ЖЭТФ, 2010, том 137, вып. 5, стр. 926–931

ЭНЕРГИЯ И КРИТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПАРАМЕТРА ИОННОЙ СВЯЗИ ТРЕХМЕРНОГО БИПОЛЯРОНА БОЛЬШОГО РАДИУСА

В. Д. Лахно [*]

Институт математических проблем биологии Российской академии наук
142290, Пущино, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 31 августа 2009 г.

Развита теория биполярона сильной связи большого радиуса. Обсуждается возможность образования трехмерных биполяронов в высокотемпературных сверхпроводниках. Для энергии биполярона получена низшая вариационная оценка при $\alpha > 8$, где α — константа электрон-фононной связи. Для критического параметра ионной связи $\eta_c = \varepsilon_\infty/\varepsilon_0$, где ε_∞, ε_0 — высокочастотная и статическая диэлектрические проницаемости, получено значение $\eta_c = 0.2496$.

Интерес к электрон-фононным взаимодействиям (ЭФВ) обусловлен не только их общефизическим значением, но и их возможными приложениями в теории сверхпроводимости. Исследования многочисленных явлений, в которых ЭФВ играет определяющую роль, находились в центре внимания всего периода становления современной физики. Важное место среди фундаментальных задач, связанных с изучением электрон-фононных взаимодействий, занимает проблема биполярона. Большое внимание, уделяемое в последние годы проблеме биполярона, связано с попытками объяснить явление сверхпроводимости на основе механизма бозе-конденсации биполяронного газа. В связи с этим изучение условий, при которых биполяронные состояния будут стабильны, имеет первостепенное значение. Подробное изложение теории биполяронов большого радиуса, которые в настоящее время являются основными кандидатами на роль заряженных бозонов, образующих конденсат Бозе–Эйнштейна в реальном пространстве, дается в обзорах [1, 2].

Изучение процесса образования устойчивого двухэлектронного состояния в кристалле, или биполярона, как правило, связано с нахождением парного взаимодействия между двумя поляронами как функции расстояния между ними. Для биполярона большого радиуса область его существования ограничена со стороны фрелиховской константы ЭФВ α довольно большим значением $\alpha_c = 6.8$ [3], ниже которого связанное биполяронное состояние не существует. В связи с требованием большой величины α_c, которое может не выполняться в высокотемпературных сверхпроводниках, ряд работ был посвящен изучению вклада других типов взаимодействия и симметрий спаривания [4, 5].

В данной работе ограничимся рассмотрением только фрелиховского ЭФВ, поскольку рассматриваемый ниже подход можно обобщить и на другие типы взаимодействий. Это представляется тем более актуальным, поскольку в последнее время были получены веские аргументы, чтобы считать ЭФВ в высокотемпературных сверхпроводниках сильным [6–8]. Имеются также аргументы в пользу того, что вследствие слабой экранировки высокочастотных оптических фононов ЭФВ в высокотемпературных сверхпроводниках более адекватно описывать не в рамках контактного взаимодействия холстейновской модели полярона [9], а посредством дальнодействующего ЭФВ фрелиховского типа [10].

Для гамильтониана Фрелиха низшие значения энергии биполяронных состояний, определяемых ЭФВ, для $\alpha < 8$ были получены в [3, 11, 12], а для $\alpha > 8$ в [12–15].

Вплоть до настоящего времени многочисленные попытки найти трансляционно-инвариантное решение биполяронной проблемы вариационными методами посредством прямой вариации волновой функции (ВФ) двухэлектронной системы [1, 16, 17] приводили к бóльшим значениям энергии основного состояния биполярона, чем те, в которых использовалась

[*] E-mail: lak@impb.psn.ru

ВФ, не обладающая трансляционной инвариантностью [11, 12, 15, 18].

Целью данной работы является получение низшей вариационной оценки энергии биполярона в рамках трансляционно-инвариантного подхода и интерпретация полученных результатов применительно к возможности биполяронной высокотемпературной сверхпроводимости.

Наше рассмотрение основывается на преобразовании Гейзенберга, которое было использовано в работе [19] для исключения пространственных координат из поляронного гамильтониана. Будучи примененным к случаю биполярона, это преобразование приводит к гамильтониану, содержащему только разности координат электронов, что делает его автоматически трансляционно-инвариантным.

