ЖЭТФ, 2012, том 141, вып. 6, стр. 1049–1059

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ НЕПОДВИЖНОГО ЯДРА ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЬНОГО ОДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

*С. А. Арсеньев, С. А. Корягин**

Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 7 октября 2011 г.

Исследовано электромагнитное излучение электронов с положительной механической энергией, совершающих связанное классическое движение в кулоновском поле неподвижного ядра, которое помещено в сильное однородное магнитное поле. Связанные траектории существуют и занимают широкий сектор скоростей вблизи ядра (по сравнению со свободными траекториями с той же энергией) в условиях, когда характерный ларморовский радиус электрона оказывается меньше расстояния, на котором энергия кулоновского взаимодействия электрона с ядром равна по абсолютной величине механической энергии электрона. Необходимые условия достигаются в фотосферах одиночных магнитных белых карликов и реализованы в экспериментах по созданию антиводорода. В таком случае излучательная способность связанных частиц с положительной энергией существенно превышает аналогичную величину для тормозного излучения свободных электронов (в частности, в тепловом равновесии) на частотах ниже электронной циклотронной частоты, но выше характерного обратного времени пролета электрона около ядра в ближнем столкновении в отсутствие магнитного поля. Квантовая дискретность энергии квазиклассических связанных состояний с положительной энергией приводит к тому, что излучение ансамбля связанных частиц (например, теплового) сосредоточено в неперекрывающихся между собой спектральных линиях. В свою очередь, линейно поляризованное тормозное излучение свободных электронов обусловливает перенос излучения в континууме.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сильные магнитные поля вырожденных звезд — белых карликов — существенно влияют на элементарные процессы в плазме их фотосфер [1–5]. В результате наблюдаемые спектры излучения магнитных белых карликов качественно отличаются от спектров излучения немагнитных звезд этого класса. Их отличает сильная круговая и линейная поляризации в оптическом и инфракрасном диапазонах длин волн [6].

В условиях фотосфер белых карликов с температурой $T \sim 10^4$ К ≈ 1 эВ и магнитным полем $B \gtrsim 10^7$ Гс оказывается возможным полностью связанное движение электрона около неподвижного ядра при положительной полной механической энергии частиц E [7, 8]. Связанные траектории занимают около ядра существенно более широкий сектор скоростей, чем свободные траектории с той же энергией $E > 0$, в условиях, когда ларморовский радиус электрона вдали от ядра,

$$r_B = \omega_B^{-1} \sqrt{2E/m}, \qquad (1)$$

становится меньше расстояния

$$r_s = Ze^2/2E, \qquad (2)$$

на котором кулоновская потенциальная энергия достигает величины порядка E:

$$\frac{r_B}{r_s} = \frac{1.7}{Z} \left(\frac{2E}{1\ \text{эВ}}\right)^{3/2} \left(\frac{B}{10^7\ \text{Гс}}\right)^{-1} \ll 1. \qquad (3)$$

Здесь $\omega_B = eB/mc$ — электронная циклотронная частота, $e > 0$ — элементарный заряд, $Z > 0$ — зарядовое число ядра, m — масса электрона, c — скорость света. В лабораторных условиях соотношение

*E-mail: koryagin@appl.sci-nnov.ru

(3) достигнуто в экспериментах по созданию антиводорода [9, 10].

В заданном магнитном поле условие (3) ограничивает энергию связанных частиц неравенством

$$E \ll E_u/2, \tag{4}$$

где величина

$$\frac{E_u}{2} = \frac{Z^{2/3} e^2 B^{2/3}}{2\,(mc^2)^{1/3}} = E_a \left(\frac{B}{B_c}\right)^{2/3} \tag{5}$$

имеет смысл кинетической энергии электрона, который вращается по круговой орбите вокруг ядра в отсутствие магнитного поля с частотой, равной заданной циклотронной частоте ω_B. Для численных оценок мы указали в (5), что классическая величина $E_u/2$ равна энергии ионизации водородоподобного иона,

$$E_a = Z^2 e^4 m/2\hbar^2 = 13.6 Z^2 \text{ эВ},$$

в магнитном поле $B_c = Z^2 e^3 m^2 c/\hbar^3 = 2.35 \cdot 10^9 Z^2$ Гс (в котором также энергия основного уровня Ландау $\hbar\omega_B/2$ достигает $E_u/2$ и E_a).

Электрон с энергией (4) эффективно удерживается ядром от убегания вдоль магнитного поля, если он пролетает около рассеивающего центра, совершая большое число циклотронных оборотов, что выполняется на расстояниях

$$r \gtrsim L_u. \tag{6}$$

Длина

$$L_u = \left(\frac{Zmc^2}{B^2}\right)^{1/3} = r_a \left(\frac{B}{B_c}\right)^{-2/3} \tag{7}$$

не зависит от энергии E и имеет смысл радиуса круговой орбиты, по которой электрон совершает оборот вокруг ядра (в отсутствие магнитного поля) за время, равное заданному циклотронному периоду, а также совпадает с величинами (1) и (2) при $E = E_u/2$. Для численных оценок в (7) показано, что классическое расстояние L_u уменьшается до радиуса водородоподобного иона $r_a = \hbar^2/Ze^2m = 0.53 Z^{-1}$ Å в магнитном поле B_c.

При оценке числа циклотронных оборотов электрона на трассе около ядра необходимо учитывать, что для частиц с энергией (4) длина

$$L_u \ll r_s.$$

Поэтому около ядра кинетическая энергия $mv^2/2$ электрона обусловлена кулоновским взаимодействием, практически равна Ze^2/r и, следовательно, существенно превышает механическую энергию E. В результате частица пролетает около ядра за время

$$t_c = \frac{\sqrt{2}\,r}{v} = \frac{r^{3/2}}{\sqrt{Ze^2/m}} = \omega_B^{-1} \left(\frac{r}{L_u}\right)^{3/2}, \tag{8}$$

которое, действительно, превышает характерное время ω_B^{-1} циклотронного оборота на расстояниях (6).

