ЖЭТФ, 2012, том 141, вып. 6, стр. 1041–1048

К ТЕОРИИ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ МЕДЛЕННЫХ ЧАСТИЦ НА ДВУМЕРНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Б. Я. Балагуров [*]

Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 8 сентября 2011 г.

Предложена теория рассеяния частиц малой энергии E на двумерном потенциале произвольной величины. Для решения соответствующей задачи использовано разложение по системе собственных функций с нулевой энергией. Найдены явные выражения для амплитуды s-рассеяния и для уровней слабосвязанных s-состояний. Полученные общие формулы иллюстрируются точно решаемым примером.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение разнообразных физических явлений, связанных с поверхностями [1], привело к необходимости решения квантовомеханических задач в двух измерениях. Одной из них является задача об упругом рассеянии частиц на двумерном потенциале. Эта проблема с различных точек зрения рассматривалась в работах [2–6]. Фазовая теория упругого рассеяния частиц применительно к двумерному случаю предложена в работе [2]. Другие вопросы общего характера — наличие полюсов в амплитуде рассеяния, их связь с дискретными уровнями энергии, двумерный аналог теоремы Левинсона и т. д. — обсуждались в работах [3–6].

Задача о рассеянии медленных частиц на двумерном аксиально-симметричном потенциале рассматривалась в книге [7]. Приведенное в [7] выражение для амплитуды s-рассеяния f_0 дает функциональную зависимость величины f_0 от энергии при $kR \ll 1$ (R — радиус действия потенциала). В это выражение входит некоторая феноменологическая константа, которую следует определять, решая уравнение Шредингера при нулевой энергии. В работе [8] такая задача была решена для «слабого» потенциала с помощью теории возмущений, что позволило найти в этом приближении явное выражение для амплитуды s-рассеяния. Кроме того, для энергии слабосвязанного s-состояния в [8] была получена формула, уточняющая известную порядковую оценку [7]. В [9] результаты работы [8] обобщены на случай слабого двумерного потенциала, не обладающего аксиальной симметрией.

В настоящей работе феноменологическая константа, входящая в выражение для амплитуды s-рассеяния медленных частиц, найдена для аксиально-симметричного потенциала произвольной величины. Для решения уравнения Шредингера при $E = 0$ применен подход, основанный на квантовании амплитуды потенциала — см., например, [10], где этот метод достаточно подробно рассмотрен для одномерного случая. (Сходный, но более формальный подход был предложен в работах [11–13]. В то же время проблемы, затронутые в [10] и в настоящей работе, в [11–13] не рассматривались.) В данной работе сначала исследуются основные свойства двумерных собственных функций $\zeta_n(\rho)$ при нулевой энергии. Решение уравнения Шредингера при $E = 0$ ищется с помощью разложения волновой функции по системе $\{\zeta_n(\rho)\}$. В результате упомянутая выше феноменологическая константа (и, следовательно, амплитуда s-рассеяния f_0) выражается через характерные для данного потенциала параметры.

В работе найдены также явные выражения для уровней энергии E_n слабосвязанных s-состояний вместе с предэкспоненциальными множителями. В согласии с [3] оказывается, что, как и в трехмерном случае, амплитуда рассеяния f_0 имеет полюсы при $E = E_n$. Для проверки справедливости общих формул рассмотрен точно решаемый пример — двумерная квантовомеханическая система с «прямоугольным» потенциалом. В этом случае могут быть найдены как точные выражения для амплитуды рассе-

[*] E-mail:balagurov@deom.chph.ras.ru, byabalagurov@mail.ru

яния и уровней энергии связанных состояний, так и система собственных функций $\{\zeta_n(\rho)\}$. Показано, что для этого потенциала результаты, полученные в рамках двух разных подходов, совпадают.

2. СИСТЕМА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ $E = 0$

Рассмотрим двумерную квантовомеханическую систему — частицу в поле потенциала $U(\boldsymbol{\rho})$. Представим потенциальную энергию в виде $U(\boldsymbol{\rho}) = U^0 v(\boldsymbol{\rho})$, где U^0 — амплитуда потенциала, а безразмерная функция $v(\boldsymbol{\rho})$ задает его форму. Стационарное уравнение Шредингера для частицы с энергией E запишем в виде

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{\rho}) + \varepsilon\, \psi(\boldsymbol{\rho}) = \alpha\, v(\boldsymbol{\rho})\, \psi(\boldsymbol{\rho}), \tag{1}$$

где $\varepsilon = 2mE/\hbar^2$, $\alpha = 2mU^0/\hbar^2$. При стандартном подходе [7] в качестве объекта квантования выбирается энергия. Для потенциала притяжения ($\alpha < 0$) при этом определяются (если они есть) уровни энергии ε_ν связанных состояний. В этом случае полную систему образует совокупность волновых функций дискретного ($\varepsilon < 0$) и непрерывного ($\varepsilon > 0$) спектров.

