ЖЭТФ, 2010, том 137, вып. 4, стр. 675–684

УРАВНЕНИЯ ДВУХЖИДКОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В МОДЕЛИ ХАББАРДА

*Р. О. Зайцев**

Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 13 октября 2009 г.

Получена система уравнений стационарной и нестационарной теории сверхпроводимости в модели Хаббарда. Уравнения вблизи T_c и для слабого магнитного поля имеют общий вид уравнений сверхпроводника с сильной анизотропией поверхности Ферми. Конкретные вычисления проводятся с помощью кинетического уравнения для квазичастиц. Изучаются низкотемпературные коллективные возбуждения в сверхпроводнике. Получено явное выражение для температурной зависимости скорости второго звука.

1. ВВЕДЕНИЕ

До настоящего времени изучение сверхпроводимости в модели Хаббарда ограничивалось исследованием возможности возникновения куперовской неустойчивости. Было показано, что в модели Хаббарда с отталкиванием сверхпроводимость может существовать в ограниченном интервале электронной концентрации $2/3 < n_e < 1$[1)]. В настоящей работе получены уравнения сверхпроводимости, относящиеся к этому интервалу, получены кинетические уравнения и определена температурная зависимость второго звука. Установлены уравнения для определения пространственной и временной зависимостей функции, которая устанавливает связь между плотностью частиц и плотностью квазичастичных состояний. Рассмотрена возможность нахождения соответствующих зависимостей (концевых множителей) как в нормальной, так и в сверхпроводящей части фазовой диаграммы модели Хаббарда.

2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Предположим, что энергия Хаббарда U есть наибольший энергетический параметр, что соответствует рассмотрению переходов внутри нижней хаббардовской подзоны с гамильтонианом

$$\hat{H} = \sum_{\sigma,\mathbf{r},\mathbf{r}'(\mathbf{r}\neq\mathbf{r}')} \hat{X}_{\mathbf{r}}^{\sigma,0}\hat{X}_{\mathbf{r}'}^{0,\sigma}\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \mu\sum_{\sigma,\mathbf{r}}\hat{X}_{\mathbf{r}}^{\sigma,0}\hat{X}_{\mathbf{r}}^{0,\sigma}. \quad (1)$$

Здесь и ниже $\hat{X}_{\mathbf{r}}^{n,m}$ — X-операторы Хаббарда ферми-типа, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$\{\hat{X}_{\mathbf{r}}^{n,m}, \hat{X}_{\mathbf{r}'}^{p,q}\} = \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}\left(\delta_{m,p}\hat{X}_{\mathbf{r}}^{n,q} + \delta_{n,q}\hat{X}_{\mathbf{r}}^{p,m}\right), \quad (2)$$

μ — химический потенциал, $\varphi(\mathbf{r})$ — интегралы перескока.

Если система неустойчива относительно возникновения конденсата куперовских пар, тогда при $T < T_c$ она переходит в сверхпроводящее состояние. Согласно концепции Горькова [1], при этом ниже точки перехода появляются аномальные средние, так что в нашем случае необходимо рассмотреть уравнения для четырех гриновских функций:

$$D_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}^{\sigma}(\tau_1,\tau_2) = -\left\langle \hat{T}\left(\hat{X}_{\mathbf{r}_1}^{0,\sigma}(\tau_1)\hat{X}_{\mathbf{r}_2}^{\sigma,0}(\tau_2)\right)\right\rangle,$$

$$R_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}^{\sigma}(\tau_1,\tau_2) = -\left\langle \hat{T}\left(\hat{X}_{\mathbf{r}_1}^{0,\sigma}(\tau_1)\hat{X}_{\mathbf{r}_2}^{0,-\sigma}(\tau_2)\right)\right\rangle,$$

$$\tilde{R}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}^{\sigma}(\tau_1,\tau_2) = -\left\langle \hat{T}\left(\hat{X}_{\mathbf{r}_1}^{-\sigma,0}(\tau_1)\hat{X}_{\mathbf{r}_2}^{\sigma,0}(\tau_2)\right)\right\rangle,$$

четвертая гриновская выражается через первую:

$$\tilde{D}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}^{\sigma}(\tau_1,\tau_2) = -\left\langle \hat{T}\left(\hat{X}_{\mathbf{r}_1}^{-\sigma,0}(\tau_1)\hat{X}_{\mathbf{r}_2}^{0,-\sigma}(\tau_2)\right)\right\rangle = -D_{\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1}^{-\sigma}(\tau_2,\tau_1). \quad (2')$$

*E-mail: Zaitsev_rogdai@mail.ru

1) Это качественно согласуется с экспериментами на соединениях $Ln_{2-x}^{3+}Me_x^{2+}CuO_4$.

Здесь $\hat{T}$ — оператор упорядочения по параметру τ, а X-операторы записаны в представлении Мацубары с гамильтонианом (1).

Записанные в однопетлевом приближении уравнения для функций Грина являются непосредственным обобщением уравнений Горькова для X-операторов Хаббарда. С учетом перестановочных соотношений (2) получим

$$\begin{gathered}\hat{U}^{+}(\tau_1,\mathbf{r}_1)D^{+}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(\tau_1,\tau_2)-\\-\Sigma^{0+,-0}\tilde{R}^{+}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(\tau_1,\tau_2)=f^{+}\delta_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}\delta(\tau_1-\tau_2),\\ \hat{V}^{-}(\tau_1,\mathbf{r}_1)\tilde{R}^{+}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(\tau_1,\tau_2)-\\-\Sigma^{-0,0+}D^{+}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(\tau_1,\tau_2)=0,\\ \hat{U}^{+}(\tau_1,\mathbf{r}_1)R^{+}_{\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1}(\tau_2,\tau_1)-\\-\Sigma^{0+,-0}\tilde{D}^{+}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(\tau_1,\tau_2)=0,\\ \hat{V}^{+}(\tau_1,\mathbf{r}_1)\tilde{D}^{+}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(\tau_1,\tau_2)-\\-\Sigma^{-0,0+}R^{+}_{\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1}(\tau_2,\tau_1)=f^{-}\delta_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}\delta(\tau_1-\tau_2),\end{gathered}\tag{3}$$

где $\hat{U}$ и $\hat{V}$ — одночастичные операторы, соответствующие нуль-петлевому приближению с энергией $\xi^{\sigma}_p=f^{\sigma}t(\mathbf{p})-\mu$, и при заданных потенциалах $(\varphi,\mathbf{A})$

$$\begin{gathered}\hat{U}^{\sigma}(\tau,\mathbf{r})=-\frac{\partial}{\partial\tau}-f^{\sigma}(\mathbf{r})t(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}))+\mu,\\ \hat{V}^{\sigma}(\tau,\mathbf{r})=-\frac{\partial}{\partial\tau}+f^{\sigma}(\mathbf{r})t(\hat{\mathbf{p}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}))-\mu,\\ t(\mathbf{p})=\sum_{\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}.\end{gathered}\tag{4}$$

Новыми переменными в этих уравнениях являются концевые множители, возникающие из-за неканонических перестановочных соотношений:

$$f^{\sigma}=\left\langle\left\{\hat{X}^{0,\sigma},\hat{X}^{\sigma,0}\right\}\right\rangle=\left\langle\hat{X}^{0,0}+\hat{X}^{\sigma,\sigma}\right\rangle.\tag{5}$$