Вместе с тем связанным траекториям принадлежат практически все направления скоростей в интервале расстояний от ядра

$$L_u \lesssim r \ll r_s, \tag{9}$$

где кулоновская энергия велика по сравнению с величиной E. Действительно, свободные электроны с энергией (4) движутся в условиях дрейфового приближения на расстояниях (9) и, следовательно, кулоновское поле ускоряет их преимущественно вдоль магнитного поля. В результате в пространственной области (9) скорости свободных частиц направлены почти вдоль магнитного поля. В свою очередь, широкий сектор скоростей с бо́льшими отклонениями от магнитных силовых линий (который оказался недоступен свободным частицам) занят связанными траекториями.

Строгое доказательство [8] существования связанного движения с положительной энергией основано на сохранении энергии, обобщенного момента импульса и наличии так называемых инвариантных торов — траекторий, каждая из которых всюду плотно заполняет двумерную поверхность в фазовом пространстве системы [11]. Две сохраняющиеся величины и инвариантные торы ограничивают в фазовом пространстве электрона области, из которых частица не может уйти от ядра на бесконечность.

Связанные электроны эффективно излучают на частотах ω порядка обратной величины их характерного времени пролета около ядра (8) на расстояниях (9):

$$\omega_s \ll \omega \ll \omega_B. \tag{10}$$

В (10) низкочастотная граница

$$\omega_s = \frac{1}{t_c(r = r_s)} = \frac{(2E)^{3/2}}{Ze^2\sqrt{m}} = \omega_B \left(\frac{2E}{E_u}\right)^{3/2} \tag{11}$$

соответствует времени пролета на расстоянии (2). В случае одиночных магнитных белых карликов длины волн $\lambda = 2\pi c/\omega$, соответствующие частотам (10), попадают в инфракрасный диапазон:

$$1.1\left(\frac{B}{10^8\ \text{Гс}}\right)^{-1}\ \text{мкм} \ll$$

$$\ll \lambda \ll 6.5Z\left(\frac{2E}{1\ \text{эВ}}\right)^{-3/2}\ \text{мкм}. \qquad (12)$$

Поскольку связанные траектории занимают широкий сектор скоростей в интервале расстояний (9) около ядра, мощность электромагнитного излучения связанных электронов с положительной энергией может превысить мощность тормозного излучения свободных частиц в диапазоне длин волн (12). Поэтому цель данной работы составляет расчет излучательной способности связанных электронов с положительной энергией и сопоставление ее с аналогичной величиной для тормозного излучения свободных частиц, а также обсуждение вклада свободных и связанных частиц в наблюдаемое излучение одиночных магнитных белых карликов.

План статьи следующий. В разд. 2 указаны используемые приближения для расчета мощностей связанного движения электрона и сопровождающего его электромагнитного излучения. В разд. 3 выполнен расчет излучения одного связанного электрона, а в разд. 4 — изотропного ансамбля связанных частиц, распределение которых зависит только от их механической энергии. В разд. 5 приведена спектральная излучательная способность для тормозного излучения свободных электронов с энергией (4) в магнитном поле и показано, что, например, в тепловом равновесии она существенно меньше излучательной способности связанных частиц с той же энергией в диапазоне частот (10) и длин волн (12). В разд. 6 продемонстрировано, что ниже электронной циклотронной частоты суммарная излучательная способность свободных и связанных электронов в магнитном поле совпадает с точностью до численного множителя порядка 4–6 с аналогичной величиной для тормозного излучения в отсутствие магнитного поля (но отличается высокой линейной поляризацией). В разд. 7 обсуждена квантовая дискретность энергии квазиклассических связанных состояний, в результате которой излучение ансамбля связанных электронов как с положительной, так и отрицательной энергией сосредоточено в неперекрывающихся между собой спектральных линиях. В свою очередь, перенос излучения в континууме обусловлен линейно поляризованным тормозным излучением свободных электронов. Основные результаты работы сформулированы в заключительном разделе.

2. СВЯЗАННОЕ МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Электрон с положительной механической энергией (4) сильно локализован поперек магнитного поля, если ведущий центр его циклотронного вращения удален от ядра на расстояние (6), где существуют связанные траектории. Действительно, в этом случае максимальный возможный ларморовский радиус частицы

$$r_{B\,max} = \omega_B^{-1}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{Ze^2}{r}\right)} =$$
$$= \sqrt{2}\,L_u\sqrt{\frac{E}{E_u}+\frac{L_u}{r}} \ll L_u$$

существенно меньше пространственного масштаба неоднородности кулоновского поля $r \gtrsim L_u$. Тогда движение связанного электрона с энергией (4) естественно представить как «быстрое» мелкомасштабное в пространстве циклотронное вращение и «медленное» широкоамплитудное колебание вдоль магнитного поля в «одномерном» кулоновском потенциале

$$U(z) = -\frac{Ze^2}{\sqrt{p_h^2+z^2}},$$

где p_h — удаленность ведущего центра циклотронного вращения от центральной магнитной силовой линии, проходящей через ядро, — оси z. Координата z отсчитывается от ядра вдоль магнитного поля.

Удаленность p_h полагаем постоянной величиной, что обосновано сохранением обобщенного момента импульса

$$p_\varphi = [\mathbf{r}\times(m\dot{\mathbf{r}} - e\mathbf{A}/c)]_z = m\rho^2\left(\dot\varphi - \omega_B/2\right) \qquad (13)$$

в силу азимутальной симметрии задачи (здесь $\mathbf{A} = [\mathbf{B}\times\mathbf{r}]/2$ — векторный потенциал магнитного поля, ρ — поперечная радиальная координата, φ — азимутальный угол). Рассматриваемым удаленным траекториям, которые не охватывают центральную магнитную силовую линию, соответствуют отрицательные значения p_φ ($\dot\varphi < \omega_B/2$).