Возможен, однако, альтернативный подход, когда квантуется амплитуда потенциала — см., например, [10], где рассмотрен одномерный случай. Соответствующие собственные функции $\varphi_\nu(\boldsymbol{\rho})$ регулярны и удовлетворяют уравнению

$$\nabla^2\varphi_\nu(\boldsymbol{\rho}) + \varepsilon\varphi_\nu(\boldsymbol{\rho}) = \alpha_\nu v(\boldsymbol{\rho})\varphi_\nu(\boldsymbol{\rho}), \tag{2}$$

где α_ν — собственные значения. Величины $\varphi_\nu(\boldsymbol{\rho})$ и α_ν зависят от энергии: $\varphi_\nu = \varphi_\nu(\varepsilon; \boldsymbol{\rho})$ и $\alpha_\nu = \alpha_\nu(\varepsilon)$, причем $\alpha_\nu < 0$ при $\varepsilon < 0$. Система функций $\{\varphi_\nu(\boldsymbol{\rho})\}$ ортонормирована согласно соотношению

$$\int \varphi_\mu(\boldsymbol{\rho})\, \varphi_\nu(\boldsymbol{\rho})\, v(\boldsymbol{\rho})\, d\boldsymbol{\rho} = \delta_{\mu\nu}, \tag{3}$$

где $\varphi_\mu(\boldsymbol{\rho})$ и $\varphi_\nu(\boldsymbol{\rho})$ относятся к одной и той же энергии.

Для потенциала притяжения ($\alpha < 0$) уровни энергии связанных состояний $\varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu(\alpha)$ определяются из уравнения

$$\alpha_\nu(\varepsilon) = \alpha. \tag{4}$$

Волновая функция $\psi_\nu(\boldsymbol{\rho})$, отвечающая уровню энергии ε_ν, выражается через $\varphi_\nu(\boldsymbol{\rho})$ при $\varepsilon = \varepsilon_\nu$ (см. [10]). Предполагается, что система $\{\varphi_\nu(\boldsymbol{\rho})\}$ образует полный набор, так что выполняется соотношение полноты в виде

$$v(\boldsymbol{\rho}) \sum_\nu \varphi_\nu(\boldsymbol{\rho})\, \varphi_\nu(\boldsymbol{\rho}') = \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'), \tag{5}$$

где функции $\varphi_\nu(\boldsymbol{\rho})$ и $\varphi_\nu(\boldsymbol{\rho}')$ относятся к одной и той же энергии.

Рассмотрим более подробно свойства собственных функций s-состояний в аксиально-симметричном потенциале $v(\boldsymbol{\rho}) = v(\rho)$ при нулевой энергии. Не зависящие от угла функции $\zeta_n(\rho) = \varphi_n(0; \rho)$ регулярны и удовлетворяют уравнению

$$\zeta_n''(\rho) + \frac{1}{\rho}\, \zeta_n'(\rho) = \lambda_n\, v(\rho)\, \zeta_n(\rho), \tag{6}$$

где $\lambda_n = \alpha_n(0) \leqslant 0$ — соответствующие собственные значения. На функции $\zeta_n(\rho)$ наложим условие $\rho\, \zeta_n'(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$. В этом случае функции $\zeta_n(\rho)$ и $\zeta_m(\rho)$ будут ортогональны с весом $v(\rho)$, если $\lambda_n \neq \lambda_m$. Поэтому соотношение ортонормированности системы $\{\zeta_n(\rho)\}$ в отсутствие вырождения имеет вид, аналогичный (3):

$$\int_0^\infty \zeta_n(\rho)\, \zeta_m(\rho)\, v(\rho)\, \rho\, d\rho = \delta_{nm}. \tag{7}$$

При $\rho \gg R$, где R — радиус действия потенциала (см. формулу (10)), в уравнении (6) можно пренебречь правой частью. Решением получившегося уравнения, удовлетворяющим условию $\rho\, \zeta_n'(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$, является $\zeta_n(\rho) = \mathrm{const}$, так что

$$\lim_{\rho\to\infty} \zeta_n(\rho) = \zeta_n(\infty) \neq 0. \tag{8}$$

Собственные значения λ_n определяют критические значения амплитуды потенциала $U_n^0 = (\hbar^2/2m)\lambda_n$, при которых по мере углубления ямы возникают новые уровни с нулевой энергией связи. В двумерном случае связанное состояние существует в сколь угодно слабом потенциале притяжения. Поэтому одно из собственных значений (припишем ему номер $n = 0$) при $\varepsilon = 0$ равно нулю. Соответствующая собственная функция сводится к постоянной величине: $\zeta_0(\rho) = \zeta_0 = \mathrm{const}$, так что

$$n = 0\colon \quad \lambda_0 = 0, \quad \zeta_0 = \frac{\sqrt{2}}{R}. \tag{9}$$

Здесь R определяется как

$$R^2 = 2\int_0^\infty v(\rho)\, \rho\, d\rho. \tag{10}$$

Остальные собственные значения отличны от нуля и, как отмечалось выше, отрицательны.

Умножим обе стороны уравнения (6) на $\rho\, d\rho$ и проинтегрируем от 0 до ∞. В результате, с учетом условия $\rho\,\zeta_n'(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$, получим

$$n \neq 0: \quad \int_0^\infty \zeta_n(\rho)\, v(\rho)\, \rho\, d\rho = 0. \qquad (11)$$

Это равенство, согласно соотношению (7), является также следствием ортогональности собственных функций ζ_0 и $\zeta_n(\rho)$ при $n \neq 0$.

Введем функцию Грина

$$G_0(\rho, \rho') = \theta(\rho - \rho') \ln \rho + \theta(\rho' - \rho) \ln \rho', \qquad (12)$$

удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 G_0(\rho,\rho')}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial G_0(\rho,\rho')}{\partial \rho} = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho}. \qquad (13)$$

В формуле (12), как обычно, $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$. Функция Грина (12) симметрична по своим аргументам: $G_0(\rho,\rho') = G_0(\rho',\rho)$. С помощью функции $G_0(\rho,\rho')$ дифференциальное уравнение (6) обычным образом приводится к интегральной форме:

$$\zeta_n(\rho) = \zeta_n(\infty) + \lambda_n \int_0^\infty G_0(\rho,\rho')\, \zeta_n(\rho')\, v(\rho')\, \rho'\, d\rho'. \qquad (14)$$

Как и в случае $\varepsilon \neq 0$, предполагаем, что система собственных функций $\{\zeta_n(\rho)\}$ полна. Это позволяет провести разложение произвольной функции $f(\rho)$ по этой системе:

$$f(\rho) = \sum_n C_n \zeta_n(\rho) = C_0 \zeta_0 + \sum_{n>0} C_n \zeta_n(\rho), \qquad (15)$$

$$C_n = \int_0^\infty f(\rho)\, \zeta_n(\rho)\, v(\rho)\, \rho\, d\rho, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (16)$$

Умножим уравнение (6) при $n \neq 0$ на $\lambda_n^{-1} f(\rho)\, \rho\, d\rho$ и проинтегрируем от 0 до ∞. В результате после двукратного интегрирования по частям получим

$$n \neq 0: \quad C_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\infty \big[\zeta_n(\rho) - \zeta_n(\infty)\big] \times \\ \times \big[\rho\, f''(\rho) + f'(\rho)\big]\, d\rho. \qquad (17)$$

При выводе (17) считалось, что проинтегрированные выражения равны нулю, что может накладывать определенные ограничения на поведение функции $f(\rho)$ при $\rho \to 0$ и $\rho \to \infty$.

Для функции $f(\rho) = G_0(\rho,\rho')$ согласно (13) имеем

$$\rho\, f''(\rho) + f'(\rho) = \delta(\rho - \rho'),$$

так что

$$n \neq 0: \quad C_n = \frac{1}{\lambda_n}\big[\zeta_n(\rho') - \zeta_n(\infty)\big]. \qquad (18)$$

Поэтому для функции Грина получаем следующее разложение:

$$G_0(\rho,\rho') = \zeta_0^2 \int_0^\infty G_0(\rho',t)\, v(t)\, t\, dt + \\ + \sum_{n>0} \frac{\zeta_n(\rho') - \zeta_n(\infty)}{\lambda_n}\, \zeta_n(\rho). \qquad (19)$$

Поскольку $G_0(\rho,\rho') \to \ln\rho$ при $\rho' \to \rho$, из (19) находим

$$\ln\rho = \zeta_0^2 \int_0^\infty G_0(\rho,t)\, v(t)\, t\, dt + \\ + \sum_{n>0} \frac{\big[\zeta_n(\rho) - \zeta_n(\infty)\big]\, \zeta_n(\rho)}{\lambda_n}. \qquad (20)$$

Умножим (20) на $v(\rho)\, \rho\, d\rho$ и проинтегрируем по всем ρ. В результате с учетом (7) и (11) получим «правило сумм»

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n} = -\frac{L}{\zeta_0^2} = -\frac{R^2}{2}\, L, \qquad (21)$$

где

$$L = \frac{4}{R^4} \int_0^\infty \left[\int_0^\rho \ln\frac{\rho}{t}\, v(t)\, t\, dt\right] v(\rho)\, \rho\, d\rho \qquad (22)$$

— безразмерная константа ($L \sim 1$). При выводе (21) использовано соотношение

$$\zeta_0^4 \int_0^\infty \left[\int_0^\infty G_0(\rho,t)\, v(t)\, t\, dt\right] v(\rho)\, \rho\, d\rho = \\ = L + \zeta_0^2 \int_0^\infty \ln t\, v(t)\, t\, dt \qquad (23)$$

с L из (22).

