ЖЭТФ, 2011, том 140, вып. 6 (12), стр. 1218–1226

ДВИЖЕНИЕ ПО СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ю. Н. Овчинников[a,b*], *И. М. Сигал*[c**]

[a] *Max-Planck Institute for Physics of Complex Systems*
01187, Dresden, Germany

[b] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук*
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

[c] *Department of Mathematics, University of Toronto*
M5S3G3, Ontario, Canada

Поступила в редакцию 14 февраля 2011 г.

Получено четырехпараметрическое семейство автомодельных решений уравнения движения поверхности по средней кривизне. Показано, что это семейство устойчиво по отношению к малой деформации «гиперболической» поверхности. За конечный интервал времени в момент времени t^* образуется особая точка с изменением топологии поверхности. Решение продолжено за особую точку. Найдена связь параметров, описывающих «гиперболическую» поверхность до и после изменения топологии поверхности. Исследован частный случай, когда невозмущенная поверхность — цилиндр. Цилиндрическая поверхность слабо неустойчива относительно возмущения в виде «широкой шейки». На конечном этапе развития шейки, когда ее поперечный размер много меньше радиуса цилиндра на больших расстояниях от шейки, движение поверхности в широкой области в окрестностях шейки описывается универсальным двухпараметрическим семейством автомодельных решений. Эти решения устойчивы относительно малых возмущений поверхности.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время активно исследуется образование точечных особенностей в нелинейных уравнениях различного вида. В частности исследуются реакционно-диффузионные уравнения вида [1]

$$U_t - \Delta U = \tilde{f}(U). \tag{1}$$

К их числу относится уравнение Аллена – Кана [2, 3]:

$$U_t = \varepsilon \Delta U + \varepsilon^{-1} U(1 - U^2), \tag{2}$$

активно используемое в физике твердого тела (см. ссылку в [1]). В уравнении (2) $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Уравнение (2) возникает, в частности, при исследовании движения границы раздела двух фаз при условии, что свободная энергия единицы объема есть четная функция дальнего параметра порядка [2]. Это уравнение есть аналог временного уравнения Гинзбурга – Ландау для вещественного параметра порядка. В нем нет законов сохранения. В уравнениях вида (1) возникают особые точки, связанные с изменением топологии границы раздела фаз. В одномерном случае уравнение (2) имеет решение типа «кинк»:

$$U = \operatorname{th}\left(\frac{x}{\varepsilon\sqrt{2}}\right). \tag{3}$$

В трехмерном случае существуют решения уравнения (2), такие что на поверхности $f(x, y, z, t) = 0$ функция $U = 0$ и при удалении от поверхности на расстояние $d > \varepsilon$ функция U имеет значения $U = \pm 1$ (с различными знаками по разные стороны от поверхности). В области значений радиусов кривизны поверхности $R_{1,2} \gg \varepsilon$ уравнение сводится к более простому, описывающему движение поверхности $f = 0$ со скоростью, пропорциональной средней кривизне.

*E-mail: ovc@itp.ac.ru
**I. M. Sigal

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ f В РЕЖИМЕ $R_{1,2} \gg \varepsilon$

В области $R_{1,2} \gg \varepsilon$ решение уравнения (2) ищем в виде

$$U = \operatorname{th}\left(\frac{f}{\varepsilon\sqrt{2}|\nabla f|}\right) + U_1, \tag{4}$$

где $|\nabla f| = \sqrt{(\nabla f)^2}$, U_1 — малая поправка к первому члену в правой части формулы (4). Подставляя это выражение для функции U в формулу (2), получим после несложных вычислений уравнение для функции f:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \varepsilon\left\{\Delta f - \frac{(\nabla f\nabla)(\nabla f)^2}{2(\nabla f)^2}\right\}. \tag{5}$$

Уравнение (5) должно выполняться на поверхности $f = 0$. Уравнение (5) есть уравнение движения по средней кривизне поверхности $f = 0$. Детали вывода уравнения (5) изложены в Приложении. Уравнение (5) имеет точные решения:

$$\begin{aligned} f &= r^2 - a(t), \quad \frac{\partial a}{\partial t} = -4\varepsilon \quad \text{для сферы,}\\ f &= \rho^2 - a(t), \quad \frac{\partial a}{\partial t} = -2\varepsilon \quad \text{для цилиндра.} \end{aligned} \tag{6}$$

3. ПРОБЛЕМА СТАБИЛЬНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ПРЕДЕЛЕ $R_{1,2} \gg \varepsilon$

Рассмотрим возмущение цилиндрической поверхности вида

$$f = \rho^2 - a + C(t)a\begin{pmatrix}\cos(\kappa z)\\ \sin(\kappa z)\end{pmatrix}, \quad \frac{\partial a}{\partial t} = -2\varepsilon. \tag{7}$$

Подставляя выражение (7) для функции f в формулу (5), в линейном приближении получим для коэффициента $C(t)$ уравнение

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t} - \varepsilon\kappa^2. \tag{8}$$

Решение уравнения (8) есть

$$C(t) = \frac{C(t_0)}{a(t)}\exp(-\varepsilon\kappa^2(t - t_0)). \tag{9}$$

Из уравнений (7), (9) следует, что цилиндрическая поверхность слабо неустойчива по отношению образования стягивающихся «шеек».

4. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ПО СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЕ

Решение уравнения (5) имеет вид

$$f = A\rho^2 - z^2 - a + \chi, \tag{10}$$

где коэффициенты $\{A, a\}$ — функции времени, а функция $\chi = \chi(z,t)$. Подставляя выражение (10) для функции f в уравнение (5) получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t}[z^2 + a - \chi] - \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial t} = \\ &\quad = 2\varepsilon\left\{A - 1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} + \right.\\ &\left. + \frac{z^2\left(1 - \dfrac{1}{2z}\dfrac{\partial\chi}{\partial z}\right)^2\left(A + 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right)}{A(z^2 + a - \chi) + z^2\left(1 - \dfrac{1}{2z}\dfrac{\partial\chi}{\partial z}\right)^2}\right\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Полагая в уравнении (11)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial t} = -2\varepsilon(A - 1),\\ &\chi(z,t) = a\tilde{\chi}(\Phi), \quad \Phi = \frac{\sqrt{A+1}}{\sqrt{Aa}}z, \end{aligned} \tag{12}$$

получим уравнение для функции $\tilde{\chi}$, зависящей лишь от одной переменной Φ:

$$\begin{aligned} &(A - 1)\left(\frac{1}{2}\Phi\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\Phi} - \tilde{\chi}\right) = \frac{1}{2}\frac{A+1}{A}\frac{\partial^2\tilde{\chi}}{\partial\Phi^2} + \\ &+ \Phi^2\frac{\left(1 - \dfrac{A+1}{2A\Phi}\dfrac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\Phi}\right)^2\left(1 - \dfrac{1}{2A}\dfrac{\partial^2\tilde{\chi}}{\partial\Phi^2}\right)}{1 + \dfrac{A}{A+1}\Phi^2 - \tilde{\chi} + \dfrac{\Phi^2}{A+1}\left(1 - \dfrac{A+1}{2A\Phi}\dfrac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\Phi}\right)^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

При $\Phi \to \infty$ из уравнения (13) находим

$$\begin{aligned} &\tilde{\chi} = -\frac{1}{A-1} + G\Phi^2 + \\ &+ \frac{A}{2(A-1)^2\left(1 - \dfrac{G}{A}\right)}\frac{1}{\Phi^2} + \ldots,\\ &\Phi^4 \gg \frac{A+1}{2(A-1)^2\left(1 - \dfrac{G}{A}\right)\left(1 - \dfrac{A+1}{A}G\right)}, \end{aligned} \tag{14}$$

коэффициент G есть свободный параметр решения. Таким образом автомодельные решения образуют трехпараметрическое семейство решений $\{A, G, t^*\}$, где t^* — свободный параметр в решении уравнения (12) для коэффициента a

$$a = 2\varepsilon(t^* - t). \qquad (15)$$

Существует еще один скрытый параметр семейства автомодельных решений — z_0, связанный со сдвигом по оси z ($z \to z - z_0$). При $\Phi \to 0$ функция $\tilde{\chi}$ разлагается в ряд по степеням z:

$$\tilde{\chi} = \alpha - \frac{\alpha A(A-1)}{A+1}\Phi^2 - \frac{A}{6(1-\alpha)(A+1)} \times \\ \times (1+\alpha(A-1))^2 \left(1 + \frac{\alpha(A-1)}{A+1}\Phi^4\right) + \ldots, \qquad (16)$$

коэффициент α в формуле (16) есть функция параметра G, $\alpha = \alpha(G)$. В точке t^* происходит изменение топологии поверхности f: однополостный гиперболоид при $t < t^*$ превращается в двухполостный гиперболоид при $t > t^*$.

5. ПОВЕРХНОСТЬ f В ОБЛАСТИ $t > t^*$

В области $t > t^*$ функцию f можно выбрать в виде, аналогичном формулам (10), (12):

$$f = D\rho^2 - z^2 + (-a)\tilde{\mu}(\tilde{\Phi}), \qquad (17)$$

где D есть некоторая константа, $\partial(-a)/\partial t = 4\varepsilon D$,

$$\tilde{\Phi} = \frac{\sqrt{D(D+1)}}{\sqrt{-a}}\rho. \qquad (18)$$

Используя формулы (17), (18), для функции $\tilde{\mu}$ получаем следующее уравнение:

$$\tilde{\mu} - \frac{\tilde{\Phi}}{2}\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\Phi} = \frac{D+1}{2}\left\{\frac{1}{2\tilde{\Phi}}\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\tilde{\Phi}} + \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{\mu}}{\partial\Phi^2}\left(1+\tilde{\mu}+\frac{\tilde{\Phi}^2}{D+1}\right) - \frac{\tilde{\Phi}^2}{D+1}\left(1+\frac{D+1}{2\tilde{\Phi}}\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\tilde{\Phi}}\right)^2}{1+\frac{\Phi^2}{D+1}+\tilde{\mu}+\frac{D}{D+1}\Phi^2\left(1+\frac{D+1}{2\tilde{\Phi}}\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\tilde{\Phi}}\right)^2}\right\}. \qquad (19)$$

