ЖЭТФ, 2010, том 137, вып. 2, стр. 301–310 © 2010

ПРОВОДИМОСТЬ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ СТРУКТУРНО АНИЗОТРОПНОГО КОМПОЗИТА

Б. Я. Балагуров[*]

Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 сентября 2009 г.

Рассмотрена проводимость двумерной структурно анизотропной модели композита, представляющей собой изотропную матрицу с системой непроводящих включений в виде бесконечно тонких отрезков прямых линий (царапин). Царапины составляют с выделенной осью (для определенности — с осью y) с равной вероятностью углы θ или $-\theta$, а их центры хаотически распределены. С помощью приближенного метода эффективной среды найдено общее выражение для тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ этой модели, справедливое в широком диапазоне изменения концентрации. Показано, что в этом приближении обе составляющие тензора $\hat{\sigma}_e$ обращаются в нуль при одном и том же пороге протекания, для которого найдено явное выражение. Проводимость модели в критической области рассмотрена в рамках гипотезы подобия.

1. ВВЕДЕНИЕ

В стандартной теории протекания [1–3] основное внимание уделяется макроскопически изотропным неоднородным системам. В то же время значительный теоретический и практический интерес представляет также изучение электрофизических свойств менее исследованных анизотропных композиционных материалов. Из работ, посвященных исследованию проводимости этого класса композитов, отметим следующие.

В работах [4–9] различными методами изучалась проводимость композитов с естественной анизотропией — слоистых типа графита и нитевидных типа TCNQ. В работе [4] ставился численный эксперимент на кубической решетке (задача связей). В работах [5–7] рассмотрена проводимость в окрестности порога протекания, а в работах [8, 9] — во всем диапазоне изменения концентрации. В этих работах был выявлен ряд черт, характерных для анизотропных композитов. В частности, было показано, что при приближении к точке фазового перехода металл–диэлектрик исходно резко анизотропный композит становится практически изотропным. При этом соответствующие критические индексы совпадают с их изотропными значениями. В работах [8, 9] рассмотрена также промежуточная область концентраций, в которой свойства анизотропных композитов кардинально отличаются от изотропных.

В работах [10–14] исследовались структурно анизотропные композиты, анизотропия которых создается искусственно — путем введения в изотропную матрицу одинаково ориентированных включений, например, вытянутой формы. В работах [10, 11] компьютерными методами определялись пороги протекания (критические концентрации) для двумерных моделей с системой царапин, имеющих преимущественную ориентацию. Согласно результатам, полученным в работах [10, 11], критические концентрации для главных значений эффективного тензора проводимости $\hat{\sigma}_e$ отличаются друг от друга. Однако, как отмечено в работе [10], это связано, по-видимому, с конечностью числа царапин, использованных в компьютерном эксперименте. В работе [10] приведены аргументы в пользу того, что в пределе бесконечного ансамбля включений порог протекания должен быть один. В работах [12, 13] проведены модельные эксперименты по изучению проводимости тонких металлических пленок с системой параллельных, а также взаимно перпендикулярных отверстий эллиптической формы с отношением полуосей $b/a \ll 1$. В работе [14] вычислялась теплопроводность трехмерного композита с системой па-

[*] E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru, byabalagurov@mail.ru

раллельных включений иглообразной формы.

В настоящей работе аналитическими методами исследуется проводимость двумерной модели структурно анизотропного композита, аналогичной рассмотренной в работах [10, 11]. Определены усредненные геометрические характеристики модели и вычислен тензор эффективной проводимости в линейном по концентрации включений (царапин) приближении. Проводимость в широком диапазоне изменения концентрации рассмотрена с помощью приближенного метода — обобщенной на анизотропный случай так называемой теории эффективной среды [1]. Как известно, этот метод не может претендовать на адекватное описание проводимости в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик. Тем не менее, как показывает сравнение результатов настоящей работы с работой [15], это приближение дает для порога протекания значение, количественно близкое к найденной в работе [15] величине. Поведение проводимости модели при приближении к порогу протекания рассмотрено с привлечением представлений гипотезы подобия [3].