Действительно, в силу закона сохранения (13) поперечная координата ρ однозначно связана с мгновенной угловой скоростью $\dot\varphi$ равенством

$$\rho^2 = -\frac{2p_\varphi}{m\left(\omega_B - 2\dot\varphi\right)}\,. \qquad (14)$$

В свою очередь, сохранение механической энергии ограничивает абсолютное значение $\dot\varphi$ в знаменателе выражения (14) максимальной возможной величиной

$$|\dot{\varphi}|_{max} = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)} = \frac{\omega_B r_{B\,max}}{\rho},$$

которая много меньше циклотронной частоты ω_B в силу проанализированной выше сильной локализации электрона ($r_{B\,max} \ll \rho$). Тогда, согласно (14), расстояние ρ до оси z сохраняется вблизи постоянного значения $\sqrt{2\,|p_\varphi|\,/m\omega_B}$ вдоль всей траектории, которое и принимаем за удаленность ведущего центра,

$$p_h = \sqrt{2\,|p_\varphi|\,/m\omega_B}\,.$$

При расчете мощности электромагнитного излучения мы не учитываем медленный азимутальный дрейф ведущего центра циклотронного вращения в скрещенных электрическом (кулоновском) и однородном магнитном полях, поскольку в интервале расстояний (6) его скорость

$$v_d = c\,\frac{Ze/p_h^2}{B} = \sqrt{\frac{E_u}{m}}\left(\frac{L_u}{p_h}\right)^2$$

существенно меньше продольной скорости электрона

$$v_\parallel \sim \sqrt{\frac{Ze^2}{mp_h}} = \sqrt{\frac{E_u}{m}}\left(\frac{L_u}{p_h}\right)^{1/2}.$$

3. ИЗЛУЧЕНИЕ ОДНОГО СВЯЗАННОГО ЭЛЕКТРОНА

Ангармоническое колебание связанного электрона вдоль магнитного поля с периодом T и независимое от него циклотронное вращение создают электромагнитное излучение с линейчатым спектром на гармониках частоты $2\pi/T$ колебания вдоль магнитного поля и на циклотронной частоте ω_B.

Ниже циклотронной частоты,

$$\omega \ll \omega_B \qquad (15)$$

(где находится диапазон (10), обсуждавшийся во Введении), излучение обусловлено продольным ангармоническим колебанием и поэтому соответствует излучению диполя, ориентированного вдоль магнитного поля. Излучение линейно поляризовано в плоскости магнитного поля и направления на наблюдателя, имеет диаграмму направленности, пропорциональную $\sin^2\theta$, где θ — угол между магнитным полем и волновым вектором. Мощность излучения в единичный телесный угол на q-й гармонике частоты $2\pi/T$ составляет величину [12, § 67]

$$P_q = \frac{e^2\sin^2\theta}{2\pi c^3}\,\left|F_q^2\right| \qquad (16)$$

и обусловлена фурье-амплитудой

$$F_q = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\ddot{z}(t)\exp\left(\frac{2\pi iqt}{T}\right)\,dt \qquad (17)$$

продольного ускорения электрона

$$\ddot{z} = -\frac{Ze^2z}{m\,(p_h^2+z^2)^{3/2}}$$

(q — натуральное число).

Продольное движение электрона зеркально-симметрично относительно плоскости $z = 0$. Поэтому через половину периода частица попадает в противолежащую по координате z точку $-z$, где ускорение противоположно:

$$\ddot{z}(t+T/2) = -\ddot{z}(t).$$

В результате излучение из противолежащих плоскостей $z = z'$ и $z = -z'$ складывается противофазно в фурье-амплитудах четных гармоник ($q = 2k+2$) и взаимно компенсируется. Отличными от нуля остаются лишь фурье-амплитуды нечетных гармоник $q = 2k+1$, где k — целое неотрицательное число.

В силу той же зеркальной симметрии частица находится в противолежащих по z плоскостях также в моменты времени, которые равно отстоят от момента t_0 пересечения плоскости $z = 0$, так что

$$\ddot{z}(t_0+t') = -\ddot{z}(t_0-t').$$

Как следствие, расчет фурье-амплитуды (17) сводится к вычислению синус-преобразования ускорения $\ddot{z}$ по трассе от пересечения плоскости $z = 0$ до точки поворота (где электрон меняет направление движения вдоль магнитного поля):

$$|F_{2k+1}| = \left|\frac{4}{T}\int\limits_0^{T/4}\ddot{z}(t)\sin\left(\frac{2\pi\,(2k+1)\,t}{T}\right)\,dt\right|. \qquad (18)$$

В (18) время t отсчитывается от момента пересечения электроном плоскости $z = 0$ в направлении магнитного поля.

Чтобы упростить дальнейшие записи, введем безразмерные продольную координату

$$\zeta = z/r_{max} \qquad (19)$$

и удаленность ведущего центра циклотронного вращения

$$\eta = p_h/r_{max}, \qquad (20)$$

которые нормированы на максимальное возможное расстояние от ядра

$$r_{max} = \frac{2Ze^2}{m\,(v_\perp^2 - 2E/m)} = \frac{L_u}{(E/E_u)\,(\varepsilon_\perp - 1)} \qquad (21)$$

для электрона с заданными энергией E и поперечной скоростью $v_\perp$. Кинетическую энергию поперечного движения $mv_\perp^2/2$ нормируем на ее минимальное возможное значение E для связанного электрона:

$$\varepsilon_\perp = mv_\perp^2/2E \qquad (22)$$

(при $mv_\perp^2/2 < E$ продольная скорость электрона становится достаточно большой, чтобы частица преодолела кулоновское притяжение).

В фурье-амплитуде (18) перейдем от интегрирования по времени к интегрированию по продольной координате (19). Для этого используем приближенное сохранение «механической энергии» для одномерного продольного колебания:

$$m\dot{z}^2/2 + U(z) \approx \mathrm{const},$$

которое дает связь времени t с координатой (19):

$$t = \frac{2\tau(\zeta;\eta)}{\omega_s\,(\varepsilon_\perp - 1)^{3/2}} \propto \tau(\zeta;\eta).$$

Здесь безразмерное время

$$\tau(\zeta;\eta) = \int\limits_0^\zeta \frac{d\zeta'}{\sqrt{(\eta^2 + \zeta'^2)^{-1/2} - 1}}\,, \qquad (23)$$

а частота ω_s определена формулой (11).

