ЖЭТФ, 2010, том 138, вып. 3 (9), стр. 399–401

О РАССЕЯНИИ МЕДЛЕННЫХ ЧАСТИЦ НА «СЛАБОМ» ДВУМЕРНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Б. Я. Балагуров[*]

Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 4 февраля 2010 г.

Рассмотрена задача об упругом рассеянии низкоэнергетических частиц на «слабом» двумерном потенциале U, не обладающем аксиальной симметрией. Найдено выражение для амплитуды рассеяния в этом приближении и показано, что при $U < 0$ она имеет полюс при энергии E_0 соответствующего слабосвязанного состояния. Для множителя, уточняющего известную порядковую оценку для E_0, получено явное выражение через потенциал U.

1. Задача об упругом рассеянии медленных частиц на двумерном потенциале, обладающем аксиальной симметрией, решена в общем виде в книге [1]. В полученную в книге [1] формулу для амплитуды s-рассеяния входит некоторая феноменологическая константа, значение которой следует определять, решая уравнение Шредингера при нулевой энергии. В работе [2] в случае слабого аксиально-симметричного потенциала U для этой константы найдено явное выражение через U. В настоящей заметке показано, что этот результат может быть обобщен и на случай потенциала, не обладающего аксиальной симметрией. Аналогичное обобщение происходит и в формуле для энергии связанного состояния E_0 в таком потенциале.

2. Рассмотрим рассеяние плоской волны e^{ikx} на двумерном потенциале $U(\boldsymbol{\rho})$, не обладающем, вообще говоря, аксиальной симметрией. Запишем потенциальную энергию $U(\boldsymbol{\rho})$ в виде $U(\boldsymbol{\rho}) = U^0 v(\boldsymbol{\rho})$, где U^0 — амплитуда потенциала, а безразмерная функция $v(\boldsymbol{\rho})$ задает его форму. Стационарное уравнение Шредингера в этом случае может быть записано в виде

$$\nabla_{\boldsymbol{\rho}}{}^2\psi(\boldsymbol{\rho}) + k^2\psi(\boldsymbol{\rho}) = \alpha v(\boldsymbol{\rho})\psi(\boldsymbol{\rho}), \tag{1}$$

где $k^2 = 2mE/\hbar^2$, $\alpha = 2mU^0/\hbar^2$. Относительно функции $v(\boldsymbol{\rho})$ будем предполагать, что она достаточно быстро убывает с ростом ρ.

При $\rho \gg R$, где R — радиус действия поля (см. формулу (15)), в уравнении (1) можно пренебречь правой частью. В этой области расстояний волновая функция в случае медленных ($kR \ll 1$) частиц имеет вид [1]

$$\psi = e^{ikx} + f_0\sqrt{\frac{\pi k}{2}}\, iH_0^{(1)}(k\rho). \tag{2}$$

Здесь $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля и f_0 — искомая амплитуда рассеяния.

С другой стороны, при $k\rho \ll 1$ в уравнении Шредингера может быть опущено слагаемое с энергией, так что в области $\rho \gg R$ вместо (1) получаем уравнение Лапласа. В этом случае для волновой функции будем иметь следующее выражение:

$$\psi \approx A(1 + B\ln\rho), \quad R \ll \rho \ll 1/k. \tag{3}$$

Формула (2) также справедлива в интервале расстояний $R \ll \rho \ll 1/k$ и поэтому должна «сшиваться» с (3) при ρ, удовлетворяющих этим условиям. В результате, используя известное разложение для $H_0^{(1)}(z)$ при малых z, находим

$$f_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\left[\ln\frac{2i}{\gamma k} + \frac{1}{B}\right]^{-1}, \tag{4}$$

где $\ln\gamma = C = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера. Формула (4), аналогичная полученной в книге [1] (задача №7 к §132), дает функциональную зависимость амплитуды рассеяния от энергии при $kR \ll 1$.

Входящая в выражение (4) константа B не зависит от энергии и должна определяться из решения уравнения

$$\nabla_{\boldsymbol{\rho}}{}^2\varphi(\boldsymbol{\rho}) = \alpha v(\boldsymbol{\rho})\varphi(\boldsymbol{\rho}) \tag{5}$$

[*] E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru, byabalagurov@mail.ru

для функции $\varphi(\boldsymbol{\rho}) = \psi(\boldsymbol{\rho})/A$, регулярной при $\rho = 0$ и имеющей асимптотику

$$\rho \to \infty: \quad \varphi(\boldsymbol{\rho}) = 1 + B\ln\rho. \tag{6}$$

Для слабого потенциала ($|\alpha|R^2 \ll 1$) величина B может быть найдена по теории возмущений.

3. Для того чтобы развить соответствующую теорию возмущений, нужно перейти от дифференциального к интегральному уравнению для функции $\varphi(\boldsymbol{\rho})$. Воспользуемся для этого функцией Грина $G(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')$ для уравнения Лапласа, определенной согласно выражению

$$\nabla_{\boldsymbol{\rho}}{}^2 G(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}') = \delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}') \tag{7}$$

и имеющей в рассматриваемом двумерном случае вид

$$G(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}') = \frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|. \tag{8}$$

С помощью функции Грина (8) обычным образом из дифференциального уравнения (5) получаем искомое интегральное уравнение для функции $\varphi(\boldsymbol{\rho})$:

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi}\int \ln|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|\varphi(\boldsymbol{\rho}')v(\boldsymbol{\rho}')\,d\boldsymbol{\rho}', \tag{9}$$

где интегрирование проводится по всей плоскости (x', y').

