЖЭТФ, 2012, том 141, вып. 2, стр. 243–251

ФЕЙНМАНОВСКИЙ МЕТОД РАСПУТЫВАНИЯ ОПЕРАТОРОВ И СИНГУЛЯРНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

В. С. Попов, М. А. Трусов [*]

Институт теоретической и экспериментальной физики
117218, Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 мая 2011 г.

Решена задача об эволюции сингулярного квантового осциллятора с частотой, зависящей от времени произвольным образом. Вычислены вероятности w_{mn} переходов в спектре осциллятора и производящие функции, получены правила сумм для w_{mn}. В расчетах используется метод распутывания Фейнмана и теория представлений группы $SU(1,1)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Предложенный Фейнманом [1] метод распутывания некоммутирующих операторов (далее ФМР) привел к элегантному решению задачи о квантовом осцилляторе с постоянной частотой, находящемся под действием силы $f(t)$ произвольного вида[1)]. В дальнейшем ФМР нашел применение в ряде нестационарных задач квантовой механики, см. работы [6–9] и обзор [10]. Мы используем ФМР в задаче о сингулярном осцилляторе с переменной частотой $\omega(t)$, который представляет собой систему с неквадратичным гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2(t)x^2 + \frac{g}{8x^2}, \quad \hbar = m = 1, \tag{1}$$

где

$$0 < x < \infty, \quad g = \text{const}, \quad g > -1 \tag{2}$$

(последнее условие исключает падение частицы на центр[2)]). Зависимость частоты ω от времени может быть произвольной; предполагается лишь выполнение граничных условий

$$\omega(t) \to \begin{cases} \omega_-, & t \to -\infty, \\ \omega_+, & t \to +\infty, \end{cases} \tag{3}$$

позволяющих ввести состояния осциллятора с определенным числом квантов в начале (m) и в конце (n) процесса и рассмотреть переходы между ними. В разд. 2 получены явные аналитические формулы для вероятностей переходов w_{mn}, в разд. 3 приведены производящие функции и найдены «правила сумм» для w_{mn}. Как и ранее [7, 10], оказалось полезным дополнить ФМР теоретико-групповыми соображениями, связанными с унитарными представлениями группы $SU(1,1)$. Далее кратко обсуждается осциллятор с постоянной частотой и силой $f(t)$, а также адиабатический случай (соответственно разд. 4, 5). В разд. 6 и в Приложения вынесены некоторые математические детали.

Результаты данной работы были частично анонсированы в [9].

2. ФМР И СИНГУЛЯРНЫЙ КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Рассмотренные в работах [1, 7, 10] задачи можно обобщить, введя модель (1) сингулярного осциллятора с переменной частотой. При фиксированной частоте ω гамильтониан (1) обладает эквидистантным спектром [12]

$$E_n = 2(n-j)\omega, \quad j = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{1+g}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

[*] E-mail: trusov@itep.ru

[1)] Решение этой задачи было получено также (другими методами) в работах [2–5].

[2)] См., например [11, 12]. Заметим, что при $g < -1$ гамильтониан (1) остается формально эрмитовым, но уже не самосопряженным оператором. Понятия эрмитова и самосопряженного операторов в квантовой механике и различие между ними обсуждаются в [13–15].

$$\psi_n(x) = \mathrm{const}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\omega x^2\right)\times \\ \times x^{-2(j+1/4)}\ {}_1F_1(-n,-2j;\ \omega x^2), \quad (5)$$

где ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Следуя работе [7], введем операторы J_i:

$$J_1 = \frac{1}{4}(px+xp), \\ J_2 = -\frac{1}{4\omega}(p^2-\omega^2x^2) - \frac{g}{16\omega x^2}, \quad (6) \\ J_0 = \frac{1}{4\omega}(p^2+\omega^2x^2) + \frac{g}{16\omega x^2}, \quad [p,x] = -i.$$

Они удовлетворяют коммутационным соотношениям для генераторов квазиунитарной группы $SU(1,1)$:

$$[J_1,J_2] = -iJ_0, \quad [J_2,J_0] = iJ_1, \quad [J_0,J_1] = iJ_2, \quad (7)$$

причем «мгновенный» гамильтониан является линейной комбинацией операторов J_0 и J_2:

$$\hat{H}/\omega = J_0 - J_2 + \omega^2(J_0+J_2). \quad (8)$$

Операторная алгебра (7) замыкается, поэтому возможно применение ФМР. При этом оператор эволюции

$$\hat{S}(t,t_0) = T\exp\left\{-i\int_{t_0}^{t}\hat{H}(t')dt'\right\} \quad (9)$$

(T — операция упорядочения по времени) является оператором «конечного поворота» в группе $SU(1,1)$, а его матричные элементы дают амплитуды перехода A_{mn}:

$$A_{mn} = \left\langle n,\omega_+\left|\hat{S}(+\infty,-\infty)\right|m,\omega_-\right\rangle, \\ w_{mn} = |A_{mn}|^2. \quad (10)$$

При реализации генераторов J_i в виде (6) непосредственное вычисление показывает, что квадрат «углового момента» (оператор Казимира) сводится к c-числу:

$$\mathbf{J}^2 = J_0^2 - J_1^2 - J_2^2 = (g-3)/16 = j(j+1), \quad (11)$$

где вес представления j определен в (4). Это означает, что на волновых функциях ψ_n реализуется неприводимое унитарное[3)] представление группы $SU(1,1)$ с указанным выше значением j. Отметим при этом, что весу $j=-1/4$ соответствуют [7] четные состояния регулярного ($g=0$) осциллятора с энергиями $E_n=(2n+1/2)\omega$, а весу $j=-3/4$ — нечетные состояния, $E_n=(2n+3/2)\omega$. В этих случаях $j(j+1)=-3/16$, и гипергеометрическая функция в (5) сводится к полиномам Эрмита.

В простейшем случае $\omega_+=\omega_-=1$ начальные и конечные состояния являются собственными функциями оператора J_0:

$$J_0\psi_n = \lambda_n\psi_n, \quad \lambda_n = n-j. \quad (12)$$

Переходы возможны только между состояниями $|m\rangle$ и $|n\rangle$ с одинаковой четностью. Действуя аналогично [7], можно выразить амплитуду перехода через обобщенные функции Вигнера для неприводимых представлений группы $SU(1,1)$ с весом j:

$$w_{mn} = |f^{(j)}_{n-j,m-j}(\beta)|^2, \quad 0\le\beta<\infty, \quad (13)$$

где β — угол гиперболического поворота в группе $SU(1,1)$. Явные формулы для этих функций могут быть получены с помощью аналитического продолжения известных выражений [16, 17] для функций Вигнера $d^{(j)}_{\mu\nu}(\theta)$ унитарной группы $SU(2)$ на значения параметров β и j, отвечающие рассматриваемому нами представлению (подробности этой процедуры описаны в Приложении А к работе [8]). В теории групп такой прием носит название «унитарного трюка» Вейля. При этом существенно [18], что при аналитическом продолжении $\theta\to i\beta$ унитарность представлений с весом j (см. (4)) не нарушается (в отличие, например, от конечномерных представлений, которые не унитарны).

Обобщение на случай неравных частот, $\omega_+\ne\omega_-$, не представляет принципиальных затруднений, поскольку переход от начального базиса $|m,\omega_-\rangle$ к конечному $|n,\omega_+\rangle$ сам по себе является унитарным вращением из группы $SU(1,1)$ [19]. Опуская промежуточные выкладки [18], приведем окончательную формулу для вероятностей перехода между уровнями сингулярного осциллятора:

$$w_{mn}(\rho) = \frac{L!}{(L-S)!^2\ S!}\frac{\Gamma(L-2j)}{\Gamma(S-2j)}\rho^{L-S}(1-\rho)^{-2j}\times \\ \times\left[{}_2F_1(-S,L-2j;L-S+1;\rho)\right]^2. \quad (14)$$

Здесь j — вес неприводимого представления, определенный в (4),

$$L = \max(m,n), \quad S = \min(m,n), \\ L-S = |m-n|, \quad (15)$$

[3)] Поскольку оператор эволюции в квантовой механике унитарен; причем данное представление — бесконечномерное, поскольку $SU(1,1)$ — некомпактная группа.

а ρ — параметр возбуждения осциллятора, определенный в работах [7, 10] (см. также примеры в [19, 20]). Значение ρ может быть вычислено из уравнения движения для классического осциллятора, причем $0 \le \rho < 1$.

Поскольку первый аргумент гипергеометрической функции Гаусса в (14) — целое отрицательное число (или нуль), то ${}_2F_1$ выражается через полином Якоби. После соответствующих преобразований получаем

$$w_{mn}(\rho) = \frac{S!\,\Gamma(L-2j)}{L!\,\Gamma(S-2j)}\rho^{|m-n|}(1-\rho)^{-2j} \times \\ \times \left[P_S^{(|m-n|,-2j-1)}(1-2\rho)\right]^2, \quad (16)$$

что совпадает с результатами непосредственного решения уравнения Шредингера (см. [21] и указанные там ссылки).