Для функции

$$f(\rho) = \int_0^\infty G_0(\rho,t)\, v(t)\, t\, dt \qquad (24)$$

имеем

$$\rho f''(\rho) + f'(\rho) = v(\rho)\rho,$$

так что $C_n = -\lambda_n^{-1}\zeta_n(\infty)/\zeta_0^2$ при $n \neq 0$. Поэтому в этом случае получаем следующее разложение:

$$\int_0^\infty G_0(\rho,t)\,v(t)\,t\,dt = \zeta_0^2 \int_0^\infty \left[\int_0^\infty G_0(s,t)\,v(t)\,t\,dt\right] \times \\ \times v(s)\,s\,ds - \zeta_0^{-2}\sum_{n>0}\frac{\zeta_n(\infty)}{\lambda_n}\,\zeta_n(\rho). \quad (25)$$

При $\rho = 0$ из (25) с учетом равенства (23) следует еще одно «правило сумм»

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\zeta_n(0)\zeta_n(\infty)}{\lambda_n} = L \quad (26)$$

с L из (22). Соотношения (21) и (26) могут использоваться для проверки правильности вычисления величин λ_n и $\zeta_n(\rho)$.

3. АМПЛИТУДА s-РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим рассеяние плоской волны e^{ikx} на двумерном аксиально-симметричном потенциале. Соответствующая волновая функция $\psi(\boldsymbol{\rho})$ подчиняется уравнению (1) с $\varepsilon = k^2$ и $v(\boldsymbol{\rho}) = v(\rho)$. Для медленных частиц ($kR \ll 1$) существенно только s-рассеяние [7]. В этом случае в области расстояний $\rho \gg R$, когда в уравнении (1) можно пренебречь правой частью, волновая функция имеет вид (см. задачу № 7 к § 132 книги [7])

$$\psi = e^{ikx} + f_0\sqrt{\frac{\pi k}{2}}\,iH_0^{(1)}(k\rho), \quad (27)$$

где f_0 — искомая амплитуда s-рассеяния, $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля. При малых z для $H_0^{(1)}(z)$ имеем

$$z \to 0: \quad H_0^{(1)}(z) \approx \frac{2i}{\pi}\ln\frac{\gamma z}{2i}, \quad (28)$$

где $\ln\gamma = C = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера, так что при $k\rho \ll 1$ волновая функция (27) имеет вид

$$R \ll \rho \ll 1/k: \quad \psi \approx \left(1 + f_0\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\ln\frac{2i}{\gamma k}\right) - \\ - f_0\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\ln\rho. \quad (29)$$

С другой стороны, при $k\rho \ll 1$ в уравнении Шредингера может быть опущен член, содержащий энергию, так что в рассматриваемом случае s-рассеяния оно принимает вид

$$k\rho \ll 1: \quad \psi''(\rho) + \frac{1}{\rho}\psi'(\rho) = \alpha\,v(\rho)\,\psi(\rho). \quad (30)$$

При $\rho \gg R$ в уравнении (30) также можно пренебречь правой частью, так что для $\psi(\rho)$ будем иметь следующее выражение:

$$R \ll \rho \ll 1/k: \quad \psi(\rho) \approx A\left(1 + B\ln\rho\right), \quad (31)$$

где константа B не зависит от энергии.

Формулы (29) и (31) справедливы в одном и том же диапазоне расстояний и должны поэтому «сшиваться». Из этого условия находим следующее выражение для амплитуды s-рассеяния:

$$f_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\left[\ln\frac{2i}{\gamma k} + \frac{1}{B}\right]^{-1}. \quad (32)$$

Формула (32), аналогичная полученной в [7] (задача № 7 к § 132), дает функциональную зависимость амплитуды рассеяния от энергии при $kR \ll 1$. Входящая в (32) константа B зависит от вида потенциала и должна определяться из решения уравнения (30). Соответствующая функция $\psi(\rho)$ должна быть регулярной при $\rho = 0$ и иметь асимптотику

$$\rho \to \infty: \quad \psi(\rho) = 1 + B\ln\rho. \quad (33)$$

В формуле (33) несущественная для дальнейшего константа A из (31) положена равной единице. В случае «слабого» ($|\alpha|R^2 \ll 1$) потенциала сформулированная задача была решена в работе [8] с помощью теории возмущений. Покажем, что константа B может быть определена и при произвольной амплитуде потенциала.