При $\rho \to \infty$ из уравнения (9) для функции $\varphi(\boldsymbol{\rho})$ следует асимптотика вида (6) с формальным выражением для величины B:

$$B = \frac{\alpha}{2\pi}\int \varphi(\boldsymbol{\rho})v(\boldsymbol{\rho})\,d\boldsymbol{\rho}. \tag{10}$$

4. Уравнение (9) в случае слабого потенциала решаем разложением по степеням малого параметра $|\alpha|R^2 \ll 1$:

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}) = 1 + \varphi^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) + \varphi^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) + \ldots, \tag{11}$$

где $\varphi^{(n)} \sim (|\alpha|R^2)^n$. Подстановка (11) в (9) дает

$$\begin{gathered}\varphi^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\alpha}{2\pi}\int \ln|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|v(\boldsymbol{\rho}')\,d\boldsymbol{\rho}', \ldots, \\ \varphi^{(n)}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\alpha}{2\pi}\int \ln|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|\varphi^{(n-1)}(\boldsymbol{\rho}')v(\boldsymbol{\rho}')\,d\boldsymbol{\rho}'.\end{gathered} \tag{12}$$

Соответственно для величины B из формулы (10) следует, что

$$\begin{gathered}B = B^{(1)} + B^{(2)} + \ldots, \\ B^{(n)} = \frac{\alpha}{2\pi}\int \varphi^{(n-1)}(\boldsymbol{\rho})v(\boldsymbol{\rho})\,d\boldsymbol{\rho}.\end{gathered} \tag{13}$$

Подстановка $\varphi^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) = 1$ в (13) дает

$$B^{(1)} = \frac{1}{2}\alpha R^2, \tag{14}$$

где радиус действия поля R введен согласно равенству

$$\pi R^2 = \int v(\boldsymbol{\rho})\,d\boldsymbol{\rho}. \tag{15}$$

Для $B^{(2)}$ получаем выражение

$$B^{(2)} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \iint \ln|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|v(\boldsymbol{\rho})v(\boldsymbol{\rho}')\,d\boldsymbol{\rho}\,d\boldsymbol{\rho}', \tag{16}$$

которое преобразуем к виду

$$B^{(2)} = \left(\frac{\alpha R^2}{2}\right)^2 \bigl(\ln R + I\bigr), \tag{17}$$

где

$$I = \frac{1}{\pi^2 R^4}\iint \ln\frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}{R}\,v(\boldsymbol{\rho})v(\boldsymbol{\rho}')\,d\boldsymbol{\rho}\,d\boldsymbol{\rho}' \tag{18}$$

— безразмерная константа.

5. Для величины

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{B^{(1)}} - \frac{B^{(2)}}{\bigl(B^{(1)}\bigr)^2} + \ldots \tag{19}$$

с учетом (14) и (17) имеем

$$\frac{1}{B} \approx \frac{2}{\alpha R^2} - \bigl(\ln R + I\bigr), \tag{20}$$

так что из (4) находим выражение для амплитуды рассеяния:

$$f_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\,\left[\ln\frac{2i}{\gamma kR} + \frac{2}{\alpha R^2} - I\right]^{-1} \tag{21}$$

с константой I из формулы (18). Выражение (21) по виду совпадает с полученной в работе [2] формулой для амплитуды рассеяния медленных частиц в случае двумерного аксиально-симметричного потенциала. Различия состоят в определении радиуса действия поля R и константы I.

Для потенциала притяжения ($\alpha < 0$) амплитуда f_0 из (21) имеет полюс при энергии $\varepsilon = -\varkappa^2$, где $\varkappa$ определяется из уравнения

$$\ln\frac{\gamma\varkappa R}{2} = -\frac{2}{|\alpha|R^2} - I. \tag{22}$$

Решая, как и в работе [2], задачу о связанном состоянии в «мелкой» потенциальной яме, можно убедиться, что уравнение (22) дает соответствующий уровень энергии

$$\varepsilon_0 = -\varkappa^2 = -\frac{4}{\tilde{\gamma}^2 R^2}\,\exp\left\{-\frac{4}{|\alpha|R^2}\right\}, \tag{23}$$

где

$$\ln\tilde{\gamma} = \ln\gamma + I = C + I. \qquad (24)$$

В обычных единицах для энергии слабосвязанного состояния получаем следующее выражение:

$$E_0 = -\frac{2}{\tilde{\gamma}^2}\frac{\hbar^2}{mR^2} \times \exp\left\{-\frac{2\pi\hbar^2}{m}\left|\int U(\boldsymbol{\rho})\,d\boldsymbol{\rho}\right|^{-1}\right\}, \qquad (25)$$

обобщающее результаты, полученные в работах [1, 2], на случай потенциала, не обладающего аксиальной симметрией.

Для потенциала с аксиальной симметрией из формулы (25) (без множителя $2/\tilde{\gamma}^2$) следует известная порядковая оценка для E_0 [1]. В то же время в формуле (18) для константы I, входящей в выражение для $\tilde{\gamma}$, можно провести интегрирование по углам. В результате для I находим выражение

$$I = \frac{2}{R^2}\int\limits_0^\infty \ln\frac{\rho}{R}\,v(\rho)\rho\,d\rho + \frac{4}{R^4}\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_0^\rho \ln\frac{\rho}{t}\,v(t)t\,dt\right]v(\rho)\rho\,d\rho, \qquad (26)$$

совпадающее с полученным в работе [2]. Для «прямоугольного» потенциала $v(\rho) = \theta(R-\rho)$ (где $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$) из формулы (26) следует, что $I = -1/4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).

2. Б. Я. Балагуров, ЯФ **73**, 122 (2010).