Для последующего расчета излучательной способности ансамбля электронов излучение отдельной частицы будем описывать спектральной мощностью

$$P_\omega = \sum_{k=0}^{\infty} P_{2k+1}\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi\,(2k+1)}{T}\right), \qquad (24)$$

где дельта-функции отражают линейчатый спектр излучения.

Таким образом, получаем искомую спектральную мощность излучения связанного электрона с энергией $E > 0$ как функцию нормированной кинетической энергии поперечного движения (22) и безразмерной удаленности (20) его траектории, для чего используем определения (16), (18) и (24):

$$P_\omega(\varepsilon_\perp,\eta) = \\ = \frac{E^{5/2}\,(\varepsilon_\perp - 1)^{7/2}\sin^2\theta}{3\sqrt{2}\,\pi^2 Z\,(mc^2)^{3/2}\,\tau(\sqrt{1-\eta^2};\eta)} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1/2} \times \\ \times \left| \int\limits_0^{\sqrt{1-\eta^2}} d\zeta\,\frac{\zeta\sin\left[\pi\,(k+1/2)\,\tau(\zeta;\eta)/\tau(\sqrt{1-\eta^2};\eta)\right]}{(\eta^2+\zeta^2)^{3/2}\sqrt{(\eta^2+\zeta^2)^{-1/2}-1}} \right|^2 \times \\ \times\,\delta\left\{\varepsilon_\perp - 1 - \left[\frac{\omega\tau(\sqrt{1-\eta^2};\eta)}{\pi\,(k+1/2)\,\omega_B}\right]^{2/3}\frac{2^{-1/3}}{E/E_u}\right\}. \qquad (25)$$

Здесь функция $\tau(\zeta;\eta)$ задана формулой (23). Верхний предел интегрирования $\sqrt{1-\eta^2}$ по переменной ζ соответствует точке поворота, в которой расстояние r достигает максимального значения (21), так что $\eta^2 + \zeta^2 = 1$. Исходные дельта-функции из определения (24) преобразованы к эквивалентному виду, который явно выделяет кинетическую энергию $\varepsilon_\perp$ электрона, у которого частота $(2k+1)$-й гармоники излучения совпадает с частотой ω.

4. ИЗЛУЧЕНИЕ ИЗОТРОПНОГО АНСАМБЛЯ СВЯЗАННЫХ ЧАСТИЦ

Спектральная излучательная способность (в расчете на единичный объем среды) стационарного ансамбля связанных частиц равна свертке спектральной мощности (25) и функции распределения электронов $f(\mathbf{r},\mathbf{v})$ вблизи некоторого рассеивающего центра:

$$a_\omega = n_i \int\limits_G P_\omega f(\mathbf{r},\mathbf{v})\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}. \qquad (26)$$

Здесь n_i — концентрация ядер, радиус-вектор $\mathbf{r}$ отсчитывается от некоторого рассеивающего центра, $\mathbf{v}$ — скорость электрона, величина $f(\mathbf{r},\mathbf{v})\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}$ равна числу электронов в объеме $d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}$ около точки ($\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$) фазового пространства. Интегрирование в (26) проводится по области G переменных $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, которую занимают связанные траектории с положительной энергией (свободные траектории исключены).

Для получения конкретных аналитических выражений рассмотрим изотропную функцию распределения, которая зависит только от полной механической энергии электрона $mv^2/2 - Ze^2/r$. Представим указанное распределение в эквивалентном виде:

$$f\left(\frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{r}\right) = \int\limits_0^\infty f(E)\,\delta\left(E - \frac{mv^2}{2} + \frac{Ze^2}{r}\right)\,dE.$$

Такое представление позволяет записать излучательную способность (26) в виде интеграла по энергии:

$$a_\omega = n_i \int_0^\infty \mathcal{I}(\omega, E) f(E)\, dE, \qquad (27)$$

где весовой множитель

$$\mathcal{I}(\omega, E) = (2\pi)^2 \int_G v_\perp p_h P_\omega \times \\ \times \delta\left(E - \frac{mv^2}{2} + \frac{Ze^2}{r}\right) dz\, dv_\parallel\, dp_h\, dv_\perp \qquad (28)$$

пропорционален излучательной способности (26) для изотропного моноэнергетического распределения.

В определении (28) сначала интегрируем по продольной скорости $v_\parallel$ и сопряженной координате z, что с учетом дельта-функции по энергии дает фазовый объем, приходящийся на единичный интервал механической энергии продольных колебаний. Указанный объем пропорционален производной так называемой канонической переменной действия по энергии. В свою очередь, указанная производная пропорциональна периоду колебаний [13]. В результате функция (28) принимает вид

$$\mathcal{I}(\omega, E) = \frac{8\sqrt{2}\,\pi^2 Z^3 e^6}{m^{3/2} E^{5/2}} \int_1^{1+E_u/\alpha E} d\varepsilon_\perp \times \\ \times \int_{(\varepsilon_\perp - 1)(\alpha E/E_u)}^1 d\eta\, \frac{\eta P_\omega \tau(\sqrt{1-\eta^2}; \eta)}{(\varepsilon_\perp - 1)^{7/2}}. \qquad (29)$$

В (29) мы перешли к интегрированию по безразмерным переменным (20) и (22), через которые выражена спектральная мощность излучения (25).