С помощью функции Грина (12) приведем дифференциальное уравнение (30) к интегральной форме:

$$\psi(\rho) = 1 + \alpha\int_0^\infty G_0(\rho,t)\,\psi(t)\,v(t)\,t\,dt. \quad (34)$$

Отсюда при $\rho \to \infty$ следует формальное выражение для константы B:

$$B = \alpha\int_0^\infty \psi(\rho)\,v(\rho)\,\rho\,d\rho. \quad (35)$$

Уравнение (34) решаем разложением функции $\psi(\rho)$ по системе $\{\zeta_n(\rho)\}$, введенной в предыдущем разделе:

$$\psi(\rho) = \sum_{n=0}^\infty C_n\,\zeta_n(\rho). \quad (36)$$

В этом случае из (35) с учетом (11) получаем

$$B = \frac{\alpha}{\zeta_0}\,C_0, \quad (37)$$

так что для определения величины B достаточно найти коэффициент C_0 из разложения (36).

Подстановка (36) в уравнение (34) дает следующее соотношение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \zeta_n(\rho) = 1 + \alpha\, C_0 \zeta_0 \int_0^{\infty} G_0(\rho,t)\, v(t)\, t\, dt + \\ + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\zeta_n(\rho) - \zeta_n(\infty)}{\lambda_n}. \quad (38)$$

Здесь использовано уравнение для собственных функций (14). Умножим (38) на $\zeta_0\, v(\rho)\, \rho\, d\rho$ и проинтегрируем от 0 до ∞. В результате получим равенство

$$C_0 = \frac{1}{\zeta_0} + \frac{\alpha}{\zeta_0^2}(\ln R + I)\, C_0 - \frac{\alpha}{\zeta_0} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\zeta_n(\infty)}{\lambda_n}, \quad (39)$$

где I — введенная в работе [8] безразмерная константа

$$I = \frac{2}{R^2} \int_0^{\infty} \ln \frac{\rho}{R}\, v(\rho)\, \rho\, d\rho + \\ + \frac{4}{R^4} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\rho} \ln \frac{\rho}{t}\, v(t)\, t\, dt \right] v(\rho)\, \rho\, d\rho. \quad (40)$$

При выводе (39) учтены соотношения (11) и (22), (23).

Аналогичным образом, умножив (38) на $\zeta_m(\rho)\, v(\rho)\, \rho\, d\rho$, после интегрирования по всем ρ выразим коэффициент C_m при $m \neq 0$ через C_0. Таким образом,

$$n \neq 0: \quad C_n = -\frac{\alpha}{\zeta_0} \frac{\zeta_n(\infty)}{\lambda_n - \alpha}\, C_0. \quad (41)$$

При выводе (41) использованы соотношения (7) и (11). Кроме того, возникающий здесь интеграл ($n \neq 0$)

$$M_n = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} G_0(\rho,t)\, v(t)\, t\, dt \right] \zeta_n(\rho)\, v(\rho)\, \rho\, d\rho$$

преобразуется следующим образом. После замены порядка интегрирования величина M_n с учетом уравнения (14) принимает вид

$$M_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\infty} \left[\zeta_n(t) - \zeta_n(\infty)\right] v(t)\, t\, dt,$$

так что $M_n = -\lambda_n^{-1}\, \zeta_n(\infty)/\zeta_0^2$.

Подстановка (41) в (39) позволяет найти явное выражение для коэффициента C_0 и с помощью соотношения (37) величину B. В результате амплитуда s-рассеяния (32) принимает окончательный вид

$$f_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{2k}} \left(\ln \frac{2i}{\gamma k R} + g \right)^{-1}, \quad (42)$$

где

$$g = \frac{2}{\alpha R^2} - I - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\zeta_n(\infty)\right]^2}{\lambda_n(\lambda_n - \alpha)}. \quad (43)$$

Входящие в (43) параметры имеют следующие порядки величин: $I \sim 1$, $\zeta_n(\infty) \sim \zeta_0 \sim 1/R$, $\lambda_n \sim 1/R^2$.

Для слабого ($|\alpha| R^2 \ll 1$) потенциала последнее слагаемое в (43) мало́ по сравнению с единицей, так что из (42), (43) для амплитуды f_0 следует выражение

$$f_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{2k}} \left(\ln \frac{2i}{\gamma k R} + \frac{2}{\alpha R^2} - I \right)^{-1}, \quad (44)$$

полученное в работе [8].

Действуя, как и в [8], убеждаемся, что энергии слабосвязанных s-состояний $\varepsilon = -\varkappa^2$ в потенциале притяжения ($\alpha < 0$) даются полюсами амплитуды (42) при $k \to i\varkappa$:

$$\ln \frac{\gamma \varkappa R}{2} = -\frac{2}{|\alpha| R^2} - I + |\alpha| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\zeta_n(\infty)\right]^2}{\lambda_n\left(\lambda_n + |\alpha|\right)}. \quad (45)$$

При $|\alpha| R^2 \ll 1$ из (45) следует выражение для уровня энергии в слабом потенциале [8]:

$$\varepsilon_0 = -\frac{4}{\gamma_0^2 R^2} \exp\left\{ -\frac{4}{|\alpha| R^2} \right\}, \quad \ln \gamma_0 = \ln \gamma + I \quad (46)$$

или в обычных единицах

$$E_0 = -\frac{2}{\gamma_0^2} \frac{\hbar^2}{m R^2} \exp\left\{ -\frac{\hbar^2}{m} \left| \int_0^{\infty} U(\rho)\, \rho\, d\rho \right|^{-1} \right\}, \quad (47)$$

что отличается от порядковой оценки, приведенной в [7] (см. задачу № 2 к § 45), предэкспоненциальным множителем $2/\gamma_0^2$ с γ_0 из (46).