В качестве конкретного примера рассмотрим возбуждение осциллятора из основного состояния:

$$m = 0, \quad w_{0n}(\rho) = \frac{\Gamma(n-2j)}{n!\,\Gamma(-2j)}\ \rho^n(1-\rho)^{-2j}. \quad (17)$$

В частности, при $g = -1$ имеем

$$j = -1/2, \quad w_{0n}(\rho) = \rho^n(1-\rho), \quad (18)$$

что совпадает с распределением вероятностей рождения из вакуума n пар заряженных скалярных ($s = 0$) бозонов под действием переменного однородного электрического поля [22–24]. Другой пример: для диагональных ($m = n$) переходов

$$w_{nn}(\rho) = (1-\rho)^{-2j}\left[{}_2F_1(-n, n-2j; 1; \rho)\right]^2. \quad (19)$$

3. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ И ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ КВАНТОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Представляют интерес производящие функции для вероятностей перехода. Для осциллятора с переменной частотой при $g = 0$ имеем [5]

$$G(u,v|\rho) = \sum_{m,n=0}^{\infty} w_{mn}(\rho)u^m v^n = \\ = \sqrt{\frac{1-\rho}{(1-uv)^2 - \rho(u-v)^2}} \equiv \\ \equiv \sqrt{\frac{1-\rho}{(1-u^2)(1-v^2) + (1-\rho)(u-v)^2}}, \quad (20)$$

где u и v — вспомогательные (комплексные) переменные. Вычисляя интеграл, находим

$$\int_0^1 d\rho \frac{G(u,v|\rho)}{1-\rho} = \frac{2}{u-v}(\operatorname{arcth} u - \operatorname{arcth} v) \quad (21)$$

(см. также (A.2)).

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях u и v, получаем

$$\int_0^1 \frac{w_{mn}(\rho)}{1-\rho}d\rho = \frac{1+(-1)^{m+n}}{m+n+1}, \quad (22)$$

$$\int_0^1 \frac{w_{mn}(\rho)}{\rho\sqrt{1-\rho}}d\rho = \frac{1+(-1)^{m+n}}{|m-n|}, \quad m \ne n, \quad (23)$$

см. Приложение А. В случае диагональных ($m = n$) переходов

$$J_{nn} \equiv \int_0^1 w_{nn}(\rho)\,d\rho = \frac{1}{2n+1} \times \\ \times \left[1 + \frac{1}{(2n+3)(2n-1)}\right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad (24)$$

при $m \ne n$ выражение для J_{mn} имеет более сложный вид.

Приведем также производящую функцию для сингулярного осциллятора (1):

$$g(u,v|\rho) = \sum_{m,n} w_{mn}(\rho)u^m v^n = \frac{\lambda^{-2j}}{1-\lambda^2 uv}, \quad (25)$$

где

$$\lambda = 2(1-\rho)\Big\{1 - \rho(u+v) + uv + \\ + \sqrt{[1-\rho(u+v)+uv]^2 - 4(1-\rho)^2 uv}\Big\}^{-1}. \quad (26)$$

Проиллюстрируем эффективность этих формул на нескольких частных случаях.

а) Полагая $u = v = 0$, имеем $\lambda = 1 - \rho$,

$$g(0,0|\rho) = w_{00}(\rho) = (1-\rho)^{-2j}. \quad (27)$$

б) Если $u = 0$, то

$$\lambda = \frac{1-\rho}{1-\rho v}, \quad g(0,v|\rho) = \left(\frac{1-\rho}{1-\rho v}\right)^{-2j}, \quad (28)$$

откуда для вероятностей перехода w_{0n} получаем выражение (17), которое, таким образом, справедливо при любом значении константы связи g, а не только для регулярного ($g = 0$) осциллятора.

в) Можно показать (см. Приложение В), что для случая регулярного осциллятора (т. е. при специальных значениях веса $j = -1/4$ и $-3/4$) выражение (25) полностью соответствует формуле (20).

г) Полагая в (25) $v = 1$, имеем

$$\lambda = 1, \quad g(u, 1|\rho) = (1-u)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} u^m. \qquad (29)$$

Отсюда вытекает, что при любых m и ρ выполняются соотношения унитарности

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_{mn}(\rho) = 1, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (30)$$

непосредственная проверка которых, исходя из явных формул (14) или (16) для w_{mn}, требует довольно громоздких вычислений (см. в этой связи Приложение Г в статье [10]).