2. МОДЕЛЬ

Рассматриваемая модель (рис. 1) представляет собой изотропную матрицу проводимости σ_1 с системой непроводящих (или идеально проводящих) включений в виде бесконечно тонких отрезков прямых линий (царапин) длиной $2a$. Царапины с равной вероятностью ориентированы под углами θ или $-\theta$ относительно оси y, а их центры случайно распределены в плоскости x, y. Угол θ может принимать любое фиксированное значение из интервала $0 \le \theta \le \pi/4$. В общем случае подобная модель структурно анизотропна и ее электропроводность характеризуется эффективным тензором проводимости $\hat{\sigma}_e$. В частном случае $\theta = \pi/4$ модель макроскопически изотропна и описывается скалярной эффективной проводимостью σ_e. Интервал углов $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$ не рассматривается, так как этот случай сводится к предыдущему поворотом осей координат на 90°.

Обозначим размерную концентрацию включений (число включений на единице площади) через N. Величина $\ell = N^{-1/2}$ дает среднее расстояние между центрами включений. Кроме ℓ и длины царапины $2a$ для рассматриваемой модели имеется еще две геометрические характеристики — средние расстояния по прямой между включениями: $\langle L_x \rangle$ вдоль оси x и $\langle L_y \rangle$ вдоль оси y. Для оценки величин $\langle L_x \rangle$ и $\langle L_y \rangle$

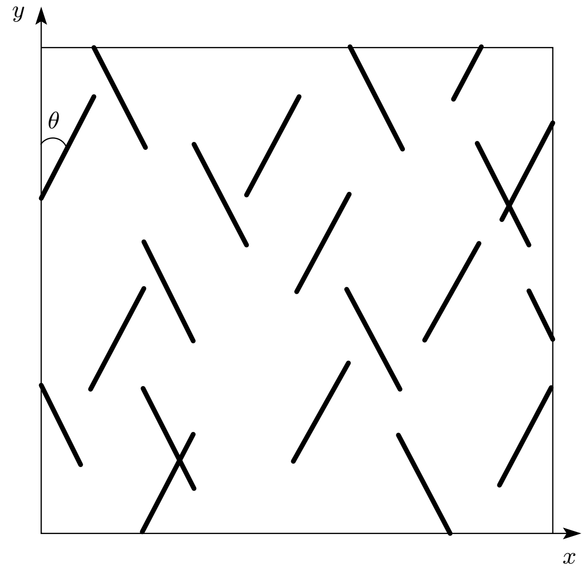

Рис. 1. Двумерная модель структурно анизотропного композита

рассмотрим аналогичную модель с включениями в виде эллипсов с полуосями a и b (при $b \ll a$).

Проведем, следуя работе [8], вдоль оси x прямую линию длиной $\mathcal{L} \to \infty$. На своем пути эта линия пересечет $\mathcal{N}$ включений по хордам длиной l_{xi}. При случайном распределении центров включений согласно работе [16] имеем

$$c = \frac{1}{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} l_{xi} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{L}} \langle l_x \rangle. \quad (1)$$

Здесь $c = \pi abN$ — безразмерная концентрация (доля занимаемой площади) включений, $\langle l_x \rangle$ — среднее значение длин хорд, по которым рассекаются эллипсы вдоль оси x. С другой стороны, имеем очевидное равенство

$$\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{N}} = \langle L_x \rangle + \langle l_x \rangle, \quad (2)$$

где $\langle L_x \rangle$ — искомое среднее расстояние между включениями в направлении оси x. Из формул (1) и (2) находим

$$\langle L_x \rangle = \frac{1-c}{c} \langle l_x \rangle. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что для выпуклой фигуры среднее значение длины хорды вдоль оси x равно площади S этой фигуры, деленной на длину ее проекции на ось y (см. [16]). Для эллипса $S = \pi ab$, а при $b \ll a$ для длины этой проекции имеем примерно $2a \cos\theta$. Поэтому $\langle l_x \rangle \approx \pi b / 2 \cos\theta$, так что из выражения (3) при $b \to 0$ для модели с царапинами получаем

$$\langle L_x \rangle = \frac{1}{2aN\cos\theta}. \tag{4}$$

Аналогичным образом находим $\langle l_y \rangle \approx \pi b/2\sin\theta$, так что

$$\langle L_y \rangle = \frac{1}{2aN\sin\theta}. \tag{5}$$

Таким образом,

$$\frac{\langle L_y \rangle}{\langle L_x \rangle} = \operatorname{ctg}\theta. \tag{6}$$

Результаты (4), (5) означают, что первая компонента (матрица) в этой модели разделