ЖЭТФ, 2011, том 139, вып. 1, стр. 71–74

МОДЕЛЬ СТАТИЧЕСКОЙ ВСЕЛЕННОЙ В ОТО

*В. В. Карбановский**, *А. С. Тарасова*, *А. С. Салимова*, *Г. В. Билинская*, *А. Н. Сумбулов*

Мурманский государственный педагогический университет
183720, Мурманск, Россия

Поступила в редакцию 5 марта 2010 г.

Обсуждается проблема построения в рамках ОТО космологической модели Фридмана – Робертсона – Уокера как конфигурации из «обычной» материи. Предложен вариант ее решения, основанный на переходе к недиагональной метрике. В рамках рассматриваемого подхода исследована модель статической Вселенной. Показана возможность построения сценария без начальной сингулярности и «экзотической» материи. Обсуждается соответствие данной модели свойствам наблюдаемой Вселенной.

Как известно, одной из «классических» проблем ОТО является «начальная космологическая сингулярность». Ее сущность заключается в следующем. Согласно [1], метрика Фридмана – Робертсона – Уокера, описывающая однородную изотропную Вселенную, имеет вид

$$ds^2 = -b(t)\,dt^2 + a^2(t) \times \\ \times \left[\frac{R'^2(r)\,dr^2}{1-kR^2(r)} + R^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)\right], \quad (1)$$

где возможные значения $k = 0, \pm 1$ (штрих обозначает дифференцирование по r). Уравнения ОТО в этом случае сводятся к системе [2]

$$\kappa\varepsilon = \frac{3k}{a^2} + \frac{3\dot{a}^2}{a^2 b}, \quad (2а)$$

$$\kappa p = -\frac{k}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2 b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab^2} - \frac{2\ddot{a}}{ab} \quad (2б)$$

(ε — плотность энергии материи, p — ее давление). Посредством преобразования

$$d\tau = \sqrt{b}\,dt \quad (3)$$

в метрике (1) можно перейти к используемой обычно «синхронной» системе отсчета, в которой «темп времени» является одинаковым во всех точках пространства и во все эпохи космологической эволюции. В этом случае $b(t) = 1$ и из уравнений (2) можно получить

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\varepsilon + 3p). \quad (4)$$

*E-mail: karbanovski_v_v@mail.ru

Отсюда очевидно, что для материи, удовлетворяющей «стандартным» условиям

$$\varepsilon \geq p \geq 0, \quad (5)$$

кривая $a(t)$ всюду выпукла вверх (за исключением «истинного» вакуума $\varepsilon = p = 0$) и в некоторый момент времени пересекает ось абсцисс, т. е. $a = 0$. В этом и состоит проблема «начальной космологической сингулярности».

В работе [2] была исследована более общая модель, соответствующая несинхронной системе $b(t) \neq 1$. Было показано, что для уравнений (2) существует момент времени t_0, когда

$$\dot{a}(t_0) = 0, \quad b(t_0) = 0.$$

В результате вместо сингулярности $a = 0$ (которая, вообще говоря, не является «начальной», так как $\dot{a}(t_0) \neq 0$) имеет место «начальный горизонт событий», соответствующий черной дыре, непроходимой кротовой норе [3] или «экзотическому» случаю топологического перехода от (3+1)-пространства к 4-пространству [4], например, между лоренцевой и евклидовой кротовыми норами [5]. Однако такая конструкция также не обладает «нормальными» геометрическими свойствами.

В настоящей работе мы исследуем модель Вселенной Робертсона – Уокера «в недиагональной форме». Посредством преобразования

$$dt = d\tau - \frac{c}{b}\,dr, \quad (6)$$

где τ — новая временная переменная, $c = c(\tau, r)$, $b = b(\tau)$, метрика (1) приводится к виду

$$ds^2 = -b\,d\tau^2 + 2c\,d\tau\,dr + \left(\frac{a^2R'^2}{1-kR^2} - \frac{c^2}{b}\right)dr^2 + a^2R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2). \quad (7)$$

