ЖЭТФ, 2011, том 140, вып. 5 (11), стр. 976–983

К ТЕОРИИ ПРОВОДИМОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТОВ. ЛИНЕЙНОЕ ПО КОНЦЕНТРАЦИИ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Б. Я. Балагуров[*]

Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 марта 2011 г.

Предложен общий метод вычисления проводимости анизотропных композитов с малой концентрацией включений произвольной формы. Линейный по концентрации вклад в тензор эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ выражен через дипольную поляризуемость включения, определенную в некоторой преобразованной системе, в которой включение окружено изотропной матрицей. Переход к этой системе осуществляется с помощью преобразования симметрии, оставляющего неизменными уравнения постоянного тока.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение электрофизических свойств неоднородных сред (в том числе проводимости композитов) является одной из приоритетных задач теории протекания [1, 2]. При этом основное внимание уделяется исследованию макроскопически изотропных систем. В то же время в ряде случаев среда может обладать сильной анизотропией. Примерами могут служить нитевидные кристаллы типа TCNQ или слоистые типа графита. Сильная анизотропия приводит к существенному отличию свойств таких композитов от изотропного случая уже при малых концентрациях включений. Вообще же наличие дополнительных параметров задачи, связанных с наличием анизотропии, приводит к бóльшему разнообразию (по сравнению с изотропным случаем) свойств анизотропных композитов. По этим причинам исследование анизотропных неоднородных сред представляет значительный интерес как с прикладной, так и с общефизической точек зрения.

Посвященный изучению проводимости анизотропных композитов ряд теоретических работ [3–6] носит в основном качественный характер. В этих работах были выявлены некоторые особенности (по сравнению с изотропным случаем) поведения эффективной проводимости таких систем. В то же время в работах [3–6] фактически отсутствует количественный подход к рассмотрению различных электрофизических свойств анизотропных композитов. В предыдущей публикации [7] такой подход был реализован в виде последовательной теории возмущений для проводимости слабонеоднородных сред с анизотропией произвольной величины.

В настоящей работе рассмотрена проводимость анизотропных композитов с малой концентрацией включений произвольной формы. Предложен метод, дающий принципиальную возможность находить точное выражение для тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ в линейном по концентрации приближении. Для этого проводится одновременное преобразование координат, плотности тока и напряженности электрического поля, сохраняющее уравнения постоянного тока. При таком преобразовании исходно анизотропная матрица, окружающая включение, становится изотропной. Это позволяет поставить и решить задачу о тензоре дипольной поляризуемости $\hat{\tilde{\Lambda}}$ включения в преобразованной системе. После этого аналогично изотропному случаю [8] линейный по концентрации вклад в $\hat{\sigma}_e$ может быть выражен через тензор $\hat{\tilde{\Lambda}}$. Отличие от изотропного случая состоит в том, что в результате упомянутого преобразования меняется как форма включения, так и его проводимость.

Отметим, что выражение эффективной проводимости через дипольную поляризуемость особенно удобно для диэлектрических и идеально прово-

[*]E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru, byabalagurov@mail.ru

дящих включений, когда для нахождения тензора $\hat{\hat{\Lambda}}$ можно ограничиться решением *внешней* задачи. Это же относится и к «бестелесным» (с нулевым объемом) включениям типа трещин или царапин в двумерном случае.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассмотрим анизотропную неоднородную среду (композит), состоящую из матрицы с тензором проводимости $\hat{\sigma}_1$ и одинаковых включений с тензором проводимости $\hat{\sigma}_2$. Считаем, что направления главных осей тензоров $\hat{\sigma}_1$ и $\hat{\sigma}_2$ совпадают и образуют декартову систему координат (x, y, z):

$$\hat{\sigma}_i = \begin{pmatrix} \sigma_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{iz} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $i = 1, 2$. Для вычисления тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ такой среды необходимо решить систему уравнений постоянного тока

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0; \quad \mathbf{j} = \hat{\sigma}(\mathbf{r})\,\mathbf{E}. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ — плотность тока, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ — напряженность электрического поля, $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ принимает значения $\hat{\sigma}_1$ в матрице и $\hat{\sigma}_2$ внутри включений. Систему (2) следует решать при заданном среднем по объему образца V значении напряженности $\langle \mathbf{E} \rangle$, где

$$\langle (\cdots) \rangle = \frac{1}{V} \int\limits_V (\cdots)\, dV \qquad (3)$$

при $V \to \infty$. Тензор эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ определяется из соотношения

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \hat{\sigma}_e \langle \mathbf{E} \rangle\,. \qquad (4)$$

Для вычисления тензора $\hat{\sigma}_e$ системы с малой концентрацией включений воспользуемся приемом, изложенным в книге [9]. Усреднение выражения $\mathbf{j} - \hat{\sigma}_1 \mathbf{E}$ по объему V приводит к соотношению

$$(\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_1)\langle \mathbf{E} \rangle = -N(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2) \int\limits_v \mathbf{E}\, dV, \qquad (5)$$

где N — размерная концентрация включений (число включений на единицу объема), а интеграл берется по объему v отдельного включения. В общем случае этот интеграл необходимо усреднить по всем включениям, которые могут быть, например, хаотически ориентированы.

Таким образом, для определения величины $\hat{\sigma}_e$ методом, изложенным в книге [9], необходимо знать напряженность электрического поля $\mathbf{E}^{(2)}$ внутри включения (точнее, интеграл от $\mathbf{E}^{(2)}$ по его объему), находящегося во внешнем однородном поле. Задача по определению $\mathbf{E}^{(2)}$ в такой постановке аналитически может быть решена только для эллипсоида. В то же время, как отмечено, например, в работе [8], в изотропном случае интеграл от $\mathbf{E}^{(2)}$ по объему включения может быть выражен через его дипольный момент.

Действительно, рассмотрим аналогичную задачу для макроскопического тела с диэлектрической проницаемостью ε, расположенного в вакууме и помещенного во внешнее однородное электрическое поле напряженности $\mathbf{E}_0$. Дипольный момент $\mathbf{p}$ равен интегралу по объему этого тела v от вектора поляризации $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{p} = \int\limits_v \mathbf{P}\, dV = \frac{1}{4\pi} \int\limits_v (\mathbf{D} - \mathbf{E})\, dV = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \int\limits_v \mathbf{E}\, dV, \qquad (6)$$

где $\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции. В свою очередь, дипольный момент выражается через $\mathbf{E}_0$ следующим образом:

$$\mathbf{p} = \hat{\Lambda}\,\mathbf{E}_0, \quad \hat{\Lambda} = v\,\hat{\alpha}, \qquad (7)$$

где $\hat{\Lambda}$ — тензор дипольной поляризуемости тела, имеющий размерность объема, $\hat{\alpha}$ — соответствующий безразмерный тензор.

Для задачи о проводимости искомое соотношение следует из (6) при замене $\varepsilon \to \sigma_2/\sigma_1$, так что из формул (5)–(7) в изотропном случае получаем

$$(\sigma_e - \sigma_1)\langle \mathbf{E} \rangle = 4\pi N \sigma_1 \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0. \qquad (8)$$

В линейном по концентрации приближении следует положить $\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}_0$. Поэтому для достаточно симметричных включений, тензор $\hat{\Lambda}$ которых сводится к скаляру Λ, из уравнения (8) находим [8]

$$\sigma_e = \sigma_1 (1 + 4\pi N \Lambda) = \sigma_1 (1 + 4\pi c \alpha). \qquad (9)$$

Здесь $c = vN$ — безразмерная концентрация включений (доля занимаемого ими объема).

Если же $\hat{\Lambda}$ не сводится к скаляру, а включения хаотически ориентированы, то тензор $\hat{\Lambda}$ нужно усреднить по углам, так что вместо (9) будем иметь

$$\sigma_e = \sigma_1 \left\{ 1 + \frac{4\pi}{3} N \operatorname{Sp} \hat{\Lambda} \right\} = \sigma_1 \left\{ 1 + \frac{4\pi}{3}\, c \operatorname{Sp} \hat{\alpha} \right\}, \qquad (10)$$

где Sp — след (шпур) соответствующего тензора. Наконец, если такие включения одинаково ориентированы, то такая среда и при изотропной матрице становится макроскопически анизотропной. Проводимость такого структурно анизотропного композита характеризуется эффективным тензором проводимости $\hat{\sigma}_e$. В линейном по концентрации приближении главные значения $\hat{\sigma}_e$ имеют вид

$$\sigma_{e\nu} = \sigma_1(1 + 4\pi\, N\,\Lambda_\nu) = \sigma_1(1 + 4\pi\, c\,\alpha_\nu), \qquad (11)$$

где Λ_ν и α_ν — соответствующие главные значения тензоров $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\alpha}$.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ

Как показано в работе [10] на примере двумерной системы, подход предыдущего раздела может быть обобщен и на анизотропный случай. Суть примененного в работе [10] приема состоит в использовании некоторого преобразования симметрии, оставляющего инвариантными уравнения постоянного тока. При этом преобразовании исходно анизотропная матрица, окружающая включение, становится изотропной. Это позволяет, в свою очередь, поставить и решить задачу вычисления тензора дипольной поляризуемости $\hat{\widetilde{\Lambda}}$ преобразованного включения, у которого меняется как форма, так и проводимость. После чего эффективная проводимость исходного анизотропного композита выражается через тензор $\hat{\widetilde{\Lambda}}$.

В исходной анизотропной системе электрический потенциал $\varphi^{(1)}$ вне включений подчиняется уравнению

$$\sigma_{1x}\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial x^2} + \sigma_{1y}\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial y^2} + \sigma_{1z}\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial z^2} = 0. \qquad (12)$$

Проведем преобразование координат, плотности тока и напряженности электрического поля следующим образом:

$$x = \lambda_x\,\widetilde{x}, \quad y = \lambda_y\,\widetilde{y}, \quad z = \lambda_z\,\widetilde{z}, \qquad (13)$$

$$j_x = \lambda_x\,\widetilde{j}_{\widetilde{x}}, \quad j_y = \lambda_y\,\widetilde{j}_{\widetilde{y}}, \quad j_z = \lambda_z\,\widetilde{j}_{\widetilde{z}}, \qquad (14)$$

$$E_x = \frac{1}{\lambda_x}\,\widetilde{E}_{\widetilde{x}}, \quad E_y = \frac{1}{\lambda_y}\,\widetilde{E}_{\widetilde{y}}, \quad E_z = \frac{1}{\lambda_z}\,\widetilde{E}_{\widetilde{z}}. \qquad (15)$$

В качестве коэффициентов преобразования (13)–(15) выбираем

$$\lambda_\nu = \sqrt{\frac{\sigma_{1\nu}}{\sigma_0}} \quad (\nu = x, y, z), \qquad (16)$$

где σ_0 — вспомогательная величина размерности проводимости.