Пределы интегрирования в (29) отражают область фазового пространства, где проходят связанные траектории с заданной энергией $E > 0$. Так, пределы по $\varepsilon_\perp$ соответствуют минимальному и максимальному возможным значениям кинетической энергии $mv_\perp^2/2$ поперечного движения. Минимальная величина $mv_\perp^2/2$ равна E, см. комментарий после определения (22). Максимальная величина $mv_\perp^2/2$ равна $E + Ze^2/\alpha L_u = E + E_u/\alpha$ и достижима на траектории, лежащей в плоскости $z = 0$ на минимальной допустимой удаленности $p_h = \alpha L_u$ от ядра (см. (6)). Здесь константа $\alpha \sim 1$ отражает то, что интервал расстояний (6) определен лишь по порядку величины.

Нижний предел интегрирования по η в (29) соответствует минимальной удаленности αL_u, допустимой для связанных траекторий (см. также определения (20) и (21)). Единичный верхний предел по η соответствует максимальной возможной удаленности от ядра (21) для связанного электрона с заданными величинами E и $\varepsilon_\perp$.

Подставляем в (29) спектральную мощность (25). При подстановке учитываем, что множители E, $\varepsilon_\perp - 1$ и $\tau(\sqrt{1-\eta^2}; \eta)$ входят в спектральную мощность излучения (25) и выражение (29) с противоположными показателями степени и взаимно сокращаются (что специфично для кулоновского потенциала). Параметры ω и E остаются только в аргументах дельта-функций из (25) и пределах интегрирования по $\varepsilon_\perp$ и η.

Далее меняем в (29) порядок интегрирования по $\varepsilon_\perp$ и η. Интегрирование по внешней переменной η проводится от нуля до максимального возможного единичного значения, а по внутренней переменной $\varepsilon_\perp$ — от минимального возможного для связанных траекторий единичного значения до

$$\varepsilon_{\perp up} = 1 + \eta\, (\alpha E/E_u)^{-1}. \qquad (30)$$

При бóльших значениях $\varepsilon_\perp$ и фиксированном параметре η удаленность траектории $p_h = \eta r_{max}$ становится меньше минимальной допустимой величины αL_u для связанных траекторий (см. определения (20) и (21)).

Такая перестановка переменных позволяет провести интегрирование по $\varepsilon_\perp$ в (29) с учетом дельта-функций, которые входят в определение (25) и связаны с линейчатым спектром излучения одного электрона. Интегрирование по $\varepsilon_\perp$ дает ненулевой (единичный) множитель в оставшемся подынтегральном выражении в (29) для фиксированного индекса k, если аргумент соответствующей дельта-функции из (25) положителен на верхнем пределе (30):

$$\frac{\eta}{\alpha E/E_u} - \left[\frac{\omega \tau(\sqrt{1-\eta^2}; \eta)}{\pi\,(k + 1/2)\,\omega_B}\right]^{2/3} \frac{2^{-1/3}}{E/E_u} > 0. \qquad (31)$$

Оба слагаемых в левой части неравенства (31) обратно пропорциональны энергии E в одинаковой степени (отчасти, это обусловлено тем, что минимальное расстояние αL_u существования связанных траекторий не зависит от E, см. (7)). В результате условие (31), а вместе с ним и функция (29) не зависят от значения E.

Последнее обстоятельство позволяет записать излучательную способность (27) с весовым множителем (29) в факторизованном виде:

$$a_\omega = \frac{8n_i Z^2 e^6 \sin^2\theta}{3\,(mc)^3}\,\mathcal{A}\left(\frac{\omega}{\omega_B}\right)\int\limits_0^\infty f(E)\,dE, \qquad (32)$$

где безразмерный частотный множитель

$$\mathcal{A}\left(\frac{\omega}{\omega_B}\right) = \int\limits_0^1 d\eta\,\eta \sum_{k=k_{min}}^{\infty} \frac{1}{k+1/2}\left|\int\limits_0^{\sqrt{1-\eta^2}} d\zeta \times\right.$$

$$\left.\times\,\frac{\zeta \sin\left[\pi\,(k+1/2)\,\tau(\zeta;\eta)/\tau(\sqrt{1-\eta^2};\eta)\right]}{(\eta^2+\zeta^2)^{3/2}\sqrt{(\eta^2+\zeta^2)^{-1/2}-1}}\right|^2, \qquad (33)$$

где

$$k_{min} = \mathrm{nint}\left[\frac{\omega}{\omega_B}\,\frac{\alpha^{3/2}\tau(\sqrt{1-\eta^2};\eta)}{\sqrt{2}\pi\eta^{3/2}}\right].$$

Функция $\mathrm{nint}(x)$ в записи этого предела обозначает ближайшее к x целое число.

Эквивалентное (31) условие

$$k > -\frac{1}{2} + \frac{\omega}{\omega_B}\,\frac{\alpha^{3/2}\tau(\sqrt{1-\eta^2};\eta)}{\sqrt{2}\,\pi\eta^{3/2}} \qquad (34)$$

задает нижний предел суммирования по индексу k_{min} в (33). Неравенство (34) отражает то обстоятельство, что для меньших значений k даже на траектории с минимальной допустимой удаленностью $p_h = \alpha L_u$ (где период продольного колебания минимален среди всех траекторий с фиксированным параметром (20)) $(2k+1)$-я гармоника частоты продольного колебания находится ниже требуемой частоты излучения ω.

На рассматриваемых частотах (15) нижний предел суммирования по индексу k_{min} в (33) можно считать нулевым при всех значениях переменной интегрирования η. В результате фактор (33) принимает постоянное численное значение:

$$\mathcal{A}(\omega \ll \omega_B) \approx 1.34.$$

Излучательная способность (32) изотропного ансамбля связанных электронов с положительной энергией имеет плоский частотный спектр:

$$a_\omega(\omega \ll \omega_B) \approx 3.57\,\frac{n_i Z^2 e^6 \sin^2\theta}{(mc)^3}\int\limits_0^\infty f(E)\,dE. \qquad (35)$$

5. ВЫСОКАЯ МОЩНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Согласно работе [14], один свободный электрон с энергией (4) и начальным питч-углом Θ между направлением его скорости и магнитным полем создает тормозное излучение с плоским частотным спектром

$$P_\omega = \frac{n_i Z^2 e^6 \sin^2\theta}{\pi\,(mc^2)^{3/2}\,\sqrt{2E}\,|\cos\Theta|} \qquad (36)$$

на низких частотах

$$\omega \ll \omega_s\,|\cos\Theta|^3, \qquad (37)$$

где излучение обусловлено дальними столкновениями с прицельными параметрами, существенно большими (2). В (37) верхняя граница по частоте имеет величину порядка (11), если $|\cos\Theta|$ не слишком мал.