В этом случае уравнения ОТО сводятся к системе

$$\kappa\varepsilon = \frac{3k}{a^2} + \frac{3\dot a^2}{a^2 b} - \frac{c^2(1-kR^2)\dot a^2}{a^4b^2R'^2} - \frac{c^2(-1+kR^2)\dot a\dot b}{a^3b^3R'^2} - \frac{2c(2-3kR^2)\dot a}{a^3bRR'} - \frac{2c(-1+kR^2)\dot aR''}{a^3bR'^3} + \frac{2(-1+kR^2)\dot ac'}{a^3bR'^2} + \frac{2c(-1+kR^2)\dot a\dot c}{a^3b^2R'^2}, \quad (8а)$$

$$\kappa p_r = -\frac{k}{a^2} - \frac{\dot a^2}{a^2b} + \frac{\dot a\dot b}{ab^2} + \frac{c^2(-1+kR^2)\dot a^2}{a^4b^2R'^2} + \frac{2c^2(-1+kR^2)\dot a\dot b}{a^3b^3R'^2} - \frac{2c(-1+kR^2)\dot a}{a^3bRR'} + \frac{c(-1+kR^2)\dot b}{a^2b^2RR'} - \frac{2\ddot a}{ab} - \frac{2c^2(-1+kR^2)\ddot a}{a^3b^2R'^2} - \frac{2c(-1+kR^2)\dot a\dot c}{a^3b^2R'^2} - \frac{2(-1+kR^2)\dot c}{a^3bRR'}, \quad (8б)$$

$$\kappa p_\perp = -\frac{k}{a^2} - \frac{\dot a^2}{a^2b} + \frac{\dot a\dot b}{ab^2} - \frac{c^2\dot a^2(1-kR^2)}{a^4b^2R'^2} - \frac{c^2\dot a\dot b(1-kR^2)}{a^3b^3R'^2} + \frac{5c^2\dot b^2(-1+kR^2)}{4a^2b^4R'^2} - \frac{2\ddot a}{ab} + \frac{c\dot a(1-2kR^2)}{a^3bRR'} - \frac{c\dot b(1-2kR^2)}{2a^2b^2RR'} + \frac{c^2\ddot a(1-kR^2)}{a^3b^2R'^2} + \frac{c^2\ddot b(1-kR^2)}{2a^2b^3R'^2} - \frac{c\dot aR''(1-kR^2)}{a^3bR'^2} + \frac{c\dot bR''(1-kR^2)}{2a^2b^2R'^3} + \frac{c'\dot a(1-kR^2)}{a^3bR'^2} - \frac{c\dot b(1-kR^2)}{2a^2b^2R'^2} - \frac{c\dot a\dot b(1-kR^2)}{a^3b^2R'^2} - \frac{5c\dot b\dot c(1-kR^2)}{2a^2b^3R'^2} + \frac{\dot c(1-2kR^2)}{a^2bRR'} - \frac{R''\dot c(1-kR^2)}{a^2bR'^3} + \frac{\dot c^2(1-kR^2)}{a^2b^2R'^2} + \frac{\dot c'(1-kR^2)}{a^2bR'^2} + \frac{c\dot c(1-kR^2)}{a^2b^2R'^2}, \quad (8в)$$

$$\kappa\sigma = c^2\left(\frac{2(-1+2kR^2)\dot a}{a^3b^2RR'} + \frac{(-1+kR^2)\dot b}{a^2b^3RR'} + \frac{2(-1+kR^2)\dot aR''}{a^3b^2R'^3}\right) + c\left(\frac{2k}{a^2b} + \frac{2(-1+kR^2)\dot ac'}{a^3b^2R'^2} - \frac{2(-1+kR^2)\dot c}{a^2b^2RR'}\right) \quad (8г)$$

(здесь точка обозначает дифференцирование по τ, $p_r = T_1^1$, $p_\perp = T_2^2 = T_3^3$ — радиальное и тангенциальное давления материи, $\sigma = T_1^0$ — плотность потока энергии вдоль r). Из (8) следует, что материя в выбранных координатах не является идеальной жидкостью. Кроме того, ее плотность энергии и давление зависят не только от времени, но и от r.

Следовательно, в рамках предлагаемого подхода оказывается принципиально возможным дать объяснение наличию локальных пространственных неоднородностей в распределении вещества Вселенной. При этом σ можно интерпретировать как «радиальное» реликтовое излучение. Следует отметить также, что путем преобразования угловых переменных в выражении (7) можно «индуцировать» компоненты T_2^0 и T_3^0 тензора энергии-импульса космологической материи, что соответствует наблюдаемой COBE анизотропии космического микроволнового фона. Однако такая процедура приведет к значительному усложнению уравнений ОТО. Поэтому ее рассмотрение будет предметом дальнейших исследований.

Здесь же в качестве некоторого «интересного» варианта, произведем построение статической космологической модели (аналог Вселенной Эйнштейна), что соответствует условию $a = \mathrm{const}$. В этом случае система (8) примет вид

$$\kappa\varepsilon = \frac{3k}{a^2}, \quad (9а)$$

$$\kappa\sigma = -\frac{(1-kR^2)c^2\dot b}{a^3b^3RR'} + c\left(\frac{2k}{a^2b} + \frac{2(1-kR^2)\dot c}{a^2b^2RR'}\right), \quad (9б)$$

$$\kappa p_r = -\frac{k}{a^2} - \frac{(1-kR^2)c\dot b}{a^2b^2RR'} + \frac{2(1-kR^2)\dot c}{a^2bRR'}, \quad (9в)$$

$$\kappa p_\perp = -\frac{k}{a^2} + \frac{5c^2\dot b^2(1-kR^2)}{4a^2b^4R'^2} - \frac{c\dot b(1-2kR^2)}{2a^2b^2R'^2} + \frac{c^2\ddot b(1-kR^2)}{2a^2b^3R'^2} + \frac{c\dot bR''(1-kR^2)}{2a^2b^2R'^3} - \frac{bc'(1-kR^2)}{2a^2b^2R'^2} - \frac{5c\dot b\dot c(1-kR^2)}{2a^2b^3R'^2} + \frac{\dot c(1-2kR^2)}{a^2bRR'} - \frac{R''\dot c(1-kR^2)}{a^2bR'^3} + \frac{\dot c^2(1-kR^2)}{a^2b^2R'^2} + \frac{\dot c'(1-kR^2)}{a^2b'^2} + \frac{c\ddot c(1-kR^2)}{a^2b^2R'^2}. \quad (9г)$$

Из уравнения (9а) следует, что плотность энергии в данном случае оказывается постоянной. Поэтому для выполнения «принципа причинности»

$$0 \le \frac{\dot{p}_r}{\dot{\varepsilon}} \le 1, \qquad (10а)$$

$$0 \le \frac{\dot{p}_\perp}{\dot{\varepsilon}} \le 1, \qquad (10б)$$

величины p_r и $p_\perp$ также должны быть постоянными. Тогда из уравнения (9в) следует

$$\frac{1-kR^2}{a^2bRR'}\left(2\dot{c}-\frac{c\dot{b}}{b}\right)=\alpha, \qquad (11)$$

где константа α определяется неравенством

$$\frac{k}{a^2} \le \alpha \le \frac{4k}{a^2} \qquad (12)$$

(в соответствии с требованиями (5)). Интегрируя (11), получим выражение

$$c = f(r,\tau)b^{1/2} \qquad (13)$$

с функцией $f(\tau, r)$, имеющей вид

$$f = \frac{\alpha}{2}\frac{RR'}{1-kR^2}\int b^{1/2}d\tau. \qquad (14)$$

Подставляя (13) и (14) в (9б), находим

$$\kappa\sigma = \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{k}{a^2}\right)\frac{\alpha RR'}{1-kR^2}b^{-1/2}\int b^{1/2}d\tau. \qquad (15)$$

Если в качестве простейшего случая считать материю излучающей идеальной жидкостью, $p_r = p_\perp$, то должно выполняться условие

$$\frac{\ddot{b}}{b^2}\left(\int b^{1/2}d\tau\right)^2 = -\frac{a^2}{\alpha}(\alpha a^2+2k). \qquad (16)$$