При $\tilde{\Phi} \to \infty$ из уравнения (19) находим

$$\tilde{\mu} = \tilde{G}\tilde{\Phi}^2 + \frac{1}{2}[-1+\tilde{G}(D+1)] + \\ + \frac{1}{8(1+GD)}[G(D+1)+1]\frac{1}{\Phi^2}, \\ \Phi^4 \gg \frac{D+1}{8(1+GD)}. \qquad (20)$$

В области $\tilde{\Phi} \to 0$ функция $\tilde{\mu}$ также разлагается в ряд по степеням $\tilde{\Phi}^2$:

$$\tilde{\mu} = \alpha_1 + \frac{\alpha_1}{D+1}\tilde{\Phi}^2 + \\ + \frac{1+\alpha_1}{8(D+1)}\left(1+\frac{\alpha_1 D}{D+1}\right)\tilde{\Phi}^4 + \ldots, \qquad (21)$$

коэффициент α_1 в формуле (21) есть функция параметра $\tilde{G}$, $\alpha_1 = \alpha_1(\tilde{G})$. Константы $\{A, G; D, \tilde{G}\}$ в формулах (10), (14), (17), (20) связаны между собой простыми соотношениями, вытекающими из совпадения главных членов и первой производной по времени от функции $\rho^2(z,t)$ до и после топологического перехода:

$$\rho^2 = \frac{z^2}{A}\left(1 - \frac{A+1}{A}G\right) + 2\varepsilon(t^*-t), \quad t < t^*, \\ \rho^2 = \frac{z^2}{D(1+(D+1)\tilde{G})} - 2\varepsilon(t-t^*), \quad t > t^*. \qquad (22)$$

Уравнения (22) дают лишь одну связь между параметрами $\{A, G\}$ и $\{D, \tilde{G}\}$:

$$\frac{1}{A}\left(1 - \frac{A+1}{A}G\right) = \frac{1}{D\left(1+(D+1)\tilde{G}\right)}. \qquad (23)$$

Вторая связь между параметрами $\{A, G\}$ и $\{D, \tilde{G}\}$ может быть получена из рассмотрения области времен $|t^* - t| \sim \varepsilon$. В этом интервале времени функция U не описывается уравнениями (4), (5) в области $\{\rho^2, z^2\} \sim \varepsilon^2$. В области значений переменных $\{|t-t^*| \sim \varepsilon, (\rho^2, z^2) \sim \varepsilon^2\}$ для нахождения функции U следует использовать исходные уравнения Аллена–Кана (2). Сшивка этого решения с автомодельным в области $\{\rho^2, z^2\} \sim \varepsilon^2$ позволяет найти вторую связь между параметрами $\{A, G\}$ и $\{D, \tilde{G}\}$. Эта проблема в данной работе рассматриваться не будет.

6. ПРОБЛЕМА СТАБИЛЬНОСТИ РЕШЕНИЙ

Предположим, что f_0 — решение уравнения (5). Решения уравнения (5), близкие к f_0, ищем в виде

$$f = f_0 + f_1, \quad |f_1| \ll |f_0|. \qquad (24)$$

При выполнении условия (24) функция f_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \varepsilon\Big\{\Delta f_1 - \frac{1}{(\nabla f_0)^2}[(\nabla f_0)\nabla(\nabla f_0\cdot\nabla f_1) - \\ - \frac{(\nabla f_0\cdot\nabla f_1)}{(\nabla f_0)^2}(\nabla f_0\cdot\nabla(\nabla f_0)^2) + \\ + \frac{1}{2}(\nabla f_1\cdot\nabla(\nabla f_0)^2)]\Big\}. \quad (25)$$

Рассмотрим проблему устойчивости автомодельного решения в области $t < t^*$. В этом случае функция f_0 дается уравнениями (10), (12):

$$f_0 = \rho^2 - \frac{1}{A}[z^2 + a - a\tilde{\chi}]. \quad (26)$$

Функцию f_1 ищем в виде

$$f_1 = -C_0(z,t). \quad (27)$$

Из формул (26), (27) находим

$$\begin{gathered} \nabla f_1 = \left(0, -\frac{\partial C_0}{\partial z}\right), \\ \nabla f_0 = 2\left(\rho; -\frac{1}{A}\left(z - \frac{a}{2}\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial z}\right)\right), \\ (\nabla f_0\nabla f_1) = \frac{2}{A}\frac{\partial C_0}{\partial z}\left(z - \frac{a}{2}\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial z}\right), \\ (\nabla f_0)^2 = 4\left(\rho^2 + \frac{1}{A^2}\left(z - \frac{a}{2}\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial z}\right)^2\right). \end{gathered} \quad (28)$$