На более высоких частотах

$$\omega_s\,|\cos\Theta|^3 \ll \omega \ll \omega_i \qquad (38)$$

спектральная мощность излучения свободного электрона обусловлена столкновениями из интервала прицельных параметров (9) и уменьшается пропорционально $\omega^{2/3}$:

$$P_\omega = 0.41\,\frac{n_i Z^2 e^6\,|\cos\Theta|\sin^2\theta}{\pi\,(mc^2)^{3/2}\,\sqrt{2E}}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^{-2/3}. \qquad (39)$$

Наконец, в диапазоне еще более высоких частот

$$\omega_i \ll \omega \ll \omega_B \qquad (40)$$

спектральная мощность определяется специфическими ближними столкновениями с прицельными параметрами порядка (7). В этих столкновениях движение электрона становится нерегулярным (стохастическим), и частица много раз возвращается к ядру, прежде чем уходит на бесконечность [15]. Многочисленные пролеты около ядра приводят к увеличению спектральной мощности излучения свободного электрона пропорционально $\omega^{4/3}$:

$$P_\omega = 4.8\,\frac{n_i Z^2 e^6\,|\cos\Theta|\sin^2\theta}{\pi\,(mc^2)^{3/2}\,\sqrt{2E}}\left(\frac{\omega}{\omega_B}\right)^{4/3}\times$$
$$\times \ln^{4/3}\left[\left(\frac{E_u}{2E}\right)^{1/2}\right]. \qquad (41)$$

Логарифмический фактор в (41) отражает то, что столкновения с многократными возвратами электрона к ядру ограничены максимальным прицельным параметром $p_h = \alpha L_u$, который логарифмически увеличивается с уменьшением отношения $2E/E_u$ [15]; энергия $E_u/2$ определена в (5).

Диапазоны (38) и (40) разделены частотой

$$\omega_i = \frac{0.3\omega_B\,(2E/E_u)^{1/2}}{\ln^{2/3}[(2E/E_u)^{-1/2}]}\,, \tag{42}$$

где сравниваются спектральные мощности излучения (39) и (41).

Излучательная способность ансамбля свободных электронов (в расчете на единичный объем среды) определяется сверткой, аналогичной (26):

$$a_\omega = \int P_\omega f(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}, \tag{43}$$

где интеграл $\int f(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}$ равен концентрации свободных электронов вдали от рассеивающего центра.

В случае изотропного распределения f излучательная способность (43) может быть приведена к виду (27), как для связанных частиц. Однако теперь функция $\mathcal{I}(\omega, E)$ в (27) задана интегрированием мощности излучения одного свободного электрона P_ω по всем возможным направлениям его начальной скорости:

$$\mathcal{I}(\omega, E) = \frac{2\pi\sqrt{2E}}{n_i m^{3/2}}\int_0^\pi P_\omega \sin\Theta\,d\Theta. \tag{44}$$

Подставляем в (44) мощность P_ω, определяемую формулами (36), (39) и (41):

$$\mathcal{I}(\omega, E) = \frac{Z^2e^6\sin^2\theta}{(mc)^3}\begin{cases} \dfrac{4}{3}\ln\left[\dfrac{\omega_s(E)}{\omega}\right], & \omega \ll \omega_s, \\ 0.81\left[\dfrac{\omega}{\omega_s(E)}\right]^{-2/3} \propto E, & \omega_s \ll \omega \ll \omega_i, \\ 9.6\left(\dfrac{\omega}{\omega_B}\right)^{4/3}\ln^{4/3}\left[\left(\dfrac{E_u}{2E}\right)^{1/2}\right], & \omega_i \ll \omega \ll \omega_B. \end{cases} \tag{45}$$

Спектральная мощность (36) зависит от питч-угла электрона как $1/|\cos\Theta|$, поэтому на низких частотах

$$\omega \ll \omega_s \tag{46}$$

функция (45) обусловлена электронами, у которых скорость направлена почти перпендикулярно магнитному полю. Однако для слишком медленных электронов с $|\cos\Theta| \ll (\omega/\omega_s)^{1/3}$ частота ω переходит из интервала (37) в (38), где спектральная мощность выходит на значение (39), пропорциональное $|\cos\Theta|$. Последнее обстоятельство устраняет расходимость интеграла (44) в окрестности $\Theta = \pi/2$ и дает логарифмический фактор $\ln(\omega_s/\omega)$ в (45) на частотах (46). На более высоких частотах (10) интегрирование по питч-углу в (44) не представляет сложности.

В свою очередь, согласно формуле (35), множитель $\mathcal{I}$ для связанных электронов с положительной энергией имеет постоянное значение

$$\mathcal{I} = 3.57\,\frac{Z^2e^6\sin^2\theta}{(mc)^3}$$

во всем диапазоне (15) и превышает соответствующий фактор (45) для свободных электронов на частотах (10) и длинах волн (12).

Пусть свободные и связанные электроны с положительной энергией имеют одинаковое распределение $f(E)$, как, например, в тепловом равновесии. В этом случае классическая (не квантовая) излучательная способность фракции всех электронов с $E > 0$ во все направления имеет вид

$$2\pi\int_0^\pi a_\omega \sin\theta\,d\theta \approx \frac{n_iZ^2e^6}{(mc)^3}\int_0^\infty f(E)\,dE \times$$

$$\times\begin{cases} \dfrac{32\pi}{9}\ln\left[\dfrac{\omega_s(E_c)}{\omega}\right], & \omega \ll \omega_s(E_c), \\ \dfrac{3.57\cdot 8\pi}{3}, & \omega_s(E_c) \ll \omega \ll \omega_B, \end{cases} \tag{47}$$

где E_c — характерная (средняя) энергия электронов с $E > 0$. На низких частотах (46) классическая излучательная способность (47) обусловлена тормозным излучением свободных частиц, а в диапазоне (10), (12) — связанными электронами с положительной энергией.

6. ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КЛАССИЧЕСКУЮ ИЗЛУЧАТЕЛЬНУЮ СПОСОБНОСТЬ ФРАКЦИИ ВСЕХ ЭЛЕКТРОНОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Излучательная способность по тормозному излучению в отсутствие магнитного поля [12, § 70] отличается от (47) лишь численным фактором:

$$4\pi a_\omega^{(B=0)} \approx \frac{n_i Z^2 e^6}{(mc)^3} \int_0^\infty f(E)\, dE \times \\ \times \begin{cases} \dfrac{64\pi}{3} \ln \left[\dfrac{\omega_s(E_c)}{\omega} \right], & \omega \ll \omega_s(E_c), \\ \dfrac{64\pi^2}{3\sqrt{3}}, & \omega_s(E_c) \ll \omega. \end{cases} \quad (48)$$

Действительно, согласно (47) и (48), наложение сильного магнитного поля, удовлетворяющего условию (3), уменьшает излучательную способность в 6 раз на низких частотах (46) и в $4.06 \approx 4$ раза на рассматриваемых частотах (10) и соответствующих им длинах волн (12).

Таким образом, в классическом приближении (которое пренебрегает квантовой дискретностью энергии связанных электронов с положительной энергией и дает непрерывный спектр их излучения при изотропном распределении) сильное магнитное поле сохраняет почти плоский частотный профиль излучательной способности фракции всех частиц с положительной энергией (4) ниже циклотронной частоты. По-видимому, это обстоятельство, обусловлено тем, что одинаковое изотропное распределение $f(E)$ реализуется как в отсутствие, так и при наличии магнитного поля. Магнитное поле делает движение электрона «одномерным», однако это свойство качественно не меняет величину кулоновского ускорения и характерное время пролета частицы около ядра — факторы, определяющие классический непрерывный спектр излучения ансамбля частиц.

Существенное влияние магнитного поля проявляется в сильной линейной поляризации излучения всех электронов с положительной энергией в отличие от их неполяризованного излучения в отсутствие магнитного поля.

7. КВАНТОВАЯ ДИСКРЕТНОСТЬ ЭНЕРГИИ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Классический подход пренебрегает квантовой дискретностью энергии квазиклассических связанных состояний с положительной энергией. В свою очередь, дискретность энергии может обеспечить линейчатый спектр излучения не только в случае одного электрона, но и в случае изотропного ансамбля связанных частиц. Для этого энергетическая ширина связанных уровней и доплеровское уширение линий должны быть малы по сравнению с характерным шагом по частоте между многочисленными спектральными линиями от разных состояний.

Высокая добротность связанных состояний с положительной энергией (4), локализованных в пространстве в области расстояний (6), была продемонстрирована в работах [16, рис. 3*a*], а также в [17–19] в случае более высоких энергий. Связанные состояния проявляют себя как узкие резонансные интервалы энергии, при попадании в которые свободный электрон практически полностью рассеивается назад при столкновении с ядром. Тогда как вне резонансных интервалов энергии свободный электрон пролетает около ядра без рассеяния.

Вместе с тем спектральные линии переходов между квазиклассическими связанными состояниями с $E > 0$, по-видимому, качественно не отличаются от переходов между аналогичными состояниями с $E < 0$. Действительно, в условиях приближенного разделения движений вдоль и поперек магнитного поля излучение на обсуждаемых частотах (10) и длинах волн (12) обусловлено продольным колебанием частицы в «одномерном» кулоновском потенциале. Это колебание одинаково для электронов с положительной и отрицательной энергией E, если частицы различаются лишь кинетической энергией $mv_\perp^2/2$ поперечного движения. Поэтому характерный шаг по частоте между спектральными линиями от разных квантовых состояний в рассматриваемом диапазоне частот (10) и длин волн (12) необходимо оценивать, принимая во внимание связанные электроны как с положительной, так и с отрицательной энергией.

Излучение на частоте ω создают электроны, которые пролетают около ядра за время (8) порядка ω^{-1}, что определяет характерную удаленность частиц от ядра

$$r_\omega = \left(\frac{Ze^2}{m\omega^2} \right)^{1/3}.$$

В свою очередь, кинетическая энергия $mv^2/2$ связанных частиц имеет величину порядка кулоновской энергии Ze^2/r_ω. Соответственно, обобщенный импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v} - e\mathbf{A}(\mathbf{r})/c$ (сопряженный координате $\mathbf{r}$) изменяется в характерном интервале

$$\Delta p_\omega = mv \sim \left(\frac{Ze^2 m}{r_\omega} \right)^{1/2}$$

около значения $-e\mathbf{A}(\mathbf{r})/c$. Таким образом, связанные электроны, эффективно излучающие на частоте ω, занимают фазовый объем

$$V_{ph} = (r_\omega\, \Delta p_\omega)^3 = Z^2 e^4 m/\omega. \quad (49)$$

Число связанных состояний, локализованных в фазовом объеме (49), определено условием квантования Бора–Зоммерфельда [20] и составляет величину

$$N_{tot} \sim \frac{V_{ph}}{\hbar^3} = \frac{Z^2 e^4 m}{\hbar^3 \omega} \, .$$

Каждый связанный электрон излучает на характерном числе $q_{max} \sim 1$ гармоник частоты продольного колебания. Тогда характерное число спектральных линий от разных квантовых состояний и переходов в полосе частот порядка ω составляет величину

$$N_{lin} = N_{tot} q_{max} = \frac{Z^2 e^4 m q_{max}}{\hbar^3 \omega} \, ,$$

а характерный частотный интервал между соседними спектральными линиями —

$$\Delta\omega_{qm} = \frac{\omega}{N_{lin}} = \frac{\hbar^3 \omega^2}{Z^2 e^4 m q_{max}} \, . \qquad (50)$$

Если какие-либо энергетические уровни вырождены (совпадают) или некоторые состояния не заселены в силу специфического распределения электронов, то число спектральных линий N_{lin} уменьшается, а частотный интервал (50) между ними расширяется. Такая тенденция способствует проявлению линейчатого спектра.