При $\alpha \to \lambda_n$ ($|\alpha| > |\lambda_n|$) для энергии ε_n соответствующего слабосвязанного состояния из формулы (45) находим

$$\varepsilon_n = -\frac{4}{\gamma_n^2 R^2} \exp\left\{ -2 \frac{\left[\zeta_n(\infty)\right]^2}{|\alpha| - |\lambda_n|} \right\}, \quad (48)$$

где

$$\ln\gamma_n = \ln\gamma + I - \frac{2}{\lambda_n R^2} - \frac{\left[\zeta_n(\infty)\right]^2}{\lambda_n} + \\ + \lambda_n \sum_{m\neq n}^{\infty} \frac{\left[\zeta_m(\infty)\right]^2}{\lambda_m\left(\lambda_m-\lambda_n\right)}. \quad (49)$$

Таким образом, все слабосвязанные s-состояния имеют экспоненциально малую энергию.

4. «ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ» ПОТЕНЦИАЛ

1. Задачи об упругом рассеянии и уровнях энергии связанных состояний в двумерном случае имеют точные решения для потенциала

$$v(\rho) = \theta(R-\rho), \quad (50)$$

где функция $\theta(x)$ та же, что и в (12). Кроме того, для этого потенциала может быть определена система собственных функций $\{\zeta_n(\rho)\}$ с соответствующими собственными значениями λ_n. Это обстоятельство позволяет провести детальную проверку общих формул, полученных в предыдущих разделах.

Для амплитуды s-рассеяния в случае потенциала, задаваемого формулой (50), имеем следующее точное выражение:

$$f_0 = i\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\times \\ \times\frac{\beta J_0'(\beta R)\,J_0(kR) - k\,J_0(\beta R)\,J_0'(kR)}{\beta J_0'(\beta R)\,H_0^{(1)}(kR) - k\,J_0(\beta R)\,H_0^{(1)'}(kR)}, \quad (51) \\ \beta = \sqrt{k^2-\alpha}.$$

Здесь $J_0(z)$ — функция Бесселя. При малых энергиях, т. е. при $kR \ll 1$ и $k^2 \ll |\alpha|$, из (51) следует

$$f_0 \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\left[\ln\frac{2i}{\gamma kR} + \frac{1}{\mu R}\,\frac{J_0(\mu R)}{J_0'(\mu R)}\right]^{-1}, \quad (52) \\ \mu = \sqrt{-\alpha}.$$

Для слабого потенциала $|\alpha|R^2 \ll 1$ из (52) с учетом разложения

$$z\to 0\colon\quad \frac{1}{z}\,\frac{J_0(z)}{J_0'(z)} = -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{4} + \ldots \quad (53)$$

находим выражение

$$f_0 \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\left[\ln\frac{2i}{\gamma kR} + \frac{2}{\alpha R^2} + \frac{1}{4}\right]^{-1}, \quad (54)$$

полученное в работе [8]. Вычисление констант L и I из (24) и (40) с потенциалом (50) дает

$$L = 1/4, \quad I = -1/4, \quad (55)$$

так что (54) следует в этом случае и из общей формулы (44).

Уровни энергии $\varepsilon = -\varkappa^2$ в потенциале притяжения ($\alpha < 0$) даются полюсами амплитуды рассеяния при $k = i\varkappa$. Так, для слабого потенциала из (54) для ε_0 следует выражение (46), в котором

$$\ln\gamma_0 = \ln\gamma - {}^1\!/_4. \quad (56)$$

Для произвольного по величине потенциала энергии ε_n слабосвязанных s-состояний определяются из уравнения

$$\ln\frac{\gamma\varkappa R}{2} = \frac{1}{\mu R}\,\frac{J_0(\mu R)}{J_0'(\mu R)} \quad (57)$$

с μ из (52). Правая часть равенства (57) обращается в бесконечность при $\alpha = \lambda_n$ с λ_n из (65). При $\alpha \to \lambda_n$ ($|\alpha| > |\lambda_n|$) для энергии ε_n из уравнения (57) следует выражение (48) с $\left[\zeta_n(\infty)\right]^2 = 2/R^2$ (ср. с (63)) и

$$\ln\gamma_n = \ln\gamma - \frac{1}{2z_n^2}. \quad (58)$$

Здесь использовано выражение для λ_n из формулы (65).