В преобразованной системе уравнения (2) сохраняют свой вид, а матрица становится изотропной с законом Ома

$$\widetilde{\mathbf{j}}^{(1)} = \sigma_0\,\widetilde{\mathbf{E}}^{(1)}. \qquad (17)$$

Соответственно потенциал $\widetilde{\varphi}^{(1)}$ вне включений удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}^{(1)}}{\partial\widetilde{x}^{\,2}} + \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}^{(1)}}{\partial\widetilde{y}^{\,2}} + \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}^{(1)}}{\partial\widetilde{z}^{\,2}} = 0. \qquad (18)$$

Проводимость же самого включения остается анизотропной с составляющими тензора $\hat{\widetilde{\sigma}}_2$:

$$\widetilde{\sigma}_{2\nu} = \sigma_0\,\frac{\sigma_{2\nu}}{\sigma_{1\nu}} \quad (\nu = x, y, z). \qquad (19)$$

При этом, как уже отмечалось, меняется и форма включения.

Для макроскопического тела с анизотропной диэлектрической проницаемостью $\hat{\varepsilon}$ также может быть определен дипольный момент:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_v (\mathbf{D} - \mathbf{E})\,dV = \frac{\hat{\varepsilon} - \hat{1}}{4\pi}\int\limits_v \mathbf{E}\,dV, \qquad (20)$$

откуда

$$\int\limits_v \mathbf{E}\,dV = 4\pi(\hat{\varepsilon} - \hat{1})^{-1}\mathbf{p} = 4\pi(\hat{\varepsilon} - \hat{1})^{-1}\hat{\Lambda}\,\mathbf{E}_0. \qquad (21)$$

Поэтому для преобразованной системы с учетом замены $\hat{\varepsilon} \to \hat{\widetilde{\sigma}}_2/\sigma_0$ будем иметь

$$\int\limits_{\widetilde{v}} \widetilde{\mathbf{E}}\,d\widetilde{V} = 4\pi\left(\frac{\hat{\widetilde{\sigma}}_2}{\sigma_0} - \hat{1}\right)^{-1}\hat{\widetilde{\Lambda}}\,\widetilde{\mathbf{E}}_0. \qquad (22)$$

Выражение (22) следует, вообще говоря, усреднить по всем включениям. Считаем, что у усредненного таким образом тензора $\hat{\widetilde{\Lambda}}$ главные оси совпадают с осями декартовой системы координат. В этом случае

$$\int\limits_{\widetilde{v}} \widetilde{E}_\nu\,d\widetilde{V} = 4\pi\,\frac{\sigma_0}{\widetilde{\sigma}_{2\nu} - \sigma_0}\,\widetilde{\Lambda}_\nu\,\widetilde{E}_{0\nu}. \qquad (23)$$

Так как

$$\int\limits_v E_\nu\,dV = \frac{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}{\lambda_\nu}\int\limits_{\widetilde{v}} \widetilde{E}_\nu\,d\widetilde{V}, \qquad (24)$$

то отсюда с учетом (15), (19) и (23) следует

$$\int\limits_v E_\nu\,dV = 4\pi\lambda_x\lambda_y\lambda_z\,\frac{\sigma_{1\nu}}{\sigma_{2\nu} - \sigma_{1\nu}}\,\widetilde{\Lambda}_\nu\,E_{0\nu}. \qquad (25)$$

Положив $\hat{\widetilde{\Lambda}} = \widetilde{v}\,\hat{\widetilde{\alpha}}$, приведем равенство (25) к виду

$$\int\limits_v E_\nu\,dV = 4\pi\,\frac{\sigma_{1\nu}}{\sigma_{2\nu} - \sigma_{1\nu}}\,v\,\widetilde{\alpha}_\nu\,E_{0\nu}, \qquad (26)$$

где $v = \lambda_x \lambda_y \lambda_z \, \widetilde{v}$.

Для составляющих тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ из (5) (при $\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}_0$) и (25), (26) находим окончательно

$$\sigma_{e\nu} = \sigma_{1\nu}(1 + 4\pi \, \widetilde{N} \, \widetilde{\Lambda}_\nu), \tag{27}$$

или

$$\sigma_{e\nu} = \sigma_{1\nu}(1 + 4\pi \, c \, \widetilde{\alpha}_\nu). \tag{28}$$

Здесь $\widetilde{N} = \lambda_x \lambda_y \lambda_z \, N$ — размерная концентрация включений в преобразованной системе, а $c = vN = \widetilde{v} \, \widetilde{N}$ — безразмерная концентрация включений, очевидным образом не меняющаяся при преобразовании координат (13).