Его можно свести к уравнению

$$2\frac{\ddot{b}b^{(4)}}{b^2} - 3\left(\frac{b^{(3)}}{b}\right)^2 + 3\frac{\dot{b}\ddot{b}b^{(3)}}{b^3} - \\ - 4\left(\frac{\ddot{b}}{b}\right)^3 + 2\left(\frac{\dot{b}\ddot{b}}{b^2}\right)^2 = 0 \qquad (17)$$

(обозначения $b^{(3)}$, $b^{(4)}$ соответствуют порядкам производных функции $b(\tau)$). В свою очередь, уравнение (17) можно преобразовать к следующему виду:

$$2v^2(v+u^2)\frac{d^2v}{du^2} - v(v-2u^2)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \\ - uv(7v-5u^2)\frac{dv}{du} + 2v^2(v-5u^2) = 0, \qquad (18)$$

где $v = \dot{u}$, $u = \dot{b}/b$. Общее решение уравнения (18) не выражается в квадратурах. Очевидно, однако, что его частным решением (при $v = 0$) является

$$b = e^{-\gamma\tau}, \qquad (19)$$

где γ — положительная константа. Функция (19) является несингулярной при всех конечных значениях τ и обладает горизонтом событий при $\tau \to \infty$. Таким образом, включающее ее решение может рассматриваться как «реалистическое». Подставляя (19) в (15), получим

$$\kappa\sigma = -\left(\alpha+\frac{2k}{a^2}\right)\frac{\alpha RR'}{1-kR^2}\gamma. \qquad (20)$$

Таким образом, в рассматриваемой модели плотность потока энергии σ оказывается направленной «внутрь» вещества. Далее, подставляя функцию (19) в выражение (7) и учитывая (13) и (14), получим

$$ds^2 = -e^{-\gamma\tau}d\tau^2 - 2\frac{\alpha RR'}{\gamma(1-kR^2)}e^{-\gamma\tau}d\tau\,dr + \\ + \left[\frac{a^2R'^2}{1-kR^2} - \left(\frac{\alpha RR'}{\gamma(1-kR^2)}\right)^2 e^{-\gamma\tau}\right]dr^2 + \\ + a^2R^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2). \qquad (21)$$

Очевидно, при условии

$$a > \alpha R/\gamma(1-kR^2)^{-1/2}$$

метрика (21) не содержит сингулярности при конечных значениях τ. Горизонт событий имеет место только при $\tau \to \infty$.

Таким образом, в рамках предлагаемого подхода удается построить статическую космологическую модель из «обычной» материи. При малых значениях γ и очень больших a она может соответствовать свойствам наблюдаемой Вселенной. Кроме того, функция $b(\tau)$ при малых γ является медленно меняющейся за конечный интервал времени. Поэтому возникает представление о неизменной скорости света и синхронной системе отчета. Как известно, данные условия считаются справедливыми в рамках традиционного подхода. Однако в нашем случае $b(\tau)$ является переменной величиной. В результате оказывается возможным построение сценария без начальной сингулярности и «экзотической» материи. В качестве интерпретации варианта с $b \ne 1$ можно рассматривать «переменность» скорости света, широко обсуждаемую в настоящее время, или изменение «темпа времени» (т. е. «хода процессов») в различные эпохи космологической эволюции. Выбор координат с $g_{01} = c \ne 0$ приводит к выводу о наличии указанных явлений в различных точках Вселенной. Иными словами, понятия «прошлого», «настоящего» и «будущего» зависят от «пункта наблюдения» в пространстве.

Следует отметить, что в рамках предлагаемого нами подхода метрика остается однородной и изотропной, тогда как в распределении материи может иметь место анизотропия ($p_r \neq p_\perp$) и зависимость материальных функций от радиальной координаты. Таким образом, в ОТО оказывается принципиально возможным согласовать геометрию Фридмана – Робертсона – Уокера с наблюдаемым локальным распределением материи.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Вайнберг, *Гравитация и космология*, Мир, Москва (1975).
2. V. V. Karbanovski et al., IJTP **35**, 2191 (1996).
3. M. S. Morris et al., Phys. Rev. Lett. **61**, 1446 (1988).
4. G. Ellis et al., Class. Quant. Grav. **9**, 1535 (1992).
5. И. М. Халатников, П. Шиллер, Письма в ЖЭТФ **57**, 3 (1993).