д) Полагая в (25) $u = v$, находим

$$\sum_{m,n} w_{mn}(\rho) u^{m+n} = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{1-u^2}, \qquad (31)$$

откуда

$$S_k = \sum_{m+n=k} w_{mn}(\rho) = \\ = \begin{cases} \sqrt{1-\rho} & \text{при } k \text{ четном}, \\ 0 & \text{при } k \text{ нечетном}. \end{cases} \qquad (32)$$

При малых k в справедливости этого соотношения нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

е) Выражение (25) не меняется при перестановке переменных u и v. Отсюда вытекает, что при любом виде функции $\omega(t)$, не обязательно симметричном относительно обращения времени, справедливы соотношения

$$w_{mn}(\rho) = w_{nm}(\rho). \qquad (33)$$

Эта дополнительная симметрия не вытекает из общих принципов квантовой механики и специфична для гармонического осциллятора. Красивое объяснение ее было дано Питаевским [19, с. 1384].

Последовательно дифференцируя производящие функции по параметрам u и v, нетрудно вычислить среднее число квантов в конечном состоянии,

$$\langle n\rangle_m = \sum_{n=0}^{\infty} n w_{mn}, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial v}\right|_{v=1} = \sum_{m=0}^{\infty} \langle n\rangle_m u^m, \qquad (34)$$

дисперсию $\langle \Delta n^2\rangle_m$ и более высокие моменты распределения w_{mn}. В частности, изменение адиабатического инварианта осциллятора $I = \langle H\rangle/\omega$ при переходе $|m, \omega_-\rangle \to |n, \omega_+\rangle$ равно

$$I_+/I_- = \langle n - j\rangle/(m-j) = (1+\rho)/(1-\rho), \qquad (35)$$

т. е. значение I возрастает при произвольном законе изменения частоты[4)].

4. ОСЦИЛЛЯТОР С ПОСТОЯННОЙ ЧАСТОТОЙ

В этом случае гамильтониан есть

$$\hat{H} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - f(t)x, \quad -\infty < x < \infty \qquad (36)$$

и предполагается, что $f(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Вероятности перехода w_{mn} впервые были вычислены Фейнманом [1, 2], Швингер получил для них более компактное выражение [3, 4]. Мы запишем их в виде, удобном для вычислений:

$$w_{mn}(\nu) = \frac{n_>!}{n_<!(|m-n|!)^2}\, \nu^{|m-n|} \times \\ \times \left[{}_1F_1(-n_<, |m-n|+1; \nu)\right]^2 e^{-\nu} \qquad (37)$$

(ср. с формулой (14)). Здесь $n_> = \max(m, n)$, $n_< = \min(m, n)$ и ν — параметр, характеризующий степень возбуждения осциллятора внешней силой:

$$\nu = \frac{1}{2\omega}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt\right|^2. \qquad (38)$$

Производящая функция

$$G(u, v|\nu) = \sum_{m,n=0}^{\infty} w_{mn}(\nu) u^m v^n = (1-uv)^{-1} \times \\ \times \exp\left\{-\nu\frac{(1-u)(1-v)}{1-uv}\right\} \qquad (39)$$

в принципе может быть получена из (37), однако значительно проще получить ее[5)], используя результат Швингера [4] для суммы вида $\sum_{m=0}^{\infty} w_{mn} u^m$. Из (39) видно, что $G(u, 1|\nu) = (1-u)^{-1}$, в силу чего при любой зависимости от времени силы $f(t)$ выполняются соотношения унитарности (30).

[4)] Однако при условии, что начальное состояние m — квантовое. В общем случае это утверждение не имеет места [19].

[5)] См. Приложение Г в обзоре [10]. Следует отметить, что формулы (39) и (20) вытекают также из выражения для производящей функции, приведенного в работе Хусими [5].

Из (39) вытекает ряд неожиданных соотношений для $w_{mn}(\nu)$. Интегрируя (39) по ν и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях u и v, приходим к своеобразным «правилам сумм», аналогичным (22)–(24):

$$\int_0^\infty w_{mn}(\nu)\,d\nu = 1, \quad \langle \nu \rangle_{mn} = \int_0^\infty w_{mn}(\nu)\nu\,d\nu = m+n+1, \qquad (40)$$

$$\langle \Delta\nu^2 \rangle_{mn} = \int_0^\infty w_{mn}(\nu)\left[\nu - \langle\nu\rangle_{mn}\right]^2 d\nu = 2mn+m+n+1, \dots \qquad (41)$$

Проиллюстрируем эти соотношения. Для переходов из основного состояния ($m = 0$) имеем

$$w_{0n} = e^{-\nu}\nu^n/n!, \quad \int_0^\infty w_{0n}(\nu)\nu^k d\nu = (n+k)!/n!, \quad k > -1, \qquad (42)$$

а для переходов с первого возбужденного уровня —

$$w_{1n} = e^{-\nu}\nu^{n-1}(\nu-n)^2/n!, \quad \int_0^\infty w_{1n}(\nu)\nu^k d\nu = \frac{(n+k)!}{n!}\left(1 + \frac{k^2}{n+k}\right). \qquad (43)$$

При $k = 0$, 1, 2 эти выражения полностью соответствуют правилам сумм (40).

Соотношения (40) можно обобщить на произвольные моменты $\langle \nu^k \rangle_{mn}$, см. Приложение A.

5. АДИАБАТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Если частота $\omega(t)$ — медленно меняющаяся функция времени, не имеющая особенностей в некоторой полосе $|\operatorname{Im} t| < \epsilon$, $\epsilon > 0$, то параметр возбуждения осциллятора экспоненциально мал [25, 26]. В этом случае из (20) получаем

$$G(u, v|\rho) = \frac{1}{1-uv} - \rho\frac{(1-u^2)(1-v^2)}{2(1-uv)^3} + \dots, \quad \rho \to 0, \qquad (44)$$

откуда

$$w_{nn}(\rho) = 1 - \frac{1}{2}(n^2+n+1)\rho + \frac{1}{32}(3n^4+6n^3+5n^2+2n-4)\rho^2 + \dots, \qquad (45)$$

$$w_{n,n+2}(\rho) = \frac{1}{4}(n+1)(n+2)\rho + \dots, \quad w_{n,n-2}(\rho) = \frac{1}{4}n(n-1)\rho + \dots \qquad (46)$$

Вообще, $w_{n,n\pm 2k}(\rho) \approx O(\rho^k)$.

Аналогичным образом, для случая осциллятора с постоянной частотой, из (39) следуют разложения

$$w_{nn}(\nu) = 1 - (2n+1)\nu + \frac{1}{2}(3n^2+3n+1)\nu^2 + \dots, \quad \nu \to 0, \qquad (47)$$

$$w_{n,n+1}(\nu) = (n+1)\nu - (n+1)^2\nu^2 + \dots, \quad w_{n,n+2}(\nu) = \frac{1}{4}(n^2+3n+2)\nu^2 + \dots \qquad (48)$$

и аналогично для $w_{n,n-1}$, $w_{n,n-2}$.

В случае сингулярного осциллятора адиабатические разложения следуют из (25). В частности, для диагональных переходов

$$w_{nn}(\rho) = 1 - 2[n^2 - (2n+1)j]\rho + \dots = 1 - \frac{1}{2}(N^2+N+1)\rho + \dots, \qquad (49)$$

где

$$N = 2\sqrt{(n-j)^2 - j(j+1) - \frac{3}{16}} - \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \qquad (50)$$

Регулярному ($g = 0$) осциллятору соответствуют значения веса $j = -1/4$ и $j = -3/4$ для четных и нечетных уровней. При этом соответственно $N = 2n$ или $2n+1$ и (49) совпадает с первым членом адиабатического разложения (45).

6. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

ФМР позволяет распутать [10] гамильтониан гармонического осциллятора и в том случае, когда и частота ω, и сила f зависят от времени произвольным образом. При этом операторная алгебра замыкается (см. уравнения (6.1), (6.13)–(6.15) в [10]), однако она уже не является полупростой алгеброй Ли (см., например, [27]), и применение теории групп усложняется.

Мы ограничимся простым (и, по-видимому, наиболее интересным для физических приложений) случаем, когда осциллятор вначале находится в основном состоянии:

$$\psi_0(x, t < t_0) = \left(\frac{\omega_-}{\pi}\right)^{1/4} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\omega_-(x^2 + it)\right\}. \quad (51)$$

Нетрудно убедиться, что функция

$$\psi(x, t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\alpha(t)x^2 + 2\beta(t)x + \gamma(t)\right]\right\} \quad (52)$$

является решением уравнения Шредингера, если [5]

$$i\dot\alpha = \alpha^2 - \omega^2, \quad i\dot\beta = \alpha\beta + 2f, \quad \dot\gamma = i(\alpha - \beta^2) \quad (53)$$

с начальными условиями

$$\alpha = \omega_-, \quad \beta = 0, \quad \gamma = i\omega_- t - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\omega_-}{\pi}\right) \quad (54)$$

при $t \le t_0$. При этом $\alpha(t)$ определяется из уравнения Риккати (53), после чего $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ находятся в квадратурах.

Переходя к p-представлению, имеем

$$c(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) e^{-ipx} dx = \\ = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha}(p^2 + 2ip + \beta^2 - \alpha\gamma)\right\}, \quad (55)$$

отсюда для дисперсии координаты и импульса получаем соответственно

$$\begin{gathered} \Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = 1/\sqrt{2\alpha_1}, \\ \Delta p = |\alpha|/\sqrt{2\alpha_1}, \\ D = \Delta x\, \Delta p = |\alpha|/2\alpha_1 \ge 1/2, \\ \alpha_1 = \operatorname{Re}\alpha(t). \end{gathered} \quad (56)$$

Соотношение неопределенностей Гейзенберга имеет минимально возможное значение, равное $\hbar/2$, только при условии, что $\alpha_2 \equiv \operatorname{Im}\alpha = 0$, или $\omega(t) = \omega_- = \mathrm{const}$. В остальных случаях волновая функция (52) хотя и соответствует гауссову волновому пакету, но не является когерентным состоянием [28].