4. «СЛАБОНЕОДНОРОДНОЕ» ВКЛЮЧЕНИЕ

Для сравнения со случаем слабонеоднородной анизотропной среды [7] рассмотрим включение, проводимость которого мало отличается от проводимости матрицы: $|\sigma_{2\nu} - \sigma_{1\nu}| \ll \sigma_{1\nu}$. При этом анизотропия такой системы может быть сколь угодно велика.

Предварительно решим задачу о поляризуемости «слабонеоднородного» включения с тензором проводимости $\hat{\sigma}_2$, находящегося в изотропной матрице проводимости σ_0 ($|\sigma_{2\nu} - \sigma_0| \ll \sigma_0$). Положим

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_0 \mathbf{r} + \delta\varphi(\mathbf{r}), \quad \hat{\sigma}(\mathbf{r}) = \sigma_0 \hat{1} + \delta\hat{\sigma}(\mathbf{r}), \tag{29}$$

где $\delta\hat{\sigma}(\mathbf{r}) = \hat{\sigma}_2 - \sigma_0 \hat{1}$ внутри включения и $\delta\hat{\sigma}(\mathbf{r}) = 0$ вне его. Уравнение для потенциала $\delta\varphi(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\sigma_0 \nabla^2 \delta\varphi(\mathbf{r}) = \nabla \{\delta\hat{\sigma}(\mathbf{r}) \mathbf{E}_0\} - \nabla \{\delta\hat{\sigma}(\mathbf{r}) \, \nabla \delta\varphi(\mathbf{r})\}. \tag{30}$$

С помощью функции Грина уравнения Лапласа

$$\nabla^2_{\mathbf{r}} \, g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \quad g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi \, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{31}$$

перейдем от дифференциального уравнения (30) к интегральному, которое после интегрирования по частям примет вид

$$\delta\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma_0} \nabla_{\mathbf{r}} \int g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta\hat{\sigma}(\mathbf{r}') \mathbf{E}_0 \, d\mathbf{r}' - \\ - \frac{1}{\sigma_0} \nabla_{\mathbf{r}} \int g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta\hat{\sigma}(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \delta\varphi(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}'. \tag{32}$$

Решая уравнение (32) методом итераций (разложением по степеням $\delta\hat{\sigma}$) и находя асимптотику потенциала $\delta\varphi(\mathbf{r})$, получим следующее разложение для тензора $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}^{(1)} + \hat{\Lambda}^{(2)} + \cdots$:

$$\Lambda^{(1)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \int \delta\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}, \tag{33}$$

$$\Lambda^{(2)}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi\sigma_0^2} \int d\mathbf{r} \delta\sigma_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}) \times \\ \times \int d\mathbf{r}' \frac{\partial^2 g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} \, \delta\sigma_{\delta\beta}(\mathbf{r}'), \ldots \tag{34}$$

Предыдущее рассмотрение фактически относилось к преобразованной системе, так что соответствующие величины будем снабжать далее значком «тильда». Условие применимости полученных разложений $|\widetilde{\sigma}_{2\nu} - \sigma_0| \ll \sigma_0$ отвечает, согласно (19), слабой неоднородности исходного включения: $|\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu}| \ll \sigma_{1\nu}$.

Из (33) для линейного по $\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu}$ вклада в безразмерную поляризуемость преобразованного включения получаем

$$\widetilde{\alpha}^{(1)}_\nu = -\frac{1}{4\pi} \frac{\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu}}{\sigma_{1\nu}}. \tag{35}$$

При выводе (35) учтено, что $\delta\widetilde{\sigma}_\nu(\mathbf{r}) = \delta\widetilde{\sigma}_\nu \theta(\mathbf{r})$, где $\delta\widetilde{\sigma}_\nu = \widetilde{\sigma}_{2\nu} - \sigma_0 = -\sigma_0 \, (\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu})/\sigma_{1\nu}$, а $\theta(\mathbf{r}) = 1$ внутри включения и $\theta(\mathbf{r}) = 0$ вне его.

В квадратичном приближении из формулы (34) следует

$$\widetilde{\Lambda}^{(2)}_\nu = -\frac{1}{4\pi\sigma_0^2} \, (\delta\widetilde{\sigma}_\nu)^2 \int d\widetilde{\mathbf{r}} \, \theta(\widetilde{\mathbf{r}}) \times \\ \times \int d\widetilde{\mathbf{r}}\,' \, \theta(\widetilde{\mathbf{r}}\,') \, \frac{\partial^2 g(\widetilde{\mathbf{r}} - \widetilde{\mathbf{r}}\,')}{\partial \, \widetilde{x}_\nu{}^2}. \tag{36}$$

Возвращаясь в (36) к исходным координатам согласно (13), введем новую функцию Грина по соотношению

$$g(\widetilde{\mathbf{r}} - \widetilde{\mathbf{r}}\,') = \sigma_0 \, \lambda_x \lambda_y \lambda_z \, G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{37}$$

так что

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \times \\ \times \frac{(\sigma_{1x} \, \sigma_{1y} \, \sigma_{1z})^{-1/2}}{\left[\dfrac{(x - x')^2}{\sigma_{1x}} + \dfrac{(y - y')^2}{\sigma_{1y}} + \dfrac{(z - z')^2}{\sigma_{1z}} \right]^{1/2}}. \tag{38}$$