Будем исходить из гамильтониана Фрелиха для биполярона:

$$\begin{aligned}\hat{H} = &-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{r_1} - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{r_2} + \\ &+\sum_k \hbar\omega a_k^\dagger a_k + U(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|) + \\ &+\sum_k (V_k e^{ikr_1} a_k + V_k e^{ikr_2} a_k + \text{H.c.}),\\ U(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|) &= \frac{e^2}{\varepsilon_\infty|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|},\end{aligned} \tag{1}$$

где m — эффективная масса электрона; $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ — координаты соответственно первого и второго электрона; $a_k^\dagger$, a_k — операторы рождения и уничтожения фононов с энергией $\hbar\omega$,

$$V_k = \frac{e}{k}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{\tilde{\varepsilon}V}}, \quad \tilde{\varepsilon}^{-1} = \varepsilon_\infty^{-1} - \varepsilon_0^{-1}, \tag{2}$$

где e — заряд электрона, ε_∞ и ε_0 — высокочастотная и статическая диэлектрические проницаемости, V — объем системы.

В системе центра масс гамильтониан (1) примет вид

$$\begin{aligned}\hat{H} = &-\frac{\hbar^2}{2M_e}\Delta_R - \frac{\hbar^2}{2\mu_e}\Delta_r + U(|\mathbf{r}|) + \sum_k \hbar\omega a_k^\dagger a_k + \\ &+\sum_k 2\cos\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}{2}(V_k a_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} + \text{H.c.}),\\ \mathbf{R} &= \frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,\\ M_e &= 2m, \quad \mu_e = m/2.\end{aligned} \tag{3}$$

В дальнейшем будем полагать $\hbar = 1$, $\omega = 1$, $M_e = 1$ (соответственно $\mu_e = 1/4$).

Координаты центра масс $\mathbf{R}$ могут быть исключены из гамильтониана (3) посредством канонического преобразования Гейзенберга

$$\hat{S}_1 = \exp\{-i\sum_k \mathbf{k}\, a_k^\dagger a_k\}\mathbf{R}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{H}} = \hat{S}_1^{-1}\,\hat{H}\,\hat{S}_1 = -2\Delta_r + U(|\mathbf{r}|) + \sum_k a_k^\dagger\, a_k + \\ + \sum_k 2\cos\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}{2}(V_k\, a_k + V_k^*\, a_k^\dagger) + \\ + \frac{1}{2}\left(\sum_k \mathbf{k}\, a_k^\dagger\, a_k\right)^2.\end{aligned} \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что точное решение биполяронной проблемы определяется волновой функцией $\Psi(r)$, содержащей только относительные координаты r, и, таким образом, являющейся трансляционно-инвариантной.

Усреднение $\hat{\tilde{H}}$ по $\Psi(r)$ приводит к гамильтониану $\hat{\bar{\tilde{H}}}$:

$$\begin{aligned}\hat{\bar{\tilde{H}}} = \frac{1}{2}(\sum_k \mathbf{k}\, a_k^\dagger\, a_k)^2 + \sum_k a_k^\dagger\, a_k + \\ + \sum_k \bar{V}_k(a_k + a_k^\dagger) + \bar{T} + \bar{U},\end{aligned} \tag{6}$$

$$\bar{V}_k = 2V_k\langle\Psi|\cos\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}{2}|\Psi\rangle, \quad \bar{U} = \langle\Psi|U(r)|\Psi\rangle,$$

$$\bar{T} = -2\langle\Psi|\Delta_r|\Psi\rangle.$$

Каноническое преобразование Ли, Лоу и Пайнса (LLP) [19] этого гамильтониана

$$\hat{S}_2 = \exp\left\{\sum_k f_k\,(a_k - a_k^\dagger)\right\} \tag{7}$$

дает

$$\hat{\tilde{\bar{\tilde{H}}}} = \hat{S}_2^{-1}\,\hat{\bar{\tilde{H}}}\,\hat{S}_2, \quad \hat{\tilde{\bar{\tilde{H}}}} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 = \bar{T} + \bar{U} + 2\sum_k \bar{V}_k f_k + \sum_k f_k^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_k \mathbf{k} f_k\right)^2 + \\ + \sum_k \left(1 + \frac{k^2}{2} + \mathbf{k}\sum_{k'}\mathbf{k}' f_{k'}^2\right) a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}\sum_{k,\,k'}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')\times \\ \times f_k\, f_{k'}(a_k\, a_{k'} + a_k^\dagger\, a_{k'}^\dagger + a_k^\dagger\, a_{k'} + a_k\, a_{k'}^\dagger),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\hat{H}_1 = \sum_k \left[\bar{V}_k + f_k \left(1 + \frac{k^2}{2} + \mathbf{k} \sum_{k'} \mathbf{k}' f_{k'}^2 \right) \right] (a_k + a_k^\dagger) + \\ + \sum_{k,k'} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') [f_{k'} a_k^\dagger a_k a_{k'} + f_{k'} a_k^\dagger a_{k'}^\dagger a_k] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k,k'} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') a_k^\dagger a_{k'}^\dagger a_k a_{k'}. \quad (10)$$

Заметим, что переход к гамильтониану (8), осуществляемый посредством канонического преобразования $a_k \to a_k - f_k$, в отличие от аналогичного преобразования $a_k \to a_k - V_k \rho_k^* / \hbar\omega$ (где ρ_k^* — фурье-компонента плотности зарядового распределения) непосредственно в исходном гамильтониане (1), приводит скорее к случаю слабой, чем сильной связи. Рассмотрим эту ситуацию подробнее в случае одного полярона, гамильтониан которого имеет вид

$$\hat{H}_p = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_r + \sum_k (V_k e^{ikr} a_k + \text{H.c}) + \\ + \sum_k \hbar\omega a_k^\dagger a_k. \quad (11)$$

Результаты сильной связи получаются из формулы (11) немедленно при выборе пробной ВФ в виде

$$|\Psi\rangle = \varphi(r) \exp \sum_k V_k \frac{\rho_k^*}{\hbar\omega} (a_k - a_k^\dagger) |0\rangle. \quad (12)$$

С использованием (12) выражение для полной энергии $E = \langle \Psi | \hat{H}_p | \Psi \rangle$ приводит к пекаровскому функционалу полярона сильной связи:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla \varphi|^2 d^3 r - \sum_k \frac{V_k^2}{\hbar\omega} \rho_k^* \rho_k. \quad (13)$$

В подходе LLP исходный гамильтониан (11) посредством канонического преобразования вида (4) преобразовывается в гамильтониан

$$\hat{H}'_p = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\sum_k (\mathbf{k} a_k^\dagger a_k) \right)^2 + \sum_k V_k (a_k + a_k^\dagger) + \\ + \sum_k \hbar\omega a_k^\dagger a_k. \quad (14)$$

Для нахождения энергии основного состояния, отвечающего $\hat{H}'_p$, LLP выбирают пробную ВФ в виде

$$\Psi = \hat{S}_2 |0\rangle. \quad (15)$$

Величина f_k в $\hat{S}_2$ (7) определяется при минимизации энергии $E = \langle 0 | \hat{S}_2^{-1} | \hat{H}'_p | \hat{S}_2 | 0 \rangle$, что дает

$$E = 2 \sum_k f_k V_k + \frac{\hbar^2}{2m} \left[\sum_k \mathbf{k} f_k^2 \right]^2 + \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} f_k^2 + \\ + \sum_k \hbar\omega f_k^2, \quad (16)$$

$$f_k = -\frac{V_k}{\hbar\omega + \hbar^2 k^2 / 2m}. \quad (17)$$

Подстановка формулы (17) в (16) дает $E = -\alpha\hbar\omega$ — энергию полярона в пределе слабой связи. Таким образом, желание построить трансляционно-инвариантную теорию полярона посредством перехода к бескоординатному гамильтониану LLP сталкивается с проблемой невоспроизводимости предела сильной связи. Можно сказать, что ВФ

$$|\Psi_{LLP}\rangle = \exp \left\{ -i \sum_k \mathbf{k} a_k^\dagger a_k \right\} r \times \\ \times \exp \left\{ \sum_k f_k (a_k - a_k^\dagger) \right\} |0\rangle, \quad (18)$$

выбранная LLP для расчета энергии полярона, определяемой гамильтонианом (11) в пределе сильной связи, является плохой пробной ВФ.

Все сказанное относится и к случаю биполярона: применение метода LLP к бескоординатному гамильтониану (6) приводит к пределу слабой связи, в котором связанное биполяронное состояние оказывается невозможным [20]. Попытка решить эту проблему была предпринята в работе [17]. В этой работе использовалась гибридная ВФ, сконструированная с помощью ВФ (12) и (18). Такой подход автоматически приводит к потере трансляционной инвариантности и не добавляет каких-либо новых результатов в теории биполярона.

Решение проблемы перехода к случаю сильной связи в бескоординатном гамильтониане было найдено в работе [21] в течение длительного времени остававшейся в тени.