Заметим, что произведение неопределенностей D всегда конечно. Действительно, из (53) вытекает, что

$$\dot\alpha_1 = 2\alpha_1\alpha_2, \quad \dot\alpha_2 = \omega^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad (57)$$

откуда[6)]

$$\alpha_1(t) = \omega_- \exp\left\{2\int\limits_{t_0}^{t} \alpha_2(t')\, dt'\right\} > 0. \quad (58)$$

[6)] Поскольку $\alpha_1 > 0$, волновая функция (52) остается нормируемой, даже если $\omega^2(t) < 0$, что соответствует нестабильному осциллятору (на некотором конечном временном интервале, но не при $t \to \pm\infty$).

Приведем конкретный пример: пусть $f(t) \equiv 0$, а частота осциллятора испытывает мгновенный скачок при $t = 0$:

$$\omega(t) = \omega_-\theta(-t) + \omega_+\theta(t), \quad (59)$$

где $\theta(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Тогда $\alpha(t) = \omega_-$ и $D = 1/2$ при $t \le 0$, а при $t \ge 0$

$$\alpha(t) = \omega_+ \frac{(\omega_+ + \omega_-)e^{i\tau} - (\omega_+ - \omega_-)e^{-i\tau}}{(\omega_+ + \omega_-)e^{i\tau} + (\omega_+ - \omega_-)e^{-i\tau}}, \\ \tau = \omega_+ t, \quad (60)$$

$$D = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_+^2 - \omega_-^2}{2\omega_+\omega_-}\right)^2 \sin^2 2\tau}. \quad (61)$$

В этом случае произведение неопределенностей D периодически колеблется в пределах от $1/2$ до $\left(\omega_+^2 + \omega_-^2\right)/4\omega_+\omega_- > 1/2$.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ

Скажем еще несколько слов о применении ФМР для задачи распутывания в общем виде. Пусть рассматривается эволюция при $t > 0$ нестационарной квантовомеханической системы с гамильтонианом

$$\hat H(t) = \sum_i \alpha_i(t)\hat A_i, \quad (62)$$

где не зависящие от времени операторы A_i образуют алгебру Ли (возможно, с нетривиальным центром[7)]),

$$\left[\hat A_i, \hat A_j\right] = i\sum_k c_{ijk}\hat A_k. \quad (63)$$

Введем следующее вспомогательное преобразование операторов:

$$\hat A'_{ij}(\lambda) = \exp\{i\lambda\hat A_j\}\, \hat A_i\, \exp\{-i\lambda\hat A_j\}. \quad (64)$$

Для операторов A' имеет место система линейных уравнений

$$\frac{d}{d\lambda}\hat A'_{ij}(\lambda) = \sum_k c_{ijk}\hat A'_{kj}(\lambda), \quad (65)$$

[7)] Центром алгебры Ли называется такая ее подалгебра, все элементы которой коммутируют со всеми элементами алгебры. Алгебра Ли, имеющая нетривиальный (ненулевой) центр, не является полупростой. Пример появления такой алгебры при применении ФМР приведен в разд. 6.

с начальным условием

$$\hat{A}'_{ij}(0) = \hat{A}_i, \tag{66}$$

решение которой можно представить в виде

$$\hat{A}'_{ij}(\lambda) = \sum_k d_{ijk}(\lambda)\hat{A}_k. \tag{67}$$

Числовые функции $d_{ijk}(\lambda)$, как легко убедиться, удовлетворяют системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\lambda} d_{ijk}(\lambda) = \sum_l c_{ijl} d_{ljk}(\lambda) \tag{68}$$

с начальным условиям

$$d_{ijk}(0) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \tag{69}$$

которая сравнительно легко решается в базисе Картана.

Мы хотим представить оператор эволюции для данной задачи в следующем виде:

$$\hat{S}(t) = \prod_i \exp\{-i\beta_i(t)\hat{A}_i\}. \tag{70}$$

Дифференцируя его по времени и используя для «выпутывания» вспомогательное преобразование (64), получаем

$$i\frac{d}{dt}\hat{S}(t) = \left(\sum_{i,j} \Phi_{ij}\left[\{\beta(t)\}\right] \dot{\beta}_i(t)\hat{A}_j \right) \hat{S}(t), \tag{71}$$

где Φ_{ij} — некоторые алгебраические функционалы от β.