Функция $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\hat{\sigma}_1\right)_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{39}$$

В исходных координатах (36) принимает вид

$$\widetilde{\Lambda}^{(2)}_\nu = -\frac{\sigma_{1\nu}}{4\pi} \left(\frac{\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu}}{\sigma_{1\nu}} \right)^2 (\lambda_x \lambda_y \lambda_z)^{-1} \, I_\nu, \tag{40}$$

$$I_\nu = \int d\mathbf{r}' \, \theta(\mathbf{r}') \int d\mathbf{r}'' \, \theta(\mathbf{r}'') \, \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')}{\partial \, x_\nu{}'^{\,2}}. \tag{41}$$

Положим в (41) $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' + \mathbf{r}$, так что

$$I_\nu = \int K(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 G(\mathbf{r})}{\partial x_\nu{}^2}\, d\mathbf{r}, \qquad (42)$$

где

$$K(\mathbf{r}) = \int \theta(\mathbf{r}')\, \theta(\mathbf{r}' + \mathbf{r})\, d\mathbf{r}'. \qquad (43)$$

Переходя в (42) к фурье-представлениям функций $K(\mathbf{r})$ и $G(\mathbf{r})$, получим

$$I_\nu = \int K(-\mathbf{k}) \frac{k_\nu^2}{(\mathbf{k}\,\hat{\sigma}_1 \mathbf{k})} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \qquad (44)$$

Фурье-представление для $G(\mathbf{r})$ находится из уравнения (39).

Считаем, что усредненная по всему ансамблю включений корреляционная функция (43) зависит от модуля радиуса-вектора $r = |\mathbf{r}|$. (Аналогичное предположение об изотропии соответствующей корреляционной функции для слабонеоднородной среды сделано в [7].) В этом случае от модуля $k = |\mathbf{k}|$ зависит и фурье-образ $K(\mathbf{k}) = K(k)$. Это позволяет отделить в уравнении (44) интегрирование по углам:

$$I_\nu = Q_\nu \int K(k) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \qquad (45)$$

$$Q_\nu = \int \frac{m_\nu^2}{(\mathbf{m}\,\hat{\sigma}_1 \mathbf{m})} \frac{do_{\mathbf{m}}}{4\pi}, \qquad (46)$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{k}/k$. Интеграл в (45) равен $K(\mathbf{r})$ при $\mathbf{r} = 0$, причем $K(\mathbf{r} = 0) = v$. Величина Q_ν вычислялась в работе [7], так что с учетом соответствующих результатов получаем

$$I_\nu = v\, \frac{n^{(\nu)}}{\sigma_{1\nu}} \quad (\nu = x, y, z). \qquad (47)$$

Здесь $n^{(\nu)}$ — коэффициенты деполяризации эллипсоида с полуосями

$$a_\nu = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{1\nu}}} \quad (\nu = x, y, z). \qquad (48)$$

Из формул (40) и (47) находим окончательно

$$\widetilde{\alpha}^{(2)} = -\frac{n^{(\nu)}}{4\pi} \left(\frac{\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu}}{\sigma_{1\nu}} \right)^2. \qquad (49)$$

Подстановка уравнений (35) и (49) в (28) дает

$$\sigma_{e\nu} = \sigma_{1\nu} \left\{ 1 - c\, \frac{\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu}}{\sigma_{1\nu}} - \right. \left. - c n^{(\nu)} \left(\frac{\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu}}{\sigma_{1\nu}} \right)^2 \right\}. \qquad (50)$$

Формула (50) совпадает с соответствующим выражением из [7] для эффективной проводимости слабонеоднородной анизотропной среды в линейном по концентрации c и квадратичном по параметру $(\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu})/\sigma_{1\nu}$ приближениях.

5. ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

Для трехмерных тел, проводимость которых заметно отличается от проводимости матрицы, определение тензора поляризуемости представляет известные трудности. Эта задача может решаться, как правило, только численными методами. Исключение составляют тела эллипсоидальной формы и, как частный случай, — сферической.

Задача об эллипсоиде во внешнем однородном электрическом поле имеет аналитическое решение и в анизотропном случае, см. Приложение. При этом определяется и тензор поляризуемости преобразованного включения и напряженность электрического поля внутри исходного эллипсоида. Это позволяет вычислять тензор эффективной проводимости как с помощью общих формул (27), (28), так и исходя из соотношения (5).

Используя выражения (А.25) и (А.26) из Приложения, для композита с малой концентрацией включений эллипсоидальной формы с полуосями a_ν найдем

$$\sigma_{e\nu} = \sigma_{1\nu} \left\{ 1 - c\, \frac{\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu}}{\sigma_{1\nu} - (\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu})\, \widetilde{n}^{(\nu)}} \right\}. \qquad (51)$$

Здесь $\widetilde{n}^{(\nu)}$ — коэффициенты деполяризации эллипсоида с полуосями $\widetilde{a}_\nu = a_\nu/\sqrt{\sigma_{1\nu}}$. Выражение для $\sigma_{e\nu}$ вида (51) в случае сферических включений было получено в работе [5]. Там же достаточно подробно были рассмотрены различные предельные случаи — нитевидные и слоистые кристаллы с диэлектрическими или идеально проводящими включениями сферической формы. Ограничимся поэтому только несколькими замечаниями.