Для минимизации энергии, определяемой $\hat{\bar{\bar{H}}}$, в работе [21] была выбрана ВФ $|\Lambda_0\rangle$, являющаяся собственной функцией оператора $\hat{H}_0$ (9):

$$|\Lambda_0\rangle = c \exp \frac{1}{2} \left[\iint a_k^\dagger A_{kk'} a_{k'}^\dagger \, dk \, dk' \right] |0\rangle, \\ \hat{A}^* = \hat{M}_- \hat{M}_+^{-1}, \quad (19)$$

где c — нормировочная константа. Операторы $\hat{M}_\pm$ определяются матричными элементами

$$(\hat{M}_{\pm})_{kk'} = \frac{1}{2}(\omega_k\omega_{k'})^{-1/2}(\omega_k \pm \omega_{k'}) \times \\ \times \left[\delta(k-k') + \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' f_k f_{k'} \frac{2(\omega_k\omega_{k'})^{1/2}}{(\omega_{k'}^2 - \omega_k^2 \pm i\varepsilon)D_{\pm}(\omega_k^2)}\right], \quad (20)$$

$$D_{\pm}(\omega_p^2) = 1 + \frac{1}{3\pi^2}\int \frac{f_k^2 k^4 \omega_k}{\omega_k^2 - \omega_p^2 \mp i\varepsilon}\, dk, \\ \omega_k = 1 + \frac{k^2}{2} + \mathbf{k}\sum_{k'} \mathbf{k}' f_{k'}^2. \quad (21)$$

Как показано в работе [21], такой выбор пробной ВФ обращает математическое ожидание для гамильтониана H_1 в нуль.

В результате, используя приближенную волновую функцию Ψ_0 для биполяронного гамильтониана (1) в виде

$$|\Psi_0\rangle = \Psi(r)\exp\left\{-i\sum_k \mathbf{k} a_k^\dagger a_k \mathbf{R}\right\} \times \\ \times \exp\left\{\sum_k f_k (a_k - a_k^\dagger)\right\}|\Lambda_0\rangle, \quad (22)$$

для энергии биполярона получим

$$E = \Delta E + 2\sum_k \bar{V}_k f_k + \sum_k f_k^2 + \bar{T} + \bar{U}, \quad (23)$$

где

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \frac{k^4 f_k^2\, dk}{1+Q} + \frac{1}{12\pi^4}\int_0^\infty k^4 p^4 f_k^2 f_p^2 \times \\ \times \frac{\omega_p(\omega_k\omega_p + \omega_k(\omega_k+\omega_p)+1)}{(\omega_k+\omega_p)^2(\omega_p^2-1)|D_+(\omega_p^2)|^2}\, dp\, dk, \quad (24) \\ Q = \frac{1}{3\pi^2}\int_0^\infty \frac{k^4 f_k^2 \omega_k}{\omega_k^2 - 1}\, dk.$$

Из формул (23), (24) можно получить уравнения для определения энергии биполярона, варьируя E по f_k и Ψ. Подстановка f_k и Ψ, полученных посредством решения этих уравнений, в выражение (23) дает значение энергии биполярона E. Так как решение полученных таким образом уравнений представляет большие трудности, используем вариационный подход, полагая

$$f_k = -\bar{V}_k, \quad \Psi(r) = \left(\frac{2}{\pi l^2}\right)^{3/4}\exp\left(-\frac{r^2}{l^2}\right), \quad (25)$$

где l — вариационный параметр. Подстановка формулы (25) в (23), (24) приводит к следующему выражению для энергии биполярона E:

$$E = \frac{26.25}{l^2} - \frac{8}{\sqrt{\pi}}\left[2 - \frac{1/\sqrt{2}}{1-\eta}\right]\frac{\alpha}{l}, \quad (26)$$

где $\eta = \varepsilon_\infty/\varepsilon_0$, $\alpha = (e^2/\hbar\tilde{\varepsilon})\sqrt{m/2\hbar\omega}$ — константа электрон-фононной связи. Величина E (26) имеет минимум при

$$l \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\cdot 6.56\,\frac{1}{2 - \dfrac{1/\sqrt{2}}{1-\eta}}. \quad (27)$$

Это приводит к энергии основного состояния, равной

$$E \approx -0.194\left[2 - \frac{1/\sqrt{2}}{1-\eta}\right]^2 \alpha^2. \quad (28)$$