Теперь, подставляя в уравнение эволюции

$$i\frac{d}{dt}\hat{S}(t) = \hat{H}(t)\hat{S}(t), \quad \hat{S}(0) = \hat{1} \tag{72}$$

гамильтониан (62), оператор эволюции (70) и его производную (71), мы окончательно сводим нашу задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций β_i:

$$\sum_i \Phi_{ij}\left[\{\beta(t)\}\right] \dot{\beta}_i(t) = \alpha_j(t), \tag{73}$$

с начальным условием

$$\beta_i(0) = 0, \tag{74}$$

что и является конечной целью применения ФМР.

Работа была выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-02-00364-а).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Некоторые детали вычислений

1) Исходя из (20) и обозначая $\zeta = \sqrt{1-\rho}$, имеем

$$J = \int_0^1 G(u,v|\rho)\frac{d\rho}{1-\rho} \equiv \sum_{m,n} u^m v^n \times \\ \times \int_0^1 w_{mn}(\rho)\frac{d\rho}{1-\rho} = 2\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{a+b\zeta^2}}, \tag{A.1}$$

где $a = (1-u^2)(1-v^2)$, $b = (u-v)^2$. Последний интеграл вычисляется элементарно:

$$J = \frac{1}{u-v}\ln\left[\frac{(1+u)(1-v)}{(1-u)(1+v)}\right] = \\ = 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2k} \frac{u^m v^{2k-m}}{2k+1}, \tag{A.2}$$

откуда сразу следует (22). Аналогичным образом,

$$\int_0^1 G(u,v|\rho)\frac{d\rho}{\rho\sqrt{1-\rho}} = 2\int_0^1 \frac{d\zeta}{(1-\zeta^2)\sqrt{a+b\zeta^2}}, \tag{A.3}$$

что в итоге дает (23).

2) Для вывода соотношения (24) воспользуемся тем, что [19] при $g = 0$

$$w_{nn}(\rho) = \sqrt{1-\rho}\left[P_n\left(\sqrt{1-\rho}\right)\right]^2, \tag{A.4}$$

где P_n — полином Лежандра. Отсюда

$$J_{nn} = \int_0^1 w_{nn}(\rho)\,d\rho = \\ = \frac{2}{3}\int_0^1 P_n^2(z)[1+2P_2(z)]\,dz. \tag{A.5}$$

Здесь первый интеграл — элементарный, второй же с помощью формулы (107.15) из [12] выражается через $3j$-символ Вигнера,

$$\begin{pmatrix} n & n & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)}, \quad n \geq 1, \tag{A.6}$$

и после некоторых преобразований приходим к формуле (24).

3) В случае произвольных квантовых чисел m и n, используя (20), получаем

$$\int_0^1 G(u,v|\rho)\,d\rho = \frac{1}{(u-v)^2} \times$$
$$\times \left\{ 1-uv-\frac{(1-u^2)(1-v^2)}{2(u-v)} \ln \frac{(1+u)(1-v)}{(1-u)(1+v)} \right\}. \quad \text{(A.7)}$$

Разложение этого выражения по степеням u, v дает интегралы

$$J_{mn} = \int_0^1 w_{mn}(\rho)\,d\rho. \quad \text{(A.8)}$$

4) Обозначая, для случая осциллятора с постоянной частотой, через $\langle \nu^k \rangle_{mn}$ k-й момент распределения вероятностей

$$\langle \nu^k \rangle_{mn} = \int_0^\infty w_{mn}(\nu)\nu^k d\nu, \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad \text{(A.9)}$$

из (39) получаем

$$\int_0^\infty G(u,v|\rho)\nu^k d\nu = \sum_{m,n=0}^\infty \langle \nu^k \rangle_{mn} u^m v^n =$$
$$= k! \frac{(1-uv)^k}{[(1-u)(1-v)]^{k+1}}. \quad \text{(A.10)}$$

Используя биномиальное разложение

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{x^n}{n!} \quad \text{(A.11)}$$

и перемножая ряды в (A.10), находим

$$\langle \nu^k \rangle_{mn} =$$
$$= \sum_{s=0}^{\min(k,m,n)} (-1)^s \frac{(k+m-s)!(k+n-s)!}{s!(k-s)!(m-s)!(n-s)!}. \quad \text{(A.12)}$$

В частности, при $k = 0,1$ получаем соотношения (40), а при $k = 2$ имеем

$$\langle \nu^2 \rangle_{mn} = m^2 + n^2 + 4mn + 3(m+n) + 2, \quad \text{(A.13)}$$

откуда легко следует (41).