Для потенциала (50) величина B может быть найдена непосредственно. Регулярное при $\rho = 0$ решение уравнения (30) в этом случае имеет вид

$$\rho \leqslant R\colon\quad \psi^{(i)}(\rho) = A\,J_0(\mu\rho), \quad \mu = \sqrt{-\alpha}, \\ \rho \geqslant R\colon\quad \psi^{(e)}(\rho) = 1 + B\,\ln\rho. \quad (59)$$

Из условия непрерывности функции $\psi(\rho)$ и ее производной $\psi'(\rho)$ при $\rho = R$ находим

$$\frac{1}{B} = -\ln R + \frac{1}{\mu R}\,\frac{J_0(\mu R)}{J_0'(\mu R)}. \quad (60)$$

Подстановка (60) в общую формулу (32) приводит к выражению (52).

2. Для собственных функций ζ_0 и $\zeta_n(\rho)$ при $n \neq 0$ в данном случае имеем

$$\zeta_0 = \frac{\sqrt{2}}{R}, \quad \lambda_0 = 0; \quad (61)$$

$$\rho \leqslant R\colon\quad \zeta_n^{(i)}(\rho) = A_n\,J_0(\mu_n\rho), \\ A_n = \frac{\sqrt{2}}{R\,J_0(\mu_n R)}; \quad (62)$$

$$\rho \geqslant R: \quad \zeta_n^{(e)}(\rho) = \zeta_n(\infty) = \frac{\sqrt{2}}{R}. \tag{63}$$

Из граничных при $\rho = R$ условий непрерывности функции $\zeta_n(\rho)$ и ее производной $\zeta_n'(\rho)$ следует

$$J_0'(\mu_n R) = 0, \tag{64}$$

так что

$$\mu_n = \frac{z_n}{R}, \quad \lambda_n = -\frac{z_n^2}{R^2}, \tag{65}$$

где $z_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ — положительные корни уравнения $J_0'(z) = -J_1(z) = 0$.

Подставим в (43) выражения для $\zeta_n(\infty)$ из (63), для λ_n из (65) и для I из (55). В результате, с учетом равенства $z_{-n} = -z_n$ для корней уравнения $J_0'(z) = 0$, получим

$$g = -\frac{2}{a^2} + \frac{1}{4} + a\,S, \tag{66}$$

$$S = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{z_n^2\,(z_n - a)}, \quad a = \mu R \tag{67}$$

с μ из формулы (52). Суммирование в (67) ведется от $n = -\infty$ до $n = +\infty$ за исключением $n = 0$.

Рассмотрим интеграл

$$T = -\int\limits_C \frac{1}{z^2\,(z-a)}\,\frac{J_0(z)}{J_0'(z)}\,\frac{dz}{2\pi i}, \tag{68}$$

взятый по контуру, представляющему собой окружность радиуса $\mathcal{R} \to \infty$ с центром в точке $z = 0$. С одной стороны, такой интеграл в пределе $\mathcal{R} \to \infty$ обращается в нуль, с другой стороны, он равен сумме вычетов в полюсах подынтегрального выражения. В силу уравнения для функции Бесселя

$$J_0''(z) + z^{-1} J_0'(z) + J_0(z) = 0$$

имеем $J_0''(z_n) = -J_0(z_n)$, так как $J_0'(z_n) = 0$. Поэтому совокупность вычетов в нулях функции $J_0'(z)$ (кроме $z = 0$) дает сумму S из (68). Из равенства $T = 0$ следует, что величина S равна сумме взятых с обратным знаком вычетов в простом полюсе $z = a$ и полюсе третьего порядка $z = 0$. Вычислив эти вычеты, найдем

$$S = \frac{1}{a^2}\,\frac{J_0(a)}{J_0'(a)} + \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{a^2}\right), \tag{69}$$

так что для константы g из (66) получаем выражение, согласующееся с (52) и (60). Аналогичным образом можно убедиться, что из общей формулы (49) следует выражение (58), а правила сумм (21) и (26) выполняются с константой L из (55).

Соотношение полноты для системы функций $\{\zeta_n(\rho)\}$ имеет вид

$$v(\rho)\sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n(\rho)\zeta_n(\rho') = \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}, \tag{70}$$

так что для прямоугольного потенциала получаем $(\rho \leqslant R,\, \rho' \leqslant R)$

$$\frac{2}{R^2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n\rho)\,J_0(\mu_n\rho')}{\left[J_0(\mu_n R)\right]^2}\right\} = \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}. \tag{71}$$