Используя формулы (26)–(28), после несложных вычислений приведем уравнение (25) для функции $C_0(z,t)$ к виду

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} = \varepsilon A(z^2 + a - a\chi)\times \\ \times\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{A(z^2+a-a\tilde{\chi})+\left(z-\frac{a}{2}\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial z}\right)^2}\frac{\partial C_0}{\partial z}\right). \quad (29)$$

Переходя в уравнении (29) к новым переменным

$$\left\{\Phi = z\sqrt{\frac{A+1}{Aa}}, a\right\}, \quad (30)$$

получим

$$-2(A-1)a\frac{\partial C_0}{\partial a} + (A-1)\Phi\frac{\partial C_0}{\partial\Phi} = \\ = \frac{A+1}{A}\left(A\Phi^2 + (A+1) - (A+1)\tilde{\chi}\right)\times \\ \times\frac{\partial}{\partial\Phi}\left\{\left[(A\Phi^2 + (A+1) - (A+1)\tilde{\chi}) + \\ + \left(\Phi - \frac{A+1}{2A}\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\Phi}\right)^2\right]\frac{\partial C_0}{\partial\Phi}\right\}. \quad (31)$$

Решение уравнения (31) ищем в виде

$$C_0(\Phi, a) = \zeta(a)F(\Phi). \quad (32)$$

Подставляя выражение (32) для функции C_0 в формулу (31), получим

$$2(A-1)a\frac{\partial\zeta(a)}{\partial a} = \lambda\zeta(a), \\ \frac{A+1}{A}\left(A\Phi^2 + (A+1) - (A+1)\tilde{\chi}\right)\times \\ \times\frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\left[A\Phi^2+(A+1)-(A+1)\tilde{\chi} + \\ + \left(\Phi - \frac{A+1}{2A}\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\Phi}\right)^2\right]^{-1}\frac{\partial F}{\partial\Phi}\right) - \\ - (A-1)\Phi\frac{\partial F}{\partial\Phi} = -\lambda F. \quad (33)$$

Первое из уравнений (33) легко решается и дает

$$\zeta = \zeta_0\exp\left(-\frac{\lambda}{2(A-1)}\ln\left(\frac{a_0}{a}\right)\right),$$

где $\{\zeta_0, a_0\}$ — значение функции $\{\zeta, a\}$ при $t = t_0$. Легко видеть, что $F = \mathrm{const}$ — собственная функция оператора в левой части уравнения (33), соответствующая собственному значению $\lambda_1 = 0$. Для дальнейшего исследования спектра удобно сделать стандартное преобразование и перейти к функции $\tilde{F}$, равной

$$F = \tilde{F}\exp\left(\int_0^\Phi d\Phi_1\mu(\Phi_1)\right), \quad (34)$$

где

$$\mu(\Phi) = \frac{A(A-1)}{2(A+1)}\times \\ \times\Phi\left[1 + \frac{\left(\Phi - \frac{A+1}{2A}\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\Phi}\right)^2}{A\Phi^2 + A + 1 - (A+1)\tilde{\chi}}\right] + \\ + \frac{(A+1)\left(\Phi-\frac{A+1}{2A}\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\Phi}\right)\left(1-\frac{1}{2A}\frac{\partial^2\tilde{\chi}}{\partial\Phi^2}\right)}{A\Phi^2+A+1-(A+1)\tilde{\chi}+\left(\Phi-\frac{A+1}{2A}\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\Phi}\right)^2}. \quad (35)$$

В результате такого преобразования уравнение для спектра становится самосопряженным с некоторым весовым множителем

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \Phi^2} + \tilde{F}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \Phi} - \mu^2\right) = -\frac{\lambda A \tilde{F}}{A+1} \times \\ \times \left[1 + \frac{\left(\Phi - \frac{A+1}{2A}\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \Phi}\right)^2}{A\Phi^2 + A + 1 - (A+1)\tilde{\chi}}\right]. \quad (36)$$

Различные собственные функции (n, m) оператора в левой части уравнения (36) ортогональны с весовым множителем, определяемым правой частью уравнения (36):

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Phi \tilde{F}_n \tilde{F}_m \left(1 + \frac{\left(\Phi - \frac{A+1}{2A}\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \Phi}\right)^2}{A\Phi^2 + A + 1 - (A+1)\tilde{\chi}}\right) = 0, \quad n \neq m. \quad (37)$$

Легко проверить, что функция $\tilde{F}_1$, равная

$$\tilde{F}_1 = \exp\left(-\int_0^{\Phi} d\Phi_1 \mu(\Phi_1)\right), \quad (38)$$

есть собственная функция оператора в левой части уравнения (36), соответствующая собственному значению $\lambda_1 = 0$. Поскольку функция $\tilde{F}_1$ не имеет нулей, все остальные собственные значения оператора в уравнении (36) положительны. Предположим, что в момент времени $t = t_0$ имеется малое возмущение $\kappa(z)$ автомодельного решения f_0 с параметрами $\{t^*, A, G\}$:

$$f(t = t_0 + \delta) = f_0(t_0, t^*, A, G) + \kappa(z). \quad (39)$$

Учитывая, что пространство автомодельных решений образует четырехпараметрическое семейство, ищем решение уравнения (5) в области $t > t_0$ в виде

$$f = f_0(t^{**}, A^*, G^*, z - z_0) + \delta f. \quad (40)$$

Из формул (39), (40) находим

$$\delta f = \kappa(z) - \delta A\frac{\partial f_0}{\partial A} - \delta G\frac{\partial f_0}{\partial G} - \delta t^*\frac{\partial f_0}{\partial t^*} + z_0\frac{\partial f_0}{\partial z}, \quad t = t_0. \quad (41)$$

Максимально быстрая сходимость решения к автомодельному достигается при обращении в нуль $\{1, 2, 3, 5\}$ гармоник разложения в ряд по базису $\{\tilde{F}_n\}$ величины

$$\delta f \exp\left(-\int_0^{\Phi} \mu(\Phi_1) d\Phi_1\right)\Big|_{t=t_0}.$$

Если $\kappa(z)$ является четной функцией z, то скорость сходимости определяется собственным значением λ_7, если же $\kappa(z)$ содержит нечетную компоненту, то скорость сходимости определяется собственным значением λ_4. Отсюда находим значения величин $\{\delta t^*, \delta A, \delta G, z_0\}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Phi \left\{\kappa(z) - \delta A\frac{\partial f_0}{\partial A} - \delta G\frac{\partial f_0}{\partial G} - \delta t^*\frac{\partial f_0}{\partial t^*} + z_0\frac{\partial f_0}{\partial z}\right\} \times \\ \times \exp\left(-\int_0^{\Phi} \mu(\Phi_1) d\Phi_1\right) \times \\ \times \left(1 + \frac{\left(\Phi - \frac{A+1}{2A}\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \Phi}\right)^2}{A\Phi^2 + (A+1) - (A+1)\tilde{\chi}}\right)\{\tilde{F}_{1,2,3,5}\} = 0, \\ t = t_0; \quad z = \sqrt{\frac{Aa}{A+1}}\Phi\Big|_{t=t_0}. \quad (42)$$

Для оценки величины λ_n воспользуемся квазиклассическим приближением для спектра. В соответствии с общими правилами [4] ищем решение уравнения (36) в виде

$$\tilde{F} = \exp\left(i\int P d\Phi\right), \quad (43)$$

где «импульс» P удовлетворяет уравнению

$$-P^2 + i\frac{\partial P}{\partial \Phi} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \Phi} - \mu^2\right) = -\frac{\lambda A}{A+1}(1+g), \quad (44)$$

где

$$g = \frac{\left(\Phi - \frac{A+1}{2A}\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \Phi}\right)^2}{A\Phi^2 + A + 1 - (A+1)\tilde{\chi}}. \quad (45)$$

Решение уравнения (44) ищем в виде

$$P = P_0 + P_1, \quad P_0^2 = \left[\frac{\lambda A}{A+1}(1+g) + \frac{\partial \mu}{\partial \Phi} - \mu^2\right], \\ P_1 = \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial P}\ln P_0. \quad (46)$$

Пусть $\pm\Phi_0$ — точки поворота ($P_0(\Phi_0) = 0$). Тогда, в соответствии с правилом квантования Бора–Зоммерфельда [4], расстояние $\delta\lambda$ между соседними уровнями определяется из уравнения

$$\delta\lambda \int\limits_{-\Phi_0}^{\Phi_0} \frac{\partial P_0}{\partial \lambda} d\Phi = \pi. \qquad (47)$$

При больших значениях Φ, используя формулы (14), (35), (46), получаем

$$\begin{gathered} g = \frac{1}{A}\left(1 - \frac{A+1}{A}G\right) - \frac{A+1}{A(A-1)}\frac{1}{\Phi^2}, \\ \mu = \frac{A-1}{2}\left(1 - \frac{G}{A}\right)\Phi + \frac{1}{2\Phi}, \\ P_0^2 = \frac{\lambda(A-G)}{A} - \left(\frac{(A-1)(A-G)}{2A}\right)^2 \Phi^2. \end{gathered} \qquad (48)$$

Подставляя выражение (48) для величины P_0 в формулу (47) и полагая

$$\Phi = x\Phi_0, \quad \Phi_0 = \sqrt{\frac{\lambda(A-G)}{A}}\,\frac{2A}{(A-1)(A-G)},$$

получим приближенное значение расстояния $\delta\lambda$ между ближайшими уровнями

$$\frac{\delta\lambda}{A-1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi, \quad \delta\lambda = A - 1. \qquad (49)$$