В случае непроводящих (d) включений ($\hat{\sigma}_2 = 0$) из формул (51) находим

$$\sigma_{e\nu}^{(d)} = \sigma_{1\nu} \left\{ 1 - \frac{c}{1 - \widetilde{n}^{(\nu)}} \right\}. \qquad (52)$$

Для изотропной среды с диэлектрическими включениями сферической формы ($n^{(\nu)} = 1/3$) радиуса R из (52) следует известное выражение

$$\sigma_e^{(d)} = \sigma_1 \left(1 - \frac{3}{2} c \right) \qquad (53)$$

или

$$\sigma_e^{(d)} = \sigma_1 (1 - 2\pi R^3 N). \qquad (54)$$

Для круговой пластинки радиуса a и толщины $\delta \to 0$ в направлении оси z из (А.22) имеем

$$n^{(z)} \approx 1 - \frac{\pi}{2} \frac{\delta}{a}, \qquad (55)$$

так что в этом случае

$$\sigma_{ez}^{(d)} = \sigma_1 \left(1 - \frac{8}{3} a^3 N\right). \tag{56}$$

Сравнение (54) с (56) показывает, что бесконечно тонкая непроницаемая пластинка радиуса $a = R$ вносит в сопротивление изотропной среды вклад, сравнимый с вкладом сферического диэлектрического включения того же радиуса. Причина в том, что при течении тока поперек пластинки около нее образуется «застойная» область размером порядка a, которая играет роль объемного непроводящего включения.

Рассмотрим нитевидный ($\sigma_{1x} = \sigma_{1y} < \sigma_{1z}$) кристалл с сильной анизотропией $\gamma = \sqrt{\sigma_{1z}/\sigma_{1x}} \gg 1$. При $\widetilde{a}_x/\widetilde{a}_z = \gamma\ a_x/a_z \gg 1$ из (A.22) следует

$$\widetilde{n}^{(z)} \approx 1 - \frac{\pi}{2} \frac{a_z}{a_x} \gamma^{-1}, \tag{57}$$

так что из формул (52) и (57) при $a_x = a_z = R$ получаем выражение

$$\sigma_{ez} \approx \sigma_{1z} \left(1 - \frac{8}{3} \gamma R^3 N\right) \tag{58}$$

для сферы радиуса R и при $a_x = a$, $a_z \to 0$

$$\sigma_{ez} \approx \sigma_{1z} \left(1 - \frac{8}{3} \gamma\, a^3 N\right) \tag{59}$$

для пластинки радиуса a.

Таким образом, в сильно анизотропном нитевидном кристалле сфера и расположенная поперек оси z круговая пластинка (диск) одинакового радиуса R вносят один и тот же вклад в сопротивление. Как отмечалось в работе [5], в этом случае застойная область, имеющая в поперечнике размер порядка R, вытянута вдоль оси z на расстояние порядка $\gamma\, R$. По этой причине она вносит в сопротивление в $\gamma \gg 1$ раз бо́льший вклад, чем в изотропном случае. При этом форма включения в «тени» застойной области несущественна, так как размер этой области в обоих направлениях определяется максимальным поперечным сечением включения.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ

В изотропном случае задача об эллипсоиде во внешнем однородном электрическом поле решается с помощью эллипсоидальных координат [9]. Приведем решение аналогичной задачи для анизотропного случая.

Рассматриваем включение эллипсоидальной формы (с тензором проводимости $\hat{\sigma}^{(i)}$), находящееся в анизотропной матрице (с тензором проводимости $\hat{\sigma}^{(e)}$) и помещенное во внешнее однородное электрическое поле напряженности $\mathbf{E}_0$. Считаем, что главные оси как эллипсоида, так и тензоров $\hat{\sigma}^{(i)}$ и $\hat{\sigma}^{(e)}$ совпадают и образуют декартову систему координат. Поверхность эллипсоида с полуосями a_x, a_y, a_z задается уравнением $\Phi(x,y,z) = 0$, где

$$\Phi(x,y,z) = \frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} + \frac{z^2}{a_z^2} - 1. \tag{A.1}$$

Сначала решим задачу об анизотропном эллипсоиде (при $a_x > a_y > a_z$) с тензором проводимости $\hat{\sigma}^{(i)}$, находящемся в изотропной матрице проводимости σ_0. Направим $\mathbf{E}_0$ вдоль оси x, так что потенциал внешнего однородного поля будет иметь вид [9]

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = -E_0 x = -E_0 \sqrt{\xi + a_x^2}\ \psi(\eta,\zeta), \tag{A.2}$$

где

$$\psi(\eta,\zeta) = \left[\frac{(\eta + a_x^2)(\zeta + a_x^2)}{(a_x^2 - a_y^2)(a_x^2 - a_z^2)}\right]^{1/2}. \tag{A.3}$$

Здесь ξ, η, ζ — эллипсоидальные координаты [9], в которых поверхность эллипсоида задается уравнением $\xi = 0$.

Следуя [9], потенциал $\varphi^{(e)}(\mathbf{r})$ вне эллипсоида ищем в виде

$$\varphi^{(e)}(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) \left\{1 + B\,F(\xi)\right\}, \tag{A.4}$$

$$\begin{gathered} F(\xi) = \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(s + a_x^2)\,R_s}, \\ R_s = \sqrt{(s + a_x^2)(s + a_y^2)(s + a_z^2)}. \end{gathered} \tag{A.5}$$

Поле внутри эллипсоида оказывается, как и в изотропном случае, однородным, так что соответствующий потенциал $\varphi^{(i)}(\mathbf{r})$ отличается от $\varphi_0(\mathbf{r})$ только постоянным множителем

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{r}) = A\,\varphi_0(\mathbf{r}). \tag{A.6}$$

Входящие в (A.4) и (A.6) неизвестные константы B и A определяются из граничных условий на поверхности эллипсоида

$$\xi = 0: \quad \varphi^{(e)} = \varphi^{(i)}, \quad j_n^{(e)} = j_n^{(i)}, \tag{A.7}$$

где j_n — нормальная составляющая плотности тока.

Из равенства потенциалов при $\xi = 0$ следует соотношение

$$1 + 2\,\frac{n^{(x)}}{a_x a_y a_z}\,B = A, \tag{A.8}$$

где

$$n^{(x)} = \frac{a_x a_y a_z}{2}\,F(0) = \frac{a_x a_y a_z}{2}\int\limits_0^\infty \frac{ds}{(s + a_x^2)\,R_s} \tag{A.9}$$

— коэффициент деполяризации [9]. Второе граничное условие принимает вид

$$\sigma_0\,\frac{1}{h_\xi}\,\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial\,\xi} = n_x\,\sigma_x^{(i)}\,\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial\,x}. \tag{A.10}$$

Здесь n_x — проекция единичного вектора (орта) внешней к поверхности эллипсоида нормали $\mathbf{n}$ на ось x и

$$h_\xi = \frac{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}{2R_\xi}\,; \quad h_\xi\Big|_{\xi=0} = \frac{\sqrt{\eta\zeta}}{2a_x a_y a_z}. \tag{A.11}$$

Из уравнения (A.4) с учетом формул (A.9) и (A.11) находим

$$\left[\frac{1}{h_\xi}\,\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial\,\xi}\right]_{\xi=0} = \\ = -\,a_y a_z E_0\left[1 - 2\,\frac{1-n^{(x)}}{a_x a_y a_z}\,B\right]\frac{\psi(\eta,\zeta)}{\sqrt{\eta\zeta}}. \tag{A.12}$$

Орт нормали $\mathbf{n}$ выражается через функцию Φ из формулы (A.1) следующим образом:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}. \tag{A.13}$$

Для модуля градиента $\nabla\Phi$ при $\xi = 0$ имеем

$$|\nabla\Phi| = 2\left[\frac{x^2}{a_x^4} + \frac{y^2}{a_y^4} + \frac{z^2}{a_z^4}\right]^{1/2} = 2\,\frac{\sqrt{\eta\zeta}}{a_x a_y a_z}, \tag{A.14}$$

так что для n_x получаем

$$n_x = \frac{a_y a_z}{a_x\sqrt{\eta\zeta}}\cdot x\Big|_{\xi=0} = a_y a_z\,\frac{\psi(\eta,\zeta)}{\sqrt{\eta\zeta}}. \tag{A.15}$$

Так как $\partial\varphi^{(i)}/\partial x = -\,A\,E_0$, то из уравнения (A.10) с учетом выражений (A.12) и (A.15) следует второе соотношение для коэффициентов A и B:

$$1 - 2\,\frac{1-n^{(x)}}{a_x a_y a_z}\,B = \frac{\sigma_x^{(i)}}{\sigma_0}\,A. \tag{A.16}$$

Из уравнений (A.8) и (A.16) находим выражения для констант A и B:

$$A = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \left(\sigma_0 - \sigma_x^{(i)}\right)n^{(x)}}, \tag{A.17}$$

$$B = \frac{a_x a_y a_z}{2}\,\frac{\sigma_0 - \sigma_x^{(i)}}{\sigma_0 - \left(\sigma_0 - \sigma_x^{(i)}\right)n^{(x)}}. \tag{A.18}$$

Аналогичным образом рассматриваются случаи $\mathbf{E}_0 \parallel y$ и $\mathbf{E}_0 \parallel z$.

В результате для составляющих напряженности электрического поля $\mathbf{E}^{(i)}$ внутри эллипсоида с учетом (A.17) получаем

$$E_\nu^{(i)} = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \left(\sigma_0 - \sigma_\nu^{(i)}\right)n^{(\nu)}}\,E_{0\nu} \\ (\nu = x, y, z). \tag{A.19}$$

Так как $F(\xi) \approx 2r^{-3}/3$ [9] при $r \to \infty$, то из уравнений (A.4), (A.18) (и аналогичных формул при $\mathbf{E}_0 \parallel y$ и $\mathbf{E}_0 \parallel z$) для главных значений тензоров дипольной поляризуемости $\hat\Lambda$ и $\hat\alpha$ находим следующие выражения:

$$\Lambda_\nu = -\,\frac{a_x a_y a_z}{3}\,\frac{\sigma_0 - \sigma_\nu^{(i)}}{\sigma_0 - \left(\sigma_0 - \sigma_\nu^{(i)}\right)n^{(\nu)}}, \tag{A.20}$$

$$\alpha_\nu = -\,\frac{1}{4\pi}\,\frac{\sigma_0 - \sigma_\nu^{(i)}}{\sigma_0 - \left(\sigma_0 - \sigma_\nu^{(i)}\right)n^{(\nu)}} \\ (\nu = x, y, z). \tag{A.21}$$

В формулах (A.19)–(A.21) $n^{(\nu)}$ — коэффициенты деполяризации эллипсоида с полуосями a_x, a_y, a_z.