Аномальные собственно-энергетические части вычислены с помощью амплитуды рассеяния возбуждений с противоположными проекциями спинов [2, 3] (см. рис. 1):

$$\begin{gathered}\Sigma^{0+,-0}=-\sum_{\mathbf{r}'}\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')G^{0+,-0}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}}(\tau,\tau+0)+\\+\sum_{\mathbf{r}'}\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')G^{0-,+0}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}}(\tau,\tau+0),\\ \Sigma^{-0,0+}=-\sum_{\mathbf{r}'}\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')G^{-0,0+}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}}(\tau,\tau+0)+\\+\sum_{\mathbf{r}'}\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')G^{+0,0-}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}}(\tau,\tau+0).\end{gathered}\tag{6}$$

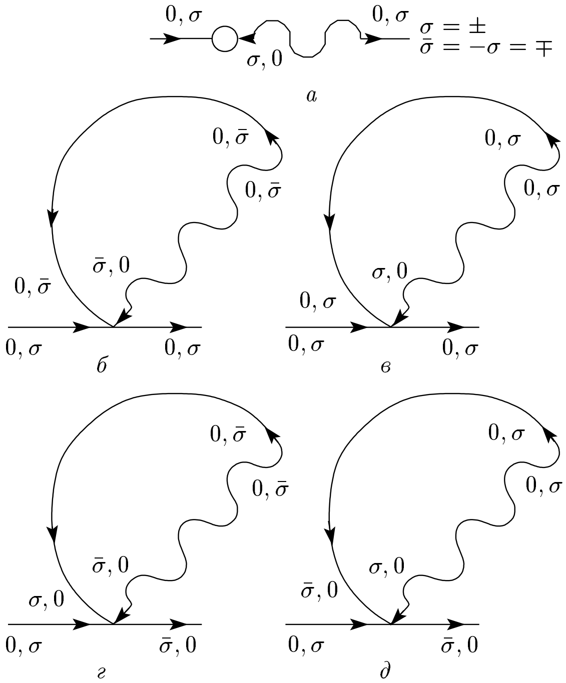

Рис. 1. Нуль-петлевая (*а*) и однопетлевые нормальные (*б,в*) и аномальные (*г,д*) собственно-энергетические части

Окончательное условие самосогласования соответствует общему соображению о том, что точные гриновские функции R и $\tilde{R}$ только множителем отличаются от «обычных» корреляторов:

$$\begin{gathered}R^{0+,0-}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(\tau_1,\tau_2)=G^{0+,-0}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(\tau_1,\tau_2)f^{0-},\\ \tilde{R}^{-0,+0}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(\tau_1,\tau_2)=G^{-0,0+}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(\tau_1,\tau_2)f^{0+}.\end{gathered}\tag{7}$$

Как и в теории БКШ, нас интересуют синглетные спиновые парные состояния. Поэтому будем считать, что аномальные средние антисимметричны относительно перемены знака всех спиновых индексов, так что соотношения (6) переписываются в упрощенном виде:

$$\begin{gathered}\Sigma^{0+,-0}=-2\sum_{\mathbf{r}'}\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')G^{0+,-0}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}}(\tau,\tau+0),\\ \Sigma^{-0,0+}=-2\sum_{\mathbf{r}'}\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')G^{-0,0+}_{\mathbf{r}',\mathbf{r}}(\tau,\tau+0).\end{gathered}\tag{8}$$

3. ТЕМПЕРАТУРА СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ПЕРЕХОДА

В отсутствие поля, когда концевые множители f и аномальные функции Δ и Δ^{+} не зависят ни от времени, ни от координат, компоненты Фурье гриновских функций только множителями отличаются от соответствующих решений Горькова [1]:

$$D^\sigma_\omega(\mathbf{p}) = G_\omega(\mathbf{p}) f^\sigma, \quad \tilde{R}^\sigma_\omega(\mathbf{p}) = F^+_\omega(\mathbf{p}) f^\sigma,$$
$$R^\sigma_\omega(\mathbf{p}) = F_{-\omega}(-\mathbf{p}) f^{-\sigma}, \quad \tilde{D}^\sigma_\omega(\mathbf{p}) = -D^{-\sigma}_{-\omega}(-\mathbf{p}). \tag{9}$$

При этом уравнения для функций G, F и F^+ имеют обычный вид уравнений Горькова. Записанные в представлении Мацубары, они имеют вид

$$(i\omega - \xi_\mathbf{p}) G_\omega(\mathbf{p}) + \Delta F^+_\omega(\mathbf{p}) = 1,$$
$$(i\omega + \xi_\mathbf{p}) F^+_\omega(\mathbf{p}) + \Delta^* G_\omega(\mathbf{p}) = 0, \tag{10}$$

где Δ и Δ^* выражается через интеграл от амплитуды кинематического взаимодействия $\Delta = -\Sigma^{0+,-0}$, $\Delta^* = -\Sigma^{-0,0+}$. В соответствии с рис. 1 и из формул (10) имеем уравнение

$$\Delta^* = 2T \sum_{\mathbf{p}\omega} t(\mathbf{p}) F^+_\omega(\mathbf{p}) = 2T \sum_{\omega,\mathbf{p}} \frac{\Delta^* t(\mathbf{p})}{\omega^2 + \xi^2_\mathbf{p} + |\Delta|^2} =$$
$$= \Delta^* \sum_\mathbf{p} \frac{t(\mathbf{p})}{E_\mathbf{p}} \operatorname{th} \frac{E_\mathbf{p}}{2T}, \tag{11}$$

где $E_\mathbf{p} = \sqrt{\xi^2_\mathbf{p} + |\Delta|^2}$.

Поскольку функция, стоящая под знаком суммы, зависит только от $t(\mathbf{p})$, имеет смысл ввести решеточную плотность состояний

$$\rho_0(\epsilon) = \sum_\mathbf{p} \delta(\epsilon - t(\mathbf{p})),$$

после чего уравнение (11) преобразуется в однократный интеграл:

$$1 = \int \frac{\epsilon}{E(\epsilon)} \operatorname{th} \frac{E(\epsilon)}{2T} \rho_0(\epsilon)\, d\epsilon, \tag{12}$$

где $E(\epsilon) = \sqrt{\xi^2_\epsilon + |\Delta|^2}$, $\xi_\epsilon = f\epsilon - \mu$, а интегрирование по ϵ проводится по всей области изменения переменной ϵ, для которой $\rho_0(\epsilon) \neq 0$.

Для того чтобы определить температуру сверхпроводящего перехода, достаточно положить в уравнении (12) $\Delta = 0$ и $T = T_c$, после чего находим зависимость T_c от положения уровня Ферми внутри первой зоны Бриллюэна:

$$1 = \sum \frac{t(\mathbf{p})}{\xi_\mathbf{p}} \operatorname{th} \frac{\xi_\mathbf{p}}{2T_c} =$$
$$= \int \frac{\epsilon}{f\epsilon - \mu} \operatorname{th} \left[\frac{f\epsilon - \mu}{2T_c}\right] \rho_0(\epsilon)\, d\epsilon. \tag{13}$$

Поскольку интегрирование в правой части (13) проводится вблизи от поверхности Ферми $\epsilon = \epsilon^* = \mu/f$, выражение для T_c приобретает обычный вид теории БКШ:

$$T_c = \bar{\epsilon} \exp\left(\frac{-1}{\Lambda(\epsilon^*)}\right),$$
$$\Lambda(\epsilon^*) = 2\epsilon^* \rho_0(\epsilon^*) \left|\frac{d\epsilon^*}{d\xi}\right| = 2\epsilon^* \sum_\mathbf{p} \delta(\xi_\mathbf{p}). \tag{14}$$

Выражение (14) имеет смысл только для положительных значений μ, что соответствует конечной концентрации n^*, которую находим из уравнения состояния:

$$n = 2f \int n_F(\xi_\epsilon) \rho_0(\epsilon)\, d\epsilon,$$
$$\frac{n^*}{2 - n^*} = \int \theta(\epsilon) \rho_0(\epsilon)\, d\epsilon. \tag{15}$$

Для самодуальных решеток $\rho_0(\epsilon) = \rho_0(-\epsilon)$ из (15) находим, что сверхпроводимость существует при $n > n_c = 2/3$ [2].

4. УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ

Для нахождения линейной части уравнений Гинзбурга – Ландау согласно методу Горькова [1] достаточно записать уравнения для вершинной части при заданном значении суммарного импульса электронной пары $\mathbf{s}$, а затем, используя принцип градиентной инвариантности, произвести замену $\mathbf{s} \to \mathbf{s} - 2e\mathbf{A}/c$.

В нашей модели зависимость от $\mathbf{s}$ входит не только через электронную функцию Грина $G_\omega(\mathbf{p})$, но также через амплитуду рассеяния [2, 3]

$$\Gamma_\mathbf{s}(\mathbf{p}) = -t_\mathbf{p} - t_{\mathbf{s}-\mathbf{p}}. \tag{16}$$

В результате имеем линеаризованную часть уравнений Горькова:

$$\Delta_\Omega(\mathbf{s}) = T \sum_{\omega,\mathbf{p}} t_\mathbf{p} \left\{ G^{(0)}_\omega(\mathbf{p}) G^{(0)}_{-\omega+\Omega}(-\mathbf{p}+\mathbf{s}) + \right.$$
$$\left. + G^{(0)}_{\omega+\Omega}(\mathbf{p}+\mathbf{s}) G^{(0)}_{-\omega}(-\mathbf{p}) \right\}, \tag{17}$$

где $G_\omega(\mathbf{p}) = 1/(i\omega - \xi_\mathbf{p})$, $\Omega = 2m\pi T$.

В нулевом приближении по $\mathbf{s}$ и Ω снова получим уравнение (13). Во втором приближении по $\mathbf{s}$ имеем

$$T \frac{s_\alpha s_\beta}{2} \sum_{\omega,\mathbf{p}} t_\mathbf{p} \left\{ G^{(0)}_\omega(\mathbf{p}) \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} G^{(0)}_{-\omega}(-\mathbf{p}) + \right.$$
$$\left. + G^{(0)}_{-\omega}(-\mathbf{p}) \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} G^{(0)}_\omega(\mathbf{p}) \right\}.$$

В этих выражениях удобно проинтегрировать по частям:

$$-T\frac{s_\alpha s_\beta}{2}\sum_{\omega,\mathbf{p}}\left\{\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left[t_\mathbf{p}G^{(0)}_\omega(\mathbf{p})\right]\frac{\partial}{\partial p_\beta}G^{(0)}_{-\omega}(-\mathbf{p})+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left[t_\mathbf{p}G^{(0)}_{-\omega}(-\mathbf{p})\right]\frac{\partial}{\partial p_\beta}G^{(0)}_\omega(\mathbf{p})\right\}.$$

Поскольку функция Грина имеет полюсную особенность, нет необходимости учитывать производные от амплитуды рассеяния: учет таких слагаемых приводит к поправкам порядка $(T_c/|t|)^2$, где $|t|$ — полуширина электронной подзоны. Дальнейшие преобразования связаны с тем обстоятельством, что функция Грина зависит от импульса через энергию возбуждений $\xi_\mathbf{p}$. По этой причине имеем

$$\begin{gathered}-Ts_\alpha s_\beta\sum_{\omega,\mathbf{p}}t_\mathbf{p}\frac{\partial\xi_\mathbf{p}}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\xi_{-\mathbf{p}}}{\partial p_\beta}\left(G^{(0)}_\omega(\xi)G^{(0)}_{-\omega}(\xi)\right)^2=\\=-Ts_\alpha s_\beta t^*\sum_\mathbf{p}\delta(\xi_\mathbf{p})\frac{\partial\xi_\mathbf{p}}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\xi_\mathbf{p}}{\partial p_\beta}\times\\\times\sum_\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\left(G^{(0)}_\omega(\xi)G^{(0)}_{-\omega}(\xi)\right)^2,\\G^{(0)}_\omega(\xi)=\frac{1}{i\omega-\xi},\end{gathered}\tag{18}$$

где $t^*=\mu/f$ — значение функции $t_\mathbf{p}$ на поверхности Ферми и считается, что $t_{-\mathbf{p}}=t_\mathbf{p}$.

Нелинейную поправку находим с помощью разложения уравнения (11) до второго порядка по $|\Delta|^2$. После чего получим уравнение Гинзбурга–Ландау–Горькова [4]:

$$\left\{\bar\rho\left[\ln\left(\frac{T_c}{T}\right)-\frac{7\zeta(3)}{8(\pi T)^2}|\Delta|^2\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{7\zeta(3)}{8(\pi T_c)^2}\rho_{\alpha,\beta}\hat\partial_\alpha\hat\partial_\beta\right\}\Delta(\mathbf{r})=0,\tag{19a}$$

где

$$\begin{gathered}\rho_{\alpha,\beta}=\sum_\mathbf{p}\delta(\xi_\mathbf{p})\frac{\partial\xi_\mathbf{p}}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\xi_\mathbf{p}}{\partial p_\beta},\quad\bar\rho=\sum_\mathbf{p}\delta(\xi_\mathbf{p}),\\\hat\partial_\alpha=\hbar\frac{\partial}{\partial r_\alpha}-\frac{2ieA_\alpha}{c}.\end{gathered}\tag{19b}$$

К этим уравнениям необходимо добавить общее выражение для плотности сверхпроводящего тока, которое будет получено в следующем разделе:

$$j_\alpha=-ie\rho_{\alpha,\beta}\left\{\Delta^*\hat\partial_\beta\Delta-\Delta(\hat\partial_\beta\Delta)^*\right\}\frac{7\zeta(3)}{8(\pi T_c)^2}.\tag{20}$$

Таким образом, уравнения сверхпроводимости при $T\le T_c$ формально совпадают с уравнениями сверхпроводимости для сильноанизотропных сверхпроводников. Все отличие заключается в том, что плотность состояний $\bar\rho=\delta(\xi_\mathbf{p})$, а обратная эффективная масса $\rho_{\alpha\beta}$ зависит от электронной плотности через величину[2)] $f=1-n/2$.

5. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Изучение нестационарных явлений в сверхпроводнике можно начать с рассмотрения уравнений для четырех гриновских функций:

$$\begin{gathered}G^\sigma_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2)=-i\left\langle\hat T\left(\hat X^{0,\sigma}_{\mathbf{r}_1}(t_1)\hat X^{\sigma,0}_{\mathbf{r}_2}(t_2)\right)\right\rangle,\\F^+_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2)=-i\left\langle\hat T\left(\hat X^{-,0}_{\mathbf{r}_1}(t_1)\hat X^{+,0}_{\mathbf{r}_2}(t_2)\right)\right\rangle,\\\tilde F_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2)=-i\left\langle\hat T\left(\hat X^{0,+}_{\mathbf{r}_1}(t_1)\hat X^{0,-}_{\mathbf{r}_2}(t_2)\right)\right\rangle,\\\tilde G^\sigma_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2)=-i\left\langle\hat T\left(\hat X^{\sigma,0}_{\mathbf{r}_1}(t_1)\hat X^{0,\sigma}_{\mathbf{r}_2}(t_2)\right)\right\rangle.\end{gathered}\tag{21}$$

Здесь X-операторы записаны в представлении Гейзенберга с гамильтонианом (1). Функция

$$\tilde G^\sigma_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2)=-G^\sigma_{\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1}(t_2,t_1),$$

а сами функции, взятые в совпадающие моменты времени, выражаются через соответствующие термодинамические функции (2′). Записанные в однопетлевом приближении уравнения для функций Грина являются непосредственным обобщением уравнений Горькова для X-операторов Хаббарда (см., например, [5]):

$$\begin{gathered}\hat U^\uparrow(x_1)G^\uparrow_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2)+\Delta(x_1)F^+_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2)=\\=f^{0,+}(x_1)\delta_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}\delta(t_1-t_2),\\\hat V^\downarrow(x_1)F^+_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2)+\Delta^*(x_1)G^\uparrow_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2)=0,\\\hat U^\uparrow(x_1)\tilde F_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2)+\Delta(x_1)\tilde G^\downarrow_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2)=0,\\\hat V^\downarrow(x_1)\tilde G^\downarrow_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2)+\Delta^*(x_1)\tilde F_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2)=\\=f^{0,-}(x_1)\delta_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}\delta(t_1-t_2).\end{gathered}\tag{22}$$

Здесь введены операторы $x=(t,\mathbf{r})$, зависящие от координаты и времени:

$$\hat U^\sigma(x)=i\frac{\partial}{\partial t}-f^\sigma(x)t(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}(x))+\mu-e\varphi(x),$$

[2)] Для плоской квадратной решетки $\bar\rho$ и $\rho_{\alpha\beta}$ выражаются через полные эллиптические интегралы I, II и III рода (K,E,П): $\bar\rho=\mathrm{K}(s')/2f|t|$, $\rho_{\alpha\beta}=4f|t|\delta_{\alpha,\beta}[\mathrm{E}(s')-s^2(\Pi(1+s,s')+\Pi(1-s,s'))]$, где $s=\mu/2f|t|$, $s'=\sqrt{1-s^2}$, t — интеграл перескока к ближайшим соседям.

$$\hat{V}^\sigma(x) = i\frac{\partial}{\partial t} + f^\sigma(x)t\left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}(x)\right) - \mu + e\varphi,$$
$$t(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{r}} \tau(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}. \qquad (23)$$

Величины Δ и Δ^* находим из сравнения с точными термодинамическими соотношениями (9), записанными для совпадающих τ и τ'.

К уравнениям (22) необходимо добавить систему сопряженных:

$$\begin{gathered}
\hat{V}^\uparrow(x_2)G^\uparrow_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) - \Delta^*(x_2)\tilde{F}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) = \\
= -f^{0,+}(x_1)\delta_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}\delta(t_1-t_2), \\
\hat{V}^\downarrow(x_2)F^+_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) - \Delta^*(x_2)\tilde{G}^\uparrow_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) = 0, \\
\hat{U}^\uparrow(x_1)\tilde{F}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) - \Delta(x_2)G^\uparrow_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) = 0, \\
\hat{U}^\downarrow(x_1)\tilde{G}^\uparrow_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) - \Delta(x_2)F^+_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) = \\
= -f^{0,-}(x_1)\delta_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}\delta(t_1-t_2).
\end{gathered} \qquad (24)$$

Далее мы складываем почленно уравнения (22) и (24):

$$\begin{gathered}
\left[\hat{U}^\uparrow(x_1) + \hat{V}^\uparrow(x_2)\right] G^\uparrow_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) + \\
+ \Delta(x_1)F^+_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) - \\
- \Delta^*(x_2)\tilde{F}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) = 0, \\
\left[\hat{V}^\downarrow(x_1) + \hat{V}^\downarrow(x_2)\right] F^+_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) + \\
+ \Delta^*(x_1)G^\uparrow_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) - \\
- \Delta^*(x_2)\tilde{G}^\uparrow_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) = 0, \\
\left[\hat{U}^\uparrow(x_1) + \hat{U}^\uparrow(x_1)\right] \tilde{F}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) + \\
+ \Delta(x_1)\tilde{G}^\downarrow_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) - \\
-\Delta(x_2)G^\uparrow_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) = 0, \\
\left[\hat{V}^\downarrow(x_1) + \hat{U}^\downarrow(x_1)\right] \tilde{G}^\uparrow_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) + \\
+ \Delta^*(x_1)\tilde{F}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) - \\
- \Delta(x_2)F^+_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) = 0.
\end{gathered} \qquad (25)$$

Если с самого начала предположить, что $t_2 > t_1$, а затем наоборот, тогда удается получить систему уравнений в технике Келдыша. После перехода к фурье-представлению по относительной переменной $\mathbf{r}$ получим

$$\begin{gathered}
\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{i}{2}\nabla_p, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{i}{2}\nabla_p, \\
\hat{\mathbf{p}}_\mathbf{1} = -\frac{i}{2}\nabla_\mathbf{R} + \mathbf{p}, \quad \hat{\mathbf{p}}_\mathbf{2} = -\frac{i}{2}\nabla_\mathbf{R} - \mathbf{p}.
\end{gathered} \qquad (26)$$

Таким образом, получаем кинетическое уравнение с анизотропной ферми-поверхностью, где скорость $\mathbf{v}$ есть производная энергии по импульсу, а обратная масса заменяется тензором обратных масс согласно соотношениям

$$v_\alpha(\mathbf{p}) = f\frac{\partial t(\mathbf{p})}{\partial p_\beta}, \quad \frac{1}{m} \to \frac{1}{m_{\alpha\beta}} = f\frac{\partial^2 t(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}. \qquad (27)$$

С точностью до членов первого порядка по $\hbar$ находим

$$\begin{gathered}
\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\frac{\partial\varphi(x)}{\partial R_\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\right\} D_+(\mathbf{R},\mathbf{p},t) + \\
+ i\hbar f(x)\left\{\frac{\partial t(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial^2 t(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha\partial p_\beta}\frac{eA_\beta(x)}{c}\right\}\frac{\partial D_+(\mathbf{R},\mathbf{p},t)}{\partial R_\alpha} - \\
- i\hbar\frac{\partial}{\partial R_\alpha}\left\{f(x)\left[t(\mathbf{p}) - \frac{\partial t(\mathbf{p})}{\partial p_\beta}\frac{eA_\beta(x)}{c} + \right.\right. \\
\left.\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 t(\mathbf{p})}{\partial p_\gamma\partial p_\beta}\frac{eA_\gamma(x)}{c}\frac{eA_\beta(x)}{c}\right]\right\}\frac{\partial D_+(\mathbf{R},\mathbf{p},t)}{\partial p_\alpha} = \\
= |\Delta(x)|\left\{R(\mathbf{R},\mathbf{p},t) - \tilde{R}(\mathbf{R},\mathbf{p},t)\right\} + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial|\Delta(\mathbf{R},t)|}{\partial R_\alpha} \times \\
\times \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left\{R(\mathbf{R},\mathbf{p},t) - \tilde{R}(\mathbf{R},\mathbf{p},t)\right\} + \hat{\mathrm{St}}_1(G).
\end{gathered} \qquad (28)$$