Из формулы (28) вытекает критическое значение параметра ионной связи $\eta_c = 0.2496$, которое соответствует максимальной величине параметра $\eta = \varepsilon_\infty/\varepsilon_0$, определяемого из условия

$$E < -2E_{pol}, \quad (29)$$

где $E_{pol} = -0.1085128\alpha^2$ — энергия основного состояния полярона в пределе сильной связи. Условие (29) определяет область, в которой биполяронное состояние стабильно относительно распада на два поляронных состояния. Полученные результаты значительно расширяют область стабильности биполяронных состояний: $0 < \eta < \eta_c$. Наибольшее значение величины η_c было получено в работах [15, 22] и равно $\eta_c = 0.143\ldots$ Для $\eta = 0$ и $\alpha \to \infty$ величина биполяронной энергии $E = -0.3243\alpha^2$, вытекающая из выражения (28), является низшей из всех, которые до сих пор были получены вариационными методами (наименьшее значение для биполяронной энергии было получено в работе [12] и равно $E = -0.273024\alpha^2$).

В таблице сравниваются биполяронные энергии $E = E_{BPL}\alpha^2$, определяемые выражением (28) для $\alpha = 7$ и $\alpha = 9$, с соответствующими значениями, полученными в работе [11] ($E = E_{BPA}\alpha^2$) и в работе [12] ($E = E_{BPK}\alpha^2$). Из таблицы следует, что при $\alpha = 9$ для всех значений η энергия, определяемая формулой (28), является низшей. При $\alpha > 8$ энергия, определяемая выражением (28), ниже, чем полученная в работе [11]. Так как энергия биполярона, полученная в работе [11] в области $25 > \alpha > 8$, меньше, чем найденная в работе [3], а энергия, полученная в работе [12] для $\alpha > 25$, меньше, чем полученная в работе [11], и энергия биполярона, полученная в данной работе при $\alpha > 8$, ниже полученной в работах [11, 12], то во всем диапазоне изменения α наименьшей энергией при $\alpha < 8$ будет полученная в работе [3], а при $\alpha > 8$ — полученная

Таблица

$\alpha = 7$			
η	E_{BPK} [12]	E_{BPA} [11]	E_{BPL} (28)
0	-16.234	-16.067	-15.9
0.01	-16.053	-15.910	-15.72
0.1	-14.598	-14.5	-14.2
$\alpha = 9$			
η	E_{BPK} [12]	E_{BPA} [11]	E_{BPL} (28)
0	-24.927	-24.652	-26.27
0.01	-24.650	-24.354	-25.976
0.1	-22.068	-21.756	-23.17

в данной работе. Если исходить из того, что согласно [3] биполяронное состояние возможно лишь при $\alpha > \alpha_c = 6.8$ [3], то область применимости подхода [3] лежит в области значений $\alpha \in (6.8; 8)$. Для $\alpha > 8$ энергия биполярона будет определяться выражением (28).

Причина неточности подхода [3] в пределе сильной связи, по-видимому, состоит в следующем. Как и в данной работе, в статье [3] вычисление величин $\bar{V}_k, \bar{U}, T$ проводилось с ВФ осцилляторного типа. Гамильтониан (6), совпадающий по структуре с однополяронным, изучался в работе [3] с использованием фейнмановского подхода [23], который в пределе сильной связи дает более высокое значение энергии, чем в теории Пекара.

Полученные результаты позволяют по-новому взглянуть на биполяронный механизм сверхпроводимости в высокотемпературных сверхпроводниках. Так, например, для высокотемпературного сверхпроводника La_2CuO_4 эксперимент [24] дает следующие величины диэлектрических проницаемостей: $\varepsilon_\infty = 4$ и $\varepsilon_0 = 50$ в слоях CuO_2, и $\varepsilon_0 = 23$ в перпендикулярном направлении, что свидетельствует о большой анизотропии диэлектрической проницаемости. Это дает $\eta_{c\|} = 0.08$ в плоскостях CuO_2 и $\eta_{c\perp} = 0.174$ в перпендикулярном направлении. Наибольшее значение $\eta_c = 0.143$ (см. [15, 22] и ссылки в них) приводило к выводу, что биполяронный механизм сверхпроводимости может быть обусловлен только двумерными и одномерными биполяронами [25]. Величина $\eta_c = 0.2496$, полученная в данной работе, приводит к выводу, что сверхпроводимость в La_2CuO_4 может быть обусловлена трехмерными биполяронами большого радиуса, поскольку $\eta_c > \eta_{c\perp}$. Большая величина энергии связи биполярона, полученная в работе, расширяет область их стабильности, что также указывает на возможность $3D$-биполяронов в оксидах меди.

В заключение отметим, что полученные в работе результаты основываются на вариационном подходе, который был использован дважды: во-первых при выборе пробной ВФ в виде (22), который обращает в нуль вклад от оператора $\hat{H}_1$ (10) и, во-вторых, при выборе $\Psi(r)$ в виде гауссовской функции (25). Дальнейшее продвижение по уточнению энергии основного состояния биполярона требует выбора более точной (и, соответственно, более сложной) ВФ, что может сделать дальнейший прогресс в этом направлении практически невозможным. В связи с этим обратим внимание на то, что более эффективным подходом для расчета основного состояния биполярона может оказаться использование диаграммных квантовых монте-карловских алгоритмов [26, 27] после их соответствующей адаптации на случай дальнодействующего ЭФВ.

Автор благодарен А. В. Тулубу, обратившему его внимание на тот факт, что работа [21] воспроизводит результаты теории полярона сильной связи после устранения из поляронного гамильтониана координат гейзенберговским преобразованием.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-07-12073).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. A. Smondyrev and V. M. Fomin, in: *Polarons and Applications*, ed. by V. D. Lakhno, Wiley, Chichester (1994), p. 514.
2. J. T. Devreese and A. S. Alexandrov, Rep. Progr. Phys **72**, 1 (2009).
3. G. Verbist, F. M. Peeters, and J. T. Devreese, Phys. Rev. B **43**, 2712 (1991).
4. O. Gunnarsson and O. Rösch, J. Phys.: Condens. Matter **20**, ID 043201 (2008).
5. L. Vidmar, J. Bonča, S. Maekawa, and T. Tohyama, Phys. Rev. Lett **103**, 186401 (2009).
6. W. Meevasana, T. P. Devereaux, N. Nagaosa, Z.-X. Shen, and J. Zaanen, Phys. Rev. B **74**, ID 174524 (2006).

7. W. Meevasana, N. J. Ingle, D. H. Lu et al., Phys. Rev. Lett **96**, ID 157003 (2006).

8. A. S. Mishchenko, N. Nagaosa, Z.-X. Shen et al., Phys. Rev. Lett. **100**, ID 166401 (2008).

9. T. Holstein, Ann. Phys. **8**, 343 (1959).

10. A. S. Alexandrov and P. E. Kornilovitch, Phys. Rev. Lett. **82**, 807 (1999).

11. J. Adamowski and S. Bednarek, J. Phys.: Condens. Matter **4**, 2845 (1992).

12. N. I. Kashirina, V. D. Lakhno, and V. V. Sychyov, Phys. Stat. Sol. (b) **234**, 235 (2002).

13. N. I. Kashirina, V. D. Lakhno, and V. V. Sychyov, Phys. Rev. B **71**, 134301 (2005).

14. С. Г. Супрун, Б. Я. Мойжес, ФТТ **24**, 1571 (1982).

15. N. I. Kashirina, V. D. Lakhno, and V. V. Sychyov, Phys. Stat. Sol. (b) **239**, 174 (2003).

16. G. Verbist, M. A. Smondyrev, F. M. Peeters, and J. T. Devreese, Phys. Rev. B **45**, 5662 (1992).

17. P. Vansant, M. A. Smondyrev, F. M. Peeters, and J. T. Devreese, J. Phys. A **27**, 7925 (1994).

18. В. Л. Винецкий, О. Мередов, В. А. Янчук, ТЭХ **25**, 641 (1989).

19. T. D. Lee, F. Low, and D. Pines, Phys. Rev. **88**, 960 (1952).

20. И. В. Амирханов, И. В. Пузынин, Т. А. Стриж, В. Д. Лахно, Изв. РАН Сер. Физ. **59**, 106 (1995).

21. А. В. Тулуб, ЖЭТФ **14**, 1828 (1961).

22. N. I. Kashirina, V. D. Lakhno, and V. V. Sychyov, Semiconductor Phys., Quantum Electronics and Optoelectronics **5**, 235 (2002).

23. R. P. Feynman, Phys. Rev. **97**, 660 (1955).

24. D. Reagor, E. Ahrens, S. -W. Cheong, A. Migliori, and Z. Fisk, Phys. Rev. Lett. **62**, 2048 (1989).

25. G. Verbist, F. M. Peeters, and J. T. Devreese, Phys. Scr. **39**, 66 (1991).

26. N. V. Prokof'ev, B. V. Svistunov, and I. S. Tupitsyn, JETP **87**, 310 (1998).

27. A. Macridin, G. A. Sawatzky, and M. Jarrell, Phys. Rev. B **69**, 245111 (2004).