Тепловое движение рассеивающих центров приводит к доплеровскому уширению спектральных линий на величину порядка

$$\Delta\omega_D = \omega \, \frac{\sqrt{E_T/M}}{c} \sim \omega \, \frac{\sqrt{E_T/Z m_p}}{c} \, ,$$

где $M \sim Z m_p$ — масса ядра, а m_p — масса протона. Тепловые энергии E_T электронов и рассеивающих центров полагаем одинаковыми. Доплеровское уширение не приводит к перекрытию спектральных линий и образованию континуума при условии

$$\frac{\Delta\omega_D}{\Delta\omega_{qm}} = \frac{Z^2 e^4 m q_{max} \sqrt{E_T/Z m_p}}{\hbar^3 \omega c} \ll 1.$$

Последнее соотношение справедливо для обсуждаемого диапазона частот (10), если оно выполнено на его низкочастотной границе (11), что ограничивает тепловую энергию частиц неравенством

$$E_T \gg Z^{5/2} m c^2 q_{max} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \sqrt{\frac{m}{m_p}} \approx \approx 0.005 Z^{5/2} q_{max} \text{ эВ}. \qquad (51)$$

Требование (51) выполнено в фотосфере магнитного белого карлика, где $E_T \sim 0.5$–1.0 эВ. В этом случае связанные состояния электронов с положительной энергией не влияют на перенос излучения в континууме и приводят к появлению дополнительных линий поглощения в спектре излучения, выходящего из фотосферы. В свою очередь, излучательная способность вне линий (в континууме) обусловлена линейно поляризованным тормозным излучением свободных электронов и имеет вид (27) с весовым множителем (45).

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, наложение магнитного поля приводит к появлению связанного движения электрона с положительной энергией (4) в кулоновском поле неподвижного ядра. В диапазоне длин волн (12) классическая линейно поляризованная излучательная способность (35) связанных частиц (усредненная по спектральным линиям от разных квантовых состояний) существенно превышает излучательную способность (27), (45) по тормозному излучению свободных электронов с той же энергией. Вместе с тем мощность излучения связанных частиц с $E > 0$ во все направления лишь примерно в 4 раза меньше мощности тормозного излучения (48) в отсутствие магнитного поля.

Квантовая дискретность энергии квазиклассических связанных состояний приводит к тому, что в широком интервале тепловых энергий (51) излучение ансамбля связанных частиц с $E > 0$ сосредоточено в спектральных линиях, которые не перекрываются (в частности, в условиях фотосфер магнитных белых карликов). В результате этого обстоятельства перенос излучения в континууме обусловлен линейно поляризованным тормозным излучением свободных электронов, а связанные частицы с положительной энергией создают лишь дополнительные спектральные линии в поглощении или излучении.

Поляризация излучения как свободных, так и связанных электронов с положительной энергией совпадает с линейной поляризацией обыкновенной нормальной волны в плазме на частотах, меньших электронной циклотронной частоты. Следовательно, излучение необыкновенной поляризации слабее взаимодействует с электронами и может выходить из более глубоких слоев атмосферы магнитного белого карлика. В результате излучение этих звезд в инфракрасном диапазоне длин волн (12) может иметь более высокую температуру, чем в случае немагнитных звезд этого класса. Высокая линейная поляризация тормозного излучения в сильном магнитном поле способна определять наблюдаемую линейную поляризацию излучения магнитных белых карликов [6] на частотах, меньших электронной циклотронной частоты.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-02-00364) и программы «Происхождение, строение и эволюция объектов Вселенной» Президиума РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Rosner, G. Wunner, H. Herold, and H. Ruder, J. Phys. B **17**, 29 (1984).
2. S. Jordan, Astron. Astrophys. **265**, 570 (1992).
3. D. T. Wickramasinghe and L. Ferrario, Publ. Astron. Soc. Pacific. **112**, 873 (2000).
4. В. В. Железняков, *Излучение в астрофизической плазме*, Янус-К, Москва (1997), § 13.1.
5. В. В. Железняков, С. А. Корягин, А. В. Сербер, Письма в Астрон. ж. **25**, 513 (1999).
6. S. C. West, Astrophys. J. **345**, 511 (1989).
7. J. B. Delos, S. K. Knudson, and D. W. Noid, Phys. Rev. A. **30**, 1208 (1984).
8. С. А. Арсеньев, С. А. Корягин, Изв. вузов. Радиофизика **53**, 726 (2010).
9. M. Amoretti, C. Amsler, G. Bonomi et al., Nature **419**, 456 (2002).
10. G. Gabrielse, N. S. Bowden, P. Oxley et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 213401 (2002).
11. А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, Мир, Москва (1984), § 3.1.
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматлит, Москва (2003).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Физматлит, Москва (2004), ф. 49.8.
14. И. И. Бубукина, С. А. Корягин, ЖЭТФ **135**, 1056 (2009).
15. С. А. Корягин, ЖЭТФ **117**, 853 (2000).
16. С. А. Корягин, Изв. вузов, радиофизика **51**, 682 (2008).
17. H. Friedrich and M. Chu, Phys. Rev. A **28**, 1423 (1983).
18. M.-C. Chu and H. Friedrich, Phys. Rev. A **28**, 3651 (1983).
19. M.-C. Chu and H. Friedrich, Phys. Rev. A **29**, 675 (1984).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Физматлит, Москва (2002), § 48.