Второе уравнение имеет вид

$$\begin{gathered}
\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - 2e\varphi(x) - f(x)\left[2t(\mathbf{p}) + \frac{\partial^2 t(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha\partial p_\beta} \times \right.\right. \\
\left.\left. \times \frac{eA_\alpha(x)}{c}\frac{eA_\beta(x)}{c}\right] + 2\mu\right\}\tilde{R}(\mathbf{R},\mathbf{p},t) - \\
- i\hbar\frac{\partial^2 t(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha\partial p_\beta}\frac{\partial}{\partial R_\alpha}\left(f(x)\frac{eA_\beta(x)}{c}\tilde{R}(\mathbf{R},\mathbf{p},t)\right) + \\
+ i\hbar\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left\{\frac{\partial t(\mathbf{p})}{\partial p_\beta}\frac{\partial}{\partial R_\alpha}\left(f(x)\frac{eA_\alpha(x)}{c}\tilde{R}(\mathbf{R},\mathbf{p},t)\right)\right\} = \\
= |\Delta(x)|f(x)\left(1 - G_+(\mathbf{R},\mathbf{p},t) - G_+(\mathbf{R},-\mathbf{p},t)\right) + \\
+ i\hbar\frac{\partial\left(f^\sigma(x)|\Delta(x)|\right)}{\partial R_\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha} \times \\
\times \left[G_+(\mathbf{R},\mathbf{p},t) - G_-(\mathbf{R},-\mathbf{p},t)\right] + \hat{\mathrm{St}}_2(R),
\end{gathered} \qquad (29)$$

где $x = (\mathbf{R},t)$, $G_\sigma(\mathbf{R},\mathbf{p},t) = D_\sigma(\mathbf{R},\mathbf{p},t)/f^\sigma(x)$.

6. НЕФЕРМИЖИДКОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Полученные уравнения (28) и (29) соответствуют кинетическим уравнениям анизотропной ферми-жидкости [5]. Интегралы столкновений $\hat{\mathrm{St}}_{1,2}$ могут быть получены по обычной схеме. Нестационарные уравнения для Δ находим из самосогласованных уравнений Горькова. Поскольку множители $f^\pm$ возникают от неканонических перестановочных соотношений операторов Хаббарда, их временную и пространственную зависимости можно определить с помощью уравнений для системы средних от антикоммутаторов. Для нахождения соответствующих уравнений запишем систему уравнений типа (22) и (24), но не для причинных, а для симметризованных гриновских функций:

$$\begin{gathered}
{}^{(s)}G^{\sigma}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) = -i\left\langle\left\{X^{0,\sigma}_{\mathbf{r}_1}(t_1), \hat{X}^{\sigma,0}_{\mathbf{r}_2}(t_2)\right\}\right\rangle, \\
{}^{(s)}F^{+}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) = -i\left\langle\left\{\hat{X}^{-,0}_{\mathbf{r}_1}(t_1), \hat{X}^{+,0}_{\mathbf{r}_2}(t_2)\right\}\right\rangle, \\
{}^{(s)}\tilde{F}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) = -i\left\langle\left\{\hat{X}^{0,+}_{\mathbf{r}_1}(t_1), \hat{X}^{0,-}_{\mathbf{r}_2}(t_2)\right\}\right\rangle, \\
{}^{(s)}\tilde{G}^{\sigma}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t_1,t_2) = -i\left\langle\left\{\hat{X}^{\sigma,0}_{\mathbf{r}_1}(t_1), \hat{X}^{0,\sigma}_{\mathbf{r}_2}(t_2)\right\}\right\rangle.
\end{gathered} \tag{30}$$

Далее следует записать систему сопряженных уравнений типа (24), после чего складываем эти уравнения и переходим к разностным и суммарным переменным (26). В результате снова получаем систему кинетических уравнений с четырехкомпонентным оператором Лиувилля:

$$\begin{gathered}
\left[\hat{U}^{\uparrow}(x_1) + \hat{V}^{\uparrow}(x_2)\right]^{(s)} G^{\uparrow}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t) + \\
+ \Delta(x_1)^{(s)}F^{+}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t) - \Delta^*(x_2)^{s}\tilde{F}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t) = 0, \\
\left[\hat{V}^{\downarrow}(x_1) + \hat{V}^{\downarrow}(x_2)\right]^{(s)} F^{+}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t) + \\
+ \Delta^*(x_1)^{(s)}G^{\uparrow}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t) - \Delta^*(x_2)^{(s)}\tilde{G}^{\uparrow}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t) = 0, \\
\left[\hat{U}^{\uparrow}(x_1) + \hat{U}^{\uparrow}(x_1)\right]^{(s)} \tilde{F}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t) + \\
+ \Delta(x_1)^{(s)}\tilde{G}^{\downarrow}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t) - \Delta(x_2)^{(s)}G^{\uparrow}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t) = 0, \\
\left[\hat{V}^{\downarrow}(x_1) + \hat{U}^{\downarrow}(x_1)\right]^{(s)} \tilde{G}^{\uparrow}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t) + \\
+ \Delta^*(x_1)^{(s)}\tilde{F}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t) - \Delta(x_2)^{(s)}F^{+}_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}(t) = 0.
\end{gathered} \tag{31}$$

В качестве нулевого приближения в этих уравнениях следует выбрать равновесные значения, вычисленные с помощью термодинамических уравнений (3). Для системы (25) при $t_2 > t_1$, $t_1 \to t_2$ находим

$$\begin{gathered}
G^{(0)}(\mathbf{p}) = i\left[u^2_{\mathbf{p}}n_F(E_{\mathbf{p}}) + v^2_{\mathbf{p}}\left(1 - n_F(E_{\mathbf{p}})\right)\right] f^{0+}, \\
F^{+}(\mathbf{p}) = iu_{\mathbf{p}}v_{\mathbf{p}}\left(1 - 2n_F(E_{\mathbf{p}})\right) f^{0+}, \\
\tilde{F}^{(0)}(\mathbf{p}) = iu_{\mathbf{p}}v_{\mathbf{p}}\left(1 - 2n_F(E_{\mathbf{p}})\right) f^{0-}, \\
\tilde{G}^{(0)}(\mathbf{p}) = \\
= -i\left[u^2_{\mathbf{p}}\left(1 - n_F(E_{\mathbf{p}})\right) + v^2_{\mathbf{p}}n_F(E_{\mathbf{p}})\right] f^{0-}.
\end{gathered} \tag{32}$$

Для симметризованных гриновских функций (26), относящихся к системе (31)

$$\begin{gathered}
{}^{(s)}G^{(0)}(x) = -if^{0+}(x), \quad {}^{(s)}F^{+}(x) = 0, \\
{}^{(s)}\tilde{F}(x) = 0, \quad {}^{(s)}\tilde{G}^{(0)}(x) = -if^{0-}(x).
\end{gathered} \tag{33}$$

7. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ЭФФЕКТ МЕЙССНЕРА

После суммирования по импульсам и спинам из уравнения (28) получим закон сохранения числа частиц n:

$$n = -i\sum_{\sigma,\mathbf{p}} D_\sigma(\mathbf{R},\mathbf{p},t), \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0,$$

$$\text{где} \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2,$$

$$j_{1,\alpha}(x) = -i\sum_\sigma f^\sigma(x)\sum_{\mathbf{p}}\frac{\partial t(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha}G_\sigma(\mathbf{R},\mathbf{p},t), \tag{34a}$$

$$j_{2,\alpha}(x) = -i\sum_\sigma f^\sigma(x) \times \\ \times \sum_{\mathbf{p}}\frac{\partial^2 t(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}G_\sigma(\mathbf{R},\mathbf{p},t)\frac{eA_\beta(x)}{c}. \tag{34b}$$

В нулевом и первом приближениях по постоянному векторному потенциалу

$$G_\sigma(\mathbf{R},\mathbf{p},t) = i\left\{u^2_p n_F(E_p) + v^2_p n_F(-E_p) - \right. \\ \left. - \frac{\partial n_F(E_p)}{\partial E_p}\frac{\partial \xi_p}{\partial p_\alpha}\frac{eA_\alpha}{c}\right\}, \tag{35}$$

где n_F — распределение Ферми, $\xi_p = ft(\mathbf{p}) - \mu$,

$$\begin{gathered}
E_p = \sqrt{\xi^2_p + \Delta^2}, \quad u^2_p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_p}{E_p}\right), \\
v^2_p = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_p}{E_p}\right).
\end{gathered} \tag{36}$$

Два первых слагаемых в уравнении (35) определяют электронную плотность в нижней хаббардовской зоне:

$$\begin{gathered}
n = 2f\sum_{\mathbf{p}}\left\{u^2_p n_F(E_p) + v^2_p n_F(-E_p)\right\}, \\
f = 1 - \frac{n}{2}.
\end{gathered} \tag{37}$$

Третье слагаемое в (35) определяет нормальную составляющую, записанную с учетом анизотропии ферми-поверхности:

$$j_{1,\alpha}(x) = -2\sum_{\mathbf{p}}\left\{\frac{\partial \xi_p}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \xi_p}{\partial p_\beta}\frac{\partial n_F(E_p)}{\partial E_p}\right\}\frac{eA_\beta}{c}. \tag{38}$$

Выражение (34b) для плотности тока преобразуем к виду (38) с помощью интегрирования по частям:

$$j_{2,\alpha}(x) = -2i\sum_{\mathbf{p}}\frac{\partial \xi_p}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G_\omega(\mathbf{p})}{\partial p_\beta}\frac{eA_\beta(x)}{c} = \\ = -2i\sum_{\mathbf{p}}\frac{\partial \xi_p}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \xi_p}{\partial p_\beta}\frac{\partial G_\omega(\mathbf{p})}{\partial \xi_p}\frac{eA_\beta(x)}{c}. \tag{39}$$

Выражения (38) и (39) выразим через суммы по мацубаровским частотам $\omega_n = \pi T(2n+1)$ и энергию возбуждений $E_p = \sqrt{|\Delta|^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2}$:

$$j_{1,\alpha} = -2T \sum_{\mathbf{p},\omega} \frac{\partial \xi_p}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \xi_p}{\partial p_\beta} \frac{(E_p^2 - \omega_n^2)}{(E_p^2 + \omega_n^2)^2} \frac{eA_\beta}{c} = -2T \sum_{\mathbf{p},\omega} \frac{\partial \xi_p}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \xi_p}{\partial p_\beta} \delta(\xi_{\mathbf{p}}) \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2 + \xi^2 - \omega_n^2}{(E_p^2 + \omega_n^2)^2} d\xi \frac{eA_\beta}{c}, \quad (40)$$

$$j_{2,\alpha} = 2T \sum_{\mathbf{p},\omega_n} \frac{\partial \xi_p}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \xi_p}{\partial p_\beta} \delta(\xi_{\mathbf{p}}) \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi_p^2 - \Delta^2 - \omega_n^2)}{(E_p^2 + \omega_n^2)^2} d\xi \frac{eA_\beta}{c}. \quad (41)$$

В результате получим мейсснеровский ток анизотропного сверхпроводника:

$$j_{\alpha s}(T) = -4T \sum_{\mathbf{p},\omega} \frac{\partial \xi_p}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \xi_p}{\partial p_\beta} \delta(\xi_{\mathbf{p}}) \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{(\xi_p^2 + \Delta^2 + \omega_n^2)^2} d\xi \frac{e^2 A_\beta}{c} = -2\pi T \sum_{\omega} \frac{\Delta^2 \rho_{\alpha,\beta}}{(\Delta^2 + \omega_n^2)^{3/2}} \frac{e^2 A_\beta}{c}, \quad \rho_{\alpha,\beta} = \sum_{\mathbf{p}} \delta(\xi_p) \frac{\partial \xi_p}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \xi_p}{\partial p_\beta}. \quad (42)$$

В пределе $T = 0$ сумму по ω заменяем на интеграл:

$$j_{\alpha s}(0) = -2\rho_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2 d\xi}{(\xi^2 + \Delta^2)^{3/2}} \frac{e^2 A_\beta}{c} = -2\rho_{\alpha,\beta} \frac{e^2 A_\beta}{c}. \quad (43)$$

Если перейти к пределу $T \to T_c$, то получим выражение для сверхпроводящего тока (20), с тензором обратных масс $\rho_{\alpha,\beta}$, который входит в уравнение Гинзбурга–Ландау[3)]

$$j_{\alpha s}(T) = -\frac{7\zeta(3)\Delta^2}{2(\pi T)^2} \rho_{\alpha,\beta} \frac{e^2 A_\beta}{c}. \quad (44)$$

[3)] Используя эту формулу, а также линеаризованный вариант уравнения (19а), можно определить параметр κ, равный отношению глубины проникновения магнитного поля $\delta(T)$ к радиусу корреляции при нулевом поле $\xi(T)$: $\kappa^2 = 8\pi^2 T_c^2 c^2 \bar{\rho}/7\zeta(3) e^2 \hbar^2 \rho_{\alpha\beta}^2$. Если выразить κ через интеграл перескока $|t|$ и размер элементарной ячейки a, то получим оценку: $\kappa \approx T_c \hbar c/|e||t|^{3/2} a^{1/2}$.

8. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КВАЗИЧАСТИЦ

Для изучения физических явлений, где не возникает электрического поля, уравнение (29) можно заменить квазистатическими уравнениями для $|\Delta|$, вместо первого уравнения из формулы (29) написать уравнение для квазичастичных возбуждений $\psi = \psi(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial H(\mathbf{p},\mathbf{r})}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial R_\alpha} - \frac{\partial H(\mathbf{p},\mathbf{r})}{\partial R_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} = \hat{\mathrm{St}}(\psi), \quad (45)$$

где $H(\mathbf{p},\mathbf{r}) = \sqrt{\xi^2(\mathbf{p}) + |\Delta|^2} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_s$, $\xi(\mathbf{p}) = ft(\mathbf{p}) - \mu$, а $\hat{\mathrm{St}}(\psi)$ — интеграл столкновений для нормальных возбуждений.

Как и в нормальной фазе, для изучаемой системы с бесконечной энергией Хаббарда в качестве нулевого приближения к уравнению (45) следует использовать функцию распределения Ферми $n_F(H - \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_n)$ с множителем $f(\mathbf{R}, t)$, который удовлетворяет кинетическому уравнению с нулевой правой частью:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H(\mathbf{p},\mathbf{r})}{\partial p_\alpha} \frac{\partial f}{\partial R_\alpha} = 0. \quad (46)$$

При $T > T_c$ система уравнений (45) и (46) переходит в систему кинетических уравнений, относящихся к нормальной фазе модели Хаббарда [6].