Для эллипсоидов вращения ($a_x = a_y \neq a_z$) коэффициенты деполяризации выражаются через элементарные функции [9]. Так, для сплюснутого ($a_x = a_y > a_z$) эллипсоида

$$n^{(z)} = \frac{1+e^2}{e^3}\left(e - \operatorname{arctg} e\right), \quad e = \sqrt{\frac{a_x^2}{a_z^2} - 1}. \tag{A.22}$$

Соответственно для вытянутого ($a_x = a_y < a_z$) эллипсоида

$$n^{(z)} = \frac{1-e^2}{e^3}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+e}{1-e} - e\right), \\ e = \sqrt{1 - \frac{a_x^2}{a_z^2}}. \tag{A.23}$$

В обоих случаях $n^{(x)} = n^{(y)} = \left(1 - n^{(z)}\right)/2$.

Задача об эллипсоиде в анизотропной среде сводится к предыдущей с помощью преобразований вида (13)–(15) из разд. 3, при котором исходный эллипсоид с полуосями a_ν переходит в эллипсоид с полуосями

$$\widetilde{a}_\nu = \frac{a_\nu}{\lambda_\nu}, \quad \lambda_\nu = \sqrt{\frac{\sigma_\nu^{(e)}}{\sigma_0}} \quad (\nu = x, y, z). \tag{A.24}$$

При этом выражения (A.19)–(A.21) будут относиться уже к преобразованной системе, величины которой будем снабжать значком «тильда». Согласно формуле (19) из разд. 3, величину $\widetilde{\sigma}_\nu^{(i)}/\sigma_0$ следует заменить на $\sigma_\nu^{(i)}/\sigma_\nu^{(e)}$, так что для напряженности электрического поля внутри исходного эллипсоида из формулы (A.19) находим

$$E_\nu^{(i)} = \frac{\sigma_\nu^{(e)}}{\sigma_\nu^{(e)} - \left(\sigma_\nu^{(e)} - \sigma_\nu^{(i)}\right)\widetilde{n}^{(\nu)}}\, E_{0\nu} \quad (\nu = x, y, z). \tag{A.25}$$

Для сферической полости с изотропной проводимостью (или диэлектрической проницаемостью) $\sigma^{(i)}$ выражение (A.25) совпадает с полученным в [9].

Аналогичные замены в (A.21) дают для безразмерной поляризуемости преобразованного эллипсоида $\widetilde{\alpha}_\nu$ следующее выражение:

$$\widetilde{\alpha}_\nu = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\sigma_\nu^{(e)} - \sigma_\nu^{(i)}}{\sigma_\nu^{(e)} - \left(\sigma_\nu^{(e)} - \sigma_\nu^{(i)}\right)\widetilde{n}^{(\nu)}} \quad (\nu = x, y, z). \tag{A.26}$$

Отметим, что $E_\nu^{(i)}$ из (A.25) и $\widetilde{\alpha}_\nu$ из (A.26) тождественно удовлетворяют общему соотношению вида (26) из разд. 3.

В случае размерной поляризуемости $\widetilde{\Lambda}_\nu$ в формуле (A.20) нужно также $a_x\, a_y\, a_z$ заменить на $\widetilde{a}_x\, \widetilde{a}_y\, \widetilde{a}_z$, так что

$$\widetilde{\Lambda}_\nu = -\frac{a_x a_y a_z}{3\lambda_x\lambda_y\lambda_z}\,\frac{\sigma_\nu^{(e)} - \sigma_\nu^{(i)}}{\sigma_\nu^{(e)} - \left(\sigma_\nu^{(e)} - \sigma_\nu^{(i)}\right)\widetilde{n}^{(\nu)}} \quad (\nu = x, y, z). \tag{A.27}$$

В формулах (A.25)–(A.27) $\widetilde{n}^{(\nu)}$ — коэффициенты деполяризации эллипсоида с полуосями $\widetilde{a}_\nu$ из выражения (A.24). Так как величины $\widetilde{n}^{(\nu)}$ зависят только от отношения полуосей, то вспомогательная проводимость σ_0 в выражения для $\widetilde{n}^{(\nu)}$ не входит. Величина σ_0 выпадает и из формул (A.25), (A.26).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Шкловский, А. Л. Эфрос, УФН **117**, 401 (1975)
2. A. L. Efros, B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. B **76**, 475 (1976).
3. B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. B **85**, K111 (1978).
4. Б. И. Шкловский, Письма в ЖТФ **7**, 1312 (1981).
5. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **82**, 2053 (1982).
6. Б. Я. Балагуров, ФТТ **27**, 2375 (1985).
7. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **139**, 378 (2011).
8. Б. Я. Балагуров, ЖТФ **52**, 850 (1982).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
10. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **137**, 301 (2010).