ПРИЛОЖЕНИЕ B

Производящая функция для регулярного осциллятора

Покажем, как формула (25) переходит в формулу (20) для частного случая регулярного осциллятора. Переходы в рассматриваемом случае будут происходить раздельно между четными ($2m \to 2n$) и между нечетными ($2m+1 \to 2n+1$) уровнями (см., например, [20]), им соответствуют значения веса $j = -1/4$ и $j = -3/4$.

Имеем

$$G(u,v|\rho) = \sum_{m,n} w_{mn}^{(j=-1/4)} u^{2m} v^{2n} +$$
$$+ \sum_{m,n} w_{mn}^{(j=-3/4)} u^{2m+1} v^{2n+1} = g(u^2,v^2|\rho)\Big|_{j=-1/4} +$$
$$+ uvg(u^2,v^2|\rho)\Big|_{j=-3/4} =$$
$$= \frac{\tilde\lambda^{1/2}}{1-u^2v^2\tilde\lambda^2} + \frac{uv\tilde\lambda^{3/2}}{1-u^2v^2\tilde\lambda^2} = \frac{\tilde\lambda^{1/2}}{1-uv\tilde\lambda}, \quad \text{(B.1)}$$

где

$$\tilde\lambda \equiv \lambda(u^2,v^2) = \frac{2(1-\rho)}{A+\sqrt{A^2-B^2}},$$
$$A = 1-\rho(u^2+v^2)+u^2v^2, \quad B = 2uv(1-\rho). \quad \text{(B.2)}$$

Далее заметим, что

$$\left(\sqrt{A-B}+\sqrt{A+B}\right)^2 = 2\left(A+\sqrt{A^2-B^2}\right). \quad \text{(B.3)}$$

Поэтому

$$1-uv\tilde\lambda = \frac{A-B+\sqrt{A^2-B^2}}{A+\sqrt{A^2-B^2}} =$$
$$= \frac{2\sqrt{A-B}}{\sqrt{A+B}+\sqrt{A-B}},$$
$$\tilde\lambda^{1/2} = \frac{\sqrt{2(1-\rho)}}{\sqrt{A+\sqrt{A^2-B^2}}} =$$
$$= \frac{2\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{A+B}+\sqrt{A-B}}. \quad \text{(B.4)}$$

Окончательно находим

$$G(u,v|\rho) = \sqrt{\frac{1-\rho}{A-B}} =$$
$$= \sqrt{\frac{1-\rho}{1-\rho(u^2+v^2)+u^2v^2-2uv(1-\rho)}}, \quad \text{(B.5)}$$

что совпадает с (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. P. Feynman, Phys. Rev. **84**, 108 (1951).

2. R. P. Feynman, Phys. Rev. **80**, 440 (1950).

3. J. Schwinger, Phys. Rev. **91**, 728 (1953).

4. J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961).

5. K. Husimi, Progr. Theor. Phys. **9**, 381 (1953).

6. В. С. Попов, ЖЭТФ **35**, 985 (1958).

7. V. S. Popov, Phys. Lett. A **342**, 281 (2005).

8. В. С. Попов, ЖЭТФ **128**, 944 (2005).

9. V. S. Popov and M. A. Trusov, Phys. Lett. A **372**, 5274 (2008); **373**, 1925 (2009).

10. В. С. Попов, УФН **177**, 1319 (2007).

11. K. M. Case, Phys. Rev. **80**, 797 (1950).

12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Наука, Москва (1974).

13. В. П. Маслов, Л. Д. Фаддеев, *Операторы квантовой механики* (Функциональный анализ, гл. VII), Наука, Москва (1964).

14. А. Вайтман, *Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей*, Наука, Москва (1968).

15. R. D. Richtmayer, *Principles of Advanced Mathematical Physics*, Vol. 1, Springer, New York (1978).

16. E. P. Wigner, *Group Theory and Its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Acad. Publ., New York (1959).

17. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).

18. М. А. Трусов, частное сообщение.

19. В. С. Попов, А. М. Переломов, ЖЭТФ **56**, 1375 (1969).

20. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971).

21. И. Л. Малкин, В. И. Манько, *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*, Наука, Москва (1979).

22. A. I. Nikishov, Nucl. Phys. B **21**, 346 (1970).

23. Н. Б. Нарожный, А. И. Никишов, ЯФ **11**, 1072 (1970).

24. В. С. Попов, ЖЭТФ **62**, 1248 (1972).

25. R. M. Kulsrud, Phys. Rev. **106**, 205 (1958).

26. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Физматлит, Москва (2001).

27. Дж. Хамфрис, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, Москва (2003).

28. R. J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963); **131**, 2766 (1963).