Равенство (71) фактически совпадает с соответствующим соотношением полноты для частного случая разложения Дини [14, 15], рассмотренного в Приложении, — см. формулу (A.16) при $x = \rho/R$ и $x' = \rho'/R$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обозначим через $\xi_n\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$ положительные корни уравнения

$$\xi\,J_\nu'(\xi) + a\,J_\nu(\xi) = 0, \quad \nu \geqslant -1/2, \tag{A.1}$$

где $J_\nu(\xi)$ — функция Бесселя порядка ν, a — некоторое действительное число $(a + \nu > 0)$. В этом случае для произвольной функции $f(x)$ вещественной переменной x имеет место разложение Дини [14, 15]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n\,J_\nu(\xi_n x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{A.2}$$

где

$$D_n = \frac{2\xi_n^2}{\Delta_n}\int\limits_0^1 f(x')J_\nu(\xi_n x')\,x'\,dx', \tag{A.3}$$

$$\Delta_n = \xi_n^2\left[J_\nu'(\xi_n)\right]^2 + (\xi_n^2 - \nu^2)\left[J_\nu(\xi_n)\right]^2. \tag{A.4}$$

Для сходимости ряда (A.2) к самой функции $f(x)$ необходимо выполнение равенства

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2\,\frac{J_\nu(\xi_n x)\,J_\nu(\xi_n x')}{\Delta_n} = \frac{\delta(x-x')}{x}, \tag{A.5}$$

являющегося соотношением полноты для системы функций

$$\varphi_n(x) = \xi_n\sqrt{\frac{2}{\Delta_n}}\,J_\nu(\xi_n x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{A.6}$$

определенных в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Разложение Дини (A.1)–(A.4) справедливо при $a + \nu > 0$. Как отмечено в работе [15], частный случай $a + \nu = 0$ следует рассматривать отдельно. Дело в том, что при $a + \nu \to +0$ уравнение (A.1) имеет корень $\xi_0 \to +0$. Действительно, используя разложение для функции Бесселя

$$\xi \ll 1: \quad J_\nu(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\xi}{2}\right)^\nu \times \\ \times \left\{1 - \frac{1}{\nu+1}\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 + \ldots\right\}, \quad \text{(A.7)}$$

из уравнения (A.1) находим

$$\xi_0^2 \approx 2(\nu+1)(a+\nu) \to 0. \quad \text{(A.8)}$$

Поэтому с учетом (A.7) имеем

$$\xi_0 \to 0: \quad \Delta_0 \approx \left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\xi_0}{2}\right)^\nu\right]^2 \frac{\xi_0^2}{\nu+1}, \quad \text{(A.9)}$$

так что в согласии с [15] для первого слагаемого из (A.2) получаем

$$\xi_0 \to 0: \quad D_0 J_\nu(\xi_0 x) \to 2(\nu+1)\, x^\nu \times \\ \times \int\limits_0^1 f(t)\, t^{\nu+1}\, dt. \quad \text{(A.10)}$$

Таким образом, в частном случае $a = 0$ и $\nu = 0$ разложение Дини принимает вид

$$f(x) = C_0 Z_0 + \sum_{n=1}^\infty C_n Z_n(x), \quad \text{(A.11)}$$

где

$$Z_0 = \sqrt{2}, \quad Z_n(x) = \sqrt{2}\,\frac{J_0(z_n x)}{J_0(z_n)} \quad \text{(A.12)}$$

и

$$C_n = \int\limits_0^1 f(x)\, Z_n(x)\, x\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(A.13)}$$

В формулах (A.12), (A.13) z_n — положительные корни уравнения

$$J_0'(z) = 0. \quad \text{(A.14)}$$

Из (A.5) в данном случае следует соотношение полноты в виде

$$Z_0^2 + \sum_{n=1}^\infty Z_n(x) Z_n(x') = \frac{\delta(x-x')}{x} \quad \text{(A.15)}$$

или

$$2\left\{1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{J_0(z_n x)\, J_0(z_n x')}{[J_0(z_n)]^2}\right\} = \frac{\delta(x-x')}{x}. \quad \text{(A.16)}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Ando, A. B. Fowler, and F. Stern, Rev. Mod. Phys. **54**, 437 (1982).
2. F. Stern and W. E. Howard, Phys. Rev. **163**, 816 (1967).
3. М. Е. Портной, Письма в ЖТФ **14**, 1252 (1988).
4. M. E. Portnoi and I. Galbraith, Sol. St. Comm. **103**, 325 (1997).
5. Q.-G. Lin, Phys. Rev. A **56**, 1938 (1997).
6. M. E. Portnoi and I. Galbraith, Phys. Rev. B **58**, 3963 (1998).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
8. Б. Я. Балагуров, ЯФ **73**, 122 (2010).
9. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **138**, 399 (2010).
10. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **126**, 986 (2004).
11. S. Weinberg, Phys. Rev. **131**, 440 (1963).
12. И. М. Народецкий, ЯФ **9**, 1086 (1969).
13. С. И. Манаенков, ТМФ **12**, 397 (1972).
14. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, Наука, Москва (1974), § 7.10.
15. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, ч. I, Изд-во иностр. лит., Москва (1949), гл. XVIII.