7. ОСОБАЯ ТОЧКА: ЦИЛИНДР

Значение параметра $G = A/(A+1)$ является особой точкой. При таком значении G решение уравнения (13) для функции $\tilde{\chi}$ есть

$$\tilde{\chi} = \frac{A}{A+1}\Phi^2 - \frac{1}{A-1}, \quad a = 2\varepsilon(A-1)(t^* - t). \qquad (50)$$

Поверхность в этом случае превращается в цилиндр

$$\rho^2 = \tilde{a}(t) = 2\varepsilon(t^* - t). \qquad (51)$$

В момент времени $t = t_0$ слабо возмущаем цилиндрическую поверхность (51) (см. (8), (9)). При $t > t_0$ возмущенная поверхность определяется выражением (см. (8), (9))

$$\rho^2 = \tilde{a}(t) - \tilde{a}(t_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} C_\kappa(t_0) \times \\ \times \exp(i\kappa z)\exp\left(-\varepsilon\kappa^2(t - t_0)\right). \qquad (52)$$

Предположим, что возбуждение поверхности в момент времени $t = t_0$ было плавным, т. е. существенны значения $\kappa < \tilde{a}(t_0)$. В этом случае почти на всем интервале времени вплоть до момента времени t_1, такого что

$$\tilde{a}(t_1) = \tilde{a}(t_0)\delta\rho^2, \qquad (53)$$

где $\delta\rho^2(t_0)$ — возмущение квадрата радиуса цилиндрической поверхности в момент времени t_0, равное

$$\delta\rho^2(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\kappa\, C_\kappa(t_0), \qquad (54)$$

возмущение цилиндрической поверхности мало и справедливо уравнение (52). Из формулы (52) следует, что само возмущение не растет во времени. Переход к нелинейному режиму определяется уменьшением главного члена.

Тем самым процесс схлопывания цилиндрической поверхности распределяется на три этапа: первый этап — возмущение мало и определяется формулой (52); второй этап — нелинейный режим $t_1 < t < t_2$. Момент времени t_2 находится из условия, что $a(t_2)$ становится численно больше квадрата радиуса шейки $R^2(t_2)$. Мы предположим, что в момент времени t_2 уравнение поверхности есть

$$\rho^2(t_2) = \mathcal{F}(z), \qquad (55)$$

где функция $\mathcal{F}(z)$ в широком интервале по z является почти квадратичной параболой, и на краю этого интервала $\mathcal{F}(z) \gg \mathcal{F}(0)$. Предположим также, что нечетная компонента функции $\mathcal{F}(z)$ мала.

Прежде чем перейти к рассмотрению третьего этапа, на котором происходит изменение топологии поверхности, изучим детально автомодельные решения в области значений параметра G, таких что

$$G = \frac{A}{A+1}(1-\gamma), \quad 0 < \gamma \ll 1. \qquad (56)$$

В этой области значений параметра G функция $\tilde{\chi}$ представима в виде

$$\tilde{\chi} = \frac{A}{A+1}(1-\gamma)\Phi^2 - \frac{1}{A-1} + \delta\tilde{\chi}, \quad |\delta\tilde{\chi}| \ll 1. \qquad (57)$$

Подставляя выражение (57) для функции $\tilde{\chi}$ в уравнение (13), получим

$$\frac{\partial^2\delta\tilde{\chi}}{\partial\Phi^2} - \frac{2A(A-1)}{A+1}\left[\frac{1}{2}\Phi\frac{\partial\delta\tilde{\chi}}{\partial\Phi} - \delta\tilde{\chi}\right] = \\ = \left(\frac{2A\gamma}{A+1}\right)\frac{1}{1 + \dfrac{\gamma(A-1)}{A+1}\Phi^2}. \qquad (58)$$

Решения $\hat{z}_{1,2}$ однородного уравнения (58) суть [5]

$$\begin{gathered}\hat{z}_1 = \frac{A+1}{A}[Y^2-1],\\ \hat{z}_2 = -\exp\left(\frac{Y^2}{4}\right) JmD_{-3}(iY),\end{gathered} \tag{59}$$

где $Y = \sqrt{A(A-1)/(A+1)}\Phi$, D_{-3} — функция параболического цилиндра

$$-JmD_{-3}(iY) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{Y^2}{4}\right) \times \\ \times \int_0^\infty dx\, x^2 e^{-x^2/2}\sin(xY). \tag{60}$$

Решение уравнения (58), удовлетворяющее условию

$$\delta\tilde{\chi} \to 0 \quad \text{при} \quad \Phi \to \infty, \tag{61}$$

легко находится с использованием формул (59), (60) и равно

$$\delta\tilde{\chi} = \frac{\gamma}{A-1}\left\{-(Y^2-1)\int_Y^\infty \frac{dY_1 R(Y_1)}{1+\frac{\gamma}{A}Y_1^2} + \exp\left(\frac{Y^2}{2}\right) \times \right. \\ \left. \times R(Y)\int_Y^\infty dY_1 (Y_1^2-1)\exp\left(-\frac{Y_1^2}{2}\right)\right\}, \tag{62}$$

где

$$R(Y) = \int_0^\infty dx\, x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\sin(xY). \tag{63}$$

Из формул (16), (62), (63) находим

$$\alpha = -\frac{1-\gamma}{A-1}. \tag{64}$$

Окончательно, используя формулы (57), (62), приведем уравнение для поверхности (26) к виду

$$\rho_0^2 = \frac{a}{A-1}\left\{1 + \frac{\gamma}{A}Y^2 - \frac{\gamma}{A}\left[-(Y^2-1)\int_Y^\infty \frac{dY_1 R(Y_1)}{1+\frac{\gamma}{A}Y^2} + \right.\right. \\ + \exp\left(\frac{Y^2}{2}\right) R(Y)\int_Y^\infty dY_1 (Y_1^2-1) \times \\ \left.\left. \times \exp\left(-\frac{Y_1^2}{2}\right)\right]\right\}. \tag{65}$$

Автомодельные решения, определяемые формулой (65), образуют трехпараметрическое семейство решений, зависящее от параметров $\{t^{**}, \gamma/A, z_0\}$. Для семейства решений (57), (62) функция μ (уравнение 35) в главном приближении по γ определяется выражением

$$\mu = \frac{A(A-1)}{2(A+1)}\Phi. \tag{66}$$

В этом приближении собственные значения λ_n и собственные функции $\tilde{F}_n$ равны:

$$\begin{gathered}\lambda_n = (A-1)(n-1), \quad \tilde{F}_n = D_{n-1}(Y),\\ Y = \sqrt{\frac{A(A-1)}{A+1}}\Phi,\end{gathered} \tag{67}$$

где $D_n(Y)$ — функции параболического цилиндра [5]

$$\begin{gathered}D_0(Y) = \exp\left(-Y^2/4\right), \quad D_1(Y) = YD_0(Y),\\ D_2(Y) = (Y^2-1)D_0(Y),\\ D_3(Y) = (Y^3-3Y)D_0(Y),\\ D_4(Y) = (Y^4-6Y^2+3)D_0(Y).\end{gathered} \tag{68}$$

При предположениях, сделанных ранее относительно функции $\mathcal{F}(z)$, в семействе функций (65) существует автомодельная функция, слабо отличающаяся от $\mathcal{F}(z)$ в широком интервале, в котором $\mathcal{F}(z)$ является почти квадратичной параболой.

Во всем интервале времен $t_2 \le t \le t^{**}$ наилучшее приближение решения (5) с начальным условием (55) в момент времени t_2 достигается для функции ρ_0 из семейства (65) с параметрами $\{t^{**}, \gamma/A, \delta z_0\}$, удовлетворяющими условиям

$$\int_{-\infty}^\infty dY \exp\left(-\frac{Y^2}{4}\right)\tilde{F}_{1,2,3}(Y)\Psi = 0, \tag{69}$$

где

$$\begin{gathered}\Psi = \mathcal{F}\left(Y\sqrt{\frac{a(t_2)}{A-1}}\right) - \rho_0\left(t^{**}, \frac{\gamma}{A}, (Y-\delta Y_0)\right),\\ t = t_2.\end{gathered} \tag{70}$$

Скорость убывания поправочных членов к автомодельному решению определяется собственным значением λ_5, если функция $\mathcal{F}(z)$ — четная относительно z, или собственным значением λ_4, если функция $\mathcal{F}(z)$ содержит малую нечетную компоненту.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами получено и исследовано четырехпараметрическое семейство автомодельных решений, описывающих движение по средней кривизне. К такому уравнению сводится, например, уравнение Аллена–Кана, широко используемое в механике сплошных сред при исследовании движения границ между фазами [2]. Реальные физические объекты для такого исследования — неоднородные системы [6], сплавы. При движении границ между фазами возможно изменение топологии поверхности раздела. В результате за конечное время в решении уравнения движения поверхности по средней кривизне возникает особая точка. Найдено продолжение решения за эту особую точку.

Получена связь параметров, описывающих поверхность до и после изменения топологии. Показано, что для полной сшивки решений необходимо рассматривать исходные уравнения Аллена–Кана вблизи точки изменения топологии $|t-t^*|\sim\varepsilon$.

Показано, что цилиндрическая поверхность слабо неустойчива и в широком интервале времени $\{t_1,t^*\}$, таком что $(t^*-t_0)\gg(t^*-t_1)$, где t_0 — момент времени возмущения цилиндрической поверхности, возмущение цилиндрической поверхности остается слабым. Исследовано движение слабовозмущенной цилиндрической поверхности вплоть до точки изменения ее топологии.