В качестве примера рассмотрим задачу о распространении второго звука в сверхпроводящей фазе. Если предположить, что флуктуации плотности заряда отсутствуют, то множитель f и химический потенциал μ следует считать постоянными, в то время как температуру и $|\Delta|$ следует считать зависящими от времени и координат. При этом

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = f n_F' \left\{ \left[\frac{\partial E_p}{\partial t} + \left(\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \right) - \left(\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} \right) \right] \frac{1}{T} - \left[(E_p + \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_s - \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_n) \frac{\partial T}{\partial t} \right] \frac{1}{T^2} \right\}. \quad (47a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha} = f n_F' \left\{ \left[\frac{\partial E_p}{\partial r_\alpha} + \left(\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial r_\alpha} \right) - \left(\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial r_\alpha} \right) \right] \frac{1}{T} - \left[(E_p + \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_s - \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_n) \frac{\partial T}{\partial r_\alpha} \right] \frac{1}{T^2} \right\}. \quad (47b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} = f n_F' \left\{ \left[\frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n \right] \frac{1}{T} \right\}, \quad n_F' = n_F(1 - n_F), \quad (47c)$$

$$\frac{\partial H}{\partial r_\alpha} = \frac{\partial E_p}{\partial r_\alpha} + \left(\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial r_\alpha} \right), \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{v}_s. \quad (47d)$$

После подстановки этих выражений в кинетическое уравнение (45) и перехода к пределу $v_{s,n} \to 0$ получим

$$f n'_F \left\{ \left[\frac{\partial E_p}{\partial t} + \left(\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \right) - \left(\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} \right) \right] \frac{1}{T} - E_p \frac{\partial T}{\partial t} \frac{1}{T^2} \right\} + n'_F \left\{ \left[- \left(\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial r_\alpha} \right) \right] \frac{1}{T} - \left[\frac{\partial T}{\partial r_\alpha} \right] \frac{E_p}{T^2} \right\} \times \frac{\partial E_p}{\partial p_\alpha} = \hat{\mathrm{St}}(f_{\mathbf{p}}). \quad (48)$$

Уравнения для нахождения неизвестных функций $\mathbf{v}_{n,s}$ и $T(\mathbf{r}, t)$ находим с помощью умножения (48) на три компоненты импульса и энергию и дальнейшего интегрирования по импульсам. Поскольку при этом правая сторона дает нуль, имеем

$$\left(\frac{\partial v_{s,\beta}}{\partial t} - \frac{\partial v_{n,\beta}}{\partial t} \right) \sum_{\mathbf{p}} p_\alpha p_\beta n'_F - \frac{\partial T}{\partial r_\beta} \sum_{\mathbf{p}} n'_F \left\{ p_\alpha \frac{E_p}{T} \frac{\partial E_p}{\partial p_\beta} \right\} = 0. \quad (49a)$$

$$\sum_{\mathbf{p}} n'_F \left\{ \frac{\partial E_p}{\partial t} \frac{E_p}{T} - \frac{\partial T}{\partial t} \frac{E_p^2}{T^2} \right\} - \frac{\partial v_{n,\beta}}{\partial r_\alpha} \sum_{\mathbf{p}} n'_F \left\{ p_\beta \frac{E_p}{T} \frac{\partial E_p}{\partial p_\alpha} \right\} = 0. \quad (49b)$$

К этим уравнениям следует добавить уравнение непрерывности, которое для металла имеет следующий вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathrm{div}\, \mathbf{j} = 0, \quad \text{где} \quad \mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s. \quad (50)$$

Временную производную от $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}$ запишем с помощью производных:

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = \frac{\xi}{E_p} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\Delta}{E_p} \frac{\partial \Delta}{\partial t} = -\frac{\xi}{E_p} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\Delta}{E_p} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial T} \right)_\mu \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (51)$$

Таким образом, второе уравнение (49b) переписывается следующим образом:

$$-\frac{\partial \mu}{\partial t} \sum_{\mathbf{p}} n'_F \frac{\xi_p}{T} + \frac{\partial T}{\partial t} \sum_{\mathbf{p}} n'_F \left\{ -\frac{E_p^2}{T^2} + \frac{\Delta}{T} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial T} \right)_\mu \right\} - \frac{\partial v_{n,\beta}}{\partial r_\alpha} \sum_{\mathbf{p}} n'_F \left\{ p_\beta \frac{E_p}{T} \frac{\partial E_p}{\partial p_\alpha} \right\} = 0. \quad (52)$$

Коэффициент перед производной от химического потенциала μ есть весьма малая величина, поскольку под знаком суммы фигурирует нечетная функция от ξ. По этой причине естественно пренебречь этим коэффициентом, так что температурная зависимость от μ выпадает из системы уравнений:

$$\left(\frac{\partial v_{s,\beta}}{\partial t} - \frac{\partial v_{n,\beta}}{\partial t} \right) \sum_{\mathbf{p}} p_\alpha p_\beta n'_F - \frac{\partial T}{\partial r_\beta} \sum_{\mathbf{p}} n'_F \left\{ p_\alpha \frac{E_p}{T} \frac{\partial E_p}{\partial p_\beta} \right\} = 0. \quad (53a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \sum_{\mathbf{p}} n'_F \left\{ -\frac{E_p^2}{T^2} + \frac{\Delta}{T} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial T} \right)_\mu \right\} - \frac{\partial v_{n,\beta}}{\partial r_\alpha} \sum_{\mathbf{p}} n'_F \left\{ p_\beta \frac{E_p}{T} \frac{\partial E_p}{\partial p_\alpha} \right\} = 0. \quad (53b)$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{j} \approx \rho_n \mathrm{div}\, \mathbf{v}_n + \rho_s \mathrm{div}\, \mathbf{v}_s = 0. \quad (53c)$$

Эта система полностью определяет температурную зависимость второго звука:

$$C_{\mathrm{II}}^2 = \rho_s \frac{B(T)^2}{A(T) L(T) \rho_e}, \quad (54)$$

где $\rho_e = \rho_s + \rho_n$, $L(T) = -\sum_{\mathbf{p}} p^2 n'_F / D$, D — число измерений,

$$-\sum_{\mathbf{p}} n'_F \left\{ p_\alpha \frac{E_p}{T} \frac{\partial E_p}{\partial p_\beta} \right\} = \delta_{\alpha,\beta} B(T),$$
$$A(T) = \sum_{\mathbf{p}} n'_F \left\{ -\frac{E_p^2}{T^2} + \frac{\Delta}{T} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial T} \right)_\mu \right\}. \quad (55)$$

Коэффициент $B(T)$ преобразуем с помощью интегрирования по частям:

$$-\sum_{\mathbf{p}} n'_F \left\{ p_\alpha \frac{E_p}{T} \frac{\partial E_p}{\partial p_\beta} \right\} n_F(E_p)(1 - n_F(E_p) = \sum_{\mathbf{p}} n_F(E_p) \frac{\partial (p_\alpha E_p)}{\partial p_\beta} = \sum_{\mathbf{p}} \left\{ \delta_{\alpha,\beta} n_F(E_p) E_p - T p_\alpha \frac{\partial (\ln [1 + \exp(-E_p/T)])}{\partial p_\beta} \right\} = \delta_{\alpha,\beta} \sum_{\mathbf{p}} \left\{ n_F(E_p) E_p + T \ln \left[1 + \exp \left(-\frac{E_p}{T} \right) \right] \right\} = \delta_{\alpha,\beta} T S. \quad (56)$$

Здесь S — энтропия идеального газа возбуждений, а коэффициент $A(T) = C_{V\mu}$ — его теплоемкость при

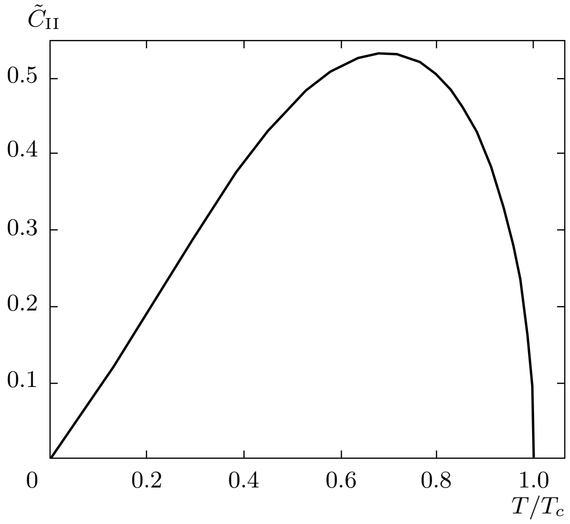

Рис. 2. Температурная зависимость скорости второго звука в сверхпроводнике, переводной множитель $(v_F/\varepsilon_F)T_c$

заданном μ, что легко проверить непосредственным дифференцированием.

Коэффициент $L(T)$ только множителем отличается от плотности нормальных электронов:

$$L(T) = -\frac{1}{D}T\sum_{\mathbf{p}} p^2 \frac{\partial n_F(E_p/T)}{\partial E_p} \approx \approx -\frac{p_0^2}{D}T\sum_{\mathbf{p}} \frac{\partial n_F(E_p/T)}{\partial E_p} = T\frac{p_0^2}{D}\frac{\rho_n}{\rho_e}, \quad (57)$$

где p_0 — импульс Ферми.

Таким образом, мы получили известную формулу Ландау [7], записанную для сверхпроводящей электронной системы:

$$C_{\text{II}}^2 = D\frac{T^2}{p_0^2}\frac{\rho_s}{\rho_n}\frac{S(T)^2}{TC_{V\mu}(T)}. \quad (58)$$

Возможность построения графика на рис. 2 основана на том, что все величины, входящие в определение второго звука, выражаются через безразмерное отношение $\zeta = \Delta/T$, через которое выражается величина T/T_c:

$$\frac{T}{T_c} = \frac{\pi}{\gamma\zeta}\exp\left\{2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k K_0(k\zeta)\right\},$$

$$\frac{\rho_n}{\rho_s} = -\frac{\partial\Delta}{\partial T}\frac{T}{\Delta} = -\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\Delta}{\partial T},$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial T} = \frac{2\zeta^2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k kK_1(k\zeta)}{1+2\zeta\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k kK_1(k\zeta)}. \quad (59)$$

Энтропия, приведенная к безразмерному виду с помощью T_c, также записывается в виде быстро сходящегося ряда по модифицированным функциям Бесселя $K_2(k\zeta)$:

$$S(\zeta) = -4\frac{T}{T_c}\zeta^2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k K_2(k\zeta). \quad (60)$$

Теплоемкость также пропорциональна безразмерной температуре:

$$C(\zeta) = 4\zeta\frac{T}{T_c}\left\{U(\zeta) - \frac{V(\zeta)}{1+2\zeta\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k kK_1(k\zeta)}\right\},$$

где

$$U(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{2}{k}K_1(k\zeta) + \zeta K_0(k\zeta)\right],$$

$$V(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[k\zeta^2K_1(k\zeta) + 2\zeta K_0(k\zeta) + \frac{4}{k}K_1(k\zeta)\right]. \quad (61)$$

В области низких температур ($\zeta \gg 1$) и теплоемкость, и энтропия, и ρ_n пропорциональны одной и той же малой экспоненте

$$\begin{gathered} S \approx 2\frac{\nu_0}{\rho_e}\sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^3}{T}}\exp\left(-\frac{\Delta_0}{T}\right), \\ c_p \approx c_v \approx 2\frac{\nu_0}{\rho_e}\sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^5}{T^3}}\exp\left(-\frac{\Delta_0}{T}\right), \end{gathered} \quad (62)$$

где $\nu_0 = \sum_p \delta(\xi_p)$ — плотность состояний;

$$\begin{gathered} \rho_n \approx \rho_e\sqrt{\frac{2\pi\Delta_0}{T}}\exp\left(-\frac{\Delta_0}{T}\right), \\ \rho_s = \rho_e - \rho_n \approx \rho_e, \end{gathered} \quad (63)$$

где $\rho_e = mp_0^3/(3\pi^2\hbar^3)$ — полная плотность электронов.

Отсюда можно заключить, что при $T \to 0$ скорость второго звука обращается в нуль по линейному температурному закону.

В обратном пределе, когда $T \to T_c$, отношение $\rho_s/\rho_n \approx 2(T_c - T)/T_c$, а теплоемкость и энтропия стремятся к постоянному пределу. Таким образом, при $T \to T_c$ скорость второго звука обращается в нуль по корневому закону: $C_{\text{II}} \sim v_F\sqrt{2(T_c - T)/T_c}$.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Таким образом, при сильном электрон-электронном отталкивании и при неполном заполнении нижней хаббардовской подзоны в электронной подсистеме имеется остаточное взаимодействие, которое, начиная с некоторой плотности, приводит к возникновению сверхпроводимости. Для описания явлений, происходящих в сверхпроводящей фазе, удается написать систему самосогласованных уравнений, содержащих нормальные и аномальные функции Грина. Соответствующие уравнения отличаются от уравнений Горькова наличием так называемых концевых множителей, возникающих в правой части. По этой причине решения в однородном случае только множителем отличаются от известных решений уравнений сверхпроводимости.

Основной вывод настоящей работы состоит в том, что для модели Хаббарда уравнения распадаются на систему фермижидкостных уравнений и систему уравнений для концевых множителей. Первая система приводит к спектру возбуждений с сильно анизотропной поверхностью Ферми и энергией возбуждений, зависящей от плотности. Коэффициенты теории Гинзбурга–Ландау существенно зависят от положения уровня Ферми, что также соответствует их зависимости от плотности. Если же рассматривать явления, происходящие при заданной плотности, тогда можно записать уравнения для квазичастичной функции распределения, получить двухжидкостную гидродинамику и, в частности, вычислить скорость второго звука.

Нефермижидкостные уравнения определяют временную и пространственную зависимости так называемых концевых множителей, устанавливающих связь между числом частиц и полным числом квазичастичных возбуждений. В сверхпроводящей области возникают аномальные концевые множители, которые можно определить из нестационарных уравнений для симметризованных гриновских функций. Решения этих уравнений, относящихся к неоднородным системам, будут рассмотрены в отдельной работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (грант № РНПВШ 2.1.1.5909).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Горьков, ЖЭТФ **34**, 735 (1958).

2. R. O. Zaitsev, Phys. Lett. A **134**, 199 (1988).

3. Р. О. Зайцев, ЖЭТФ **125**, 891 (2004).

4. Л. П. Горьков, ЖЭТФ **36**, 1918 (1959).

5. M. J. Stephen, Phys. Rev. **139**, A197 (1965).

6. Р. О. Зайцев, Письма в ЖЭТФ **88**, 849 (2008).

7. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **11**, 592 (1941).