Отметим, что само возмущение не растет во времени, и переход к нелинейному режиму связан с уменьшением во времени квадрата радиуса цилиндрической поверхности на больших расстояниях от «шейки».

Работа одного из авторов (Ю. Н. О.) выполнена при финансовой поддержке EOARD (грант №097006) и в рамках программы SIMTEX (грант №246937); а другого (И. М. С.) — NSERC (грант №A7601).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть $f=0$ — уравнение поверхности, на которой величина $U=0$. Предположим, что радиусы кривизны поверхности $R_{1,2}$ удовлетворяют условию

$$R_{1,2}\gg\varepsilon. \tag{71}$$

Ищем решение уравнения (2) в этом случае в виде

$$U=U_0+U_1,\quad |U_1|\ll|U_0|,$$
$$U_0=\operatorname{th}\left(\frac{f}{\varepsilon\sqrt{2}\,((\nabla f)^2)^{1/2}}\right). \tag{72}$$

Из формулы (72) находим

$$\frac{\partial U_0}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}\operatorname{ch}^2\left(\dfrac{f}{\varepsilon\sqrt{2}\,((\nabla f)^2)^{1/2}}\right)}\times$$
$$\times\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{1}{((\nabla f)^2)^{1/2}}-\frac{f}{2}\frac{1}{((\nabla f)^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla f)^2\right\},$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}}=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}\operatorname{ch}^2\left(\dfrac{f}{\varepsilon\sqrt{2}\,((\nabla f)^2)^{1/2}}\right)}\times$$
$$\times\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\frac{1}{((\nabla f)^2)^{1/2}}-\frac{f}{2}\frac{1}{((\nabla f)^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\nabla f)^2\right\},$$

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \mathbf{r}^2}=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}\operatorname{ch}^2\left(\dfrac{f}{\varepsilon\sqrt{2}\,((\nabla f)^2)^{1/2}}\right)}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{((\nabla f)^2)^{1/2}}\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}-\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\frac{1}{((\nabla f)^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\nabla f)^2+\right.$$
$$+\frac{3}{4}\frac{f}{((\nabla f)^2)^{5/2}}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\nabla f)^2\right)^2-$$
$$\left.-\frac{f}{2\,((\nabla f)^2)^{3/2}}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}(\nabla f)^2\right\}-$$
$$-\frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{f}{\varepsilon\sqrt{2}\,((\nabla f)^2)^{1/2}}\right)}{\varepsilon^2\operatorname{ch}^3\left(\dfrac{f}{\varepsilon\sqrt{2}\,((\nabla f)^2)^{1/2}}\right)}\times$$
$$\times\left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\frac{1}{((\nabla f)^2)^{1/2}}-\frac{f}{2\,((\nabla f)^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\nabla f)^2\right]^2. \tag{73}$$

Для последнего члена в формуле (2) находим выражение

$$\frac{1}{\varepsilon}(1-U_0^2)U_0=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{f}{\varepsilon\sqrt{2}\,((\nabla f)^2)^{1/2}}\right)}{\operatorname{ch}^3\left(\dfrac{f}{\varepsilon\sqrt{2}\,((\nabla f)^2)^{1/2}}\right)}. \tag{74}$$

Правая часть линеаризованного уравнения (2) имеет нулевую моду $1/\operatorname{ch}^2\left(\tau/\varepsilon\sqrt{2}\right)$, где τ — координата вдоль нормали к поверхности, отсчитанная от точки их пересечения. Подставляя формулы (72)–(74)

в уравнение (2) и сохраняя линейные по U_1 члены, получим уравнение для U_1, правая часть которого определяется функцией U_0. Наличие нулевой моды приводит к следующему условию разрешимости этого уравнения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon\sqrt{2}}\right)}{\operatorname{ch}^4\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon\sqrt{2}}\right)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} - \varepsilon \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{(\nabla f)^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\nabla f)^2\right)\right] - 2\varepsilon\left(\frac{\tau}{\varepsilon\sqrt{2}}\right) \times$$
$$\left. \times \operatorname{th}\left(\frac{\tau}{\varepsilon\sqrt{2}}\right)\frac{1}{(\nabla f)^2}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\nabla f)^2 \right\} = 0. \quad (75)$$

Уравнение (75) должно выполняться на поверхности $f = 0$. Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^5 x} = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^4 x}, \quad (76)$$

приведем уравнение (75) к виду (5):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \varepsilon\left\{\Delta f - \frac{(\nabla f \nabla)(\nabla f)^2}{2(\nabla f)^2}\right\}, \quad f = 0. \quad (77)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Jens Eggers and Marco A. Fontelos, Nonlinearity **22**, R1 (2009).
2. S. Allen and J. W. Cahn, Acta. Metall. **27**, 1084 (1979).
3. M. Kowalczyk, Ann. Mat. Pura Appl. **184**, 17 (2005).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматгиз, Наука, Москва (1963).
5. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).
6. J. W. Cahn and J. E. Hillard, J. Chem. Phys. **28**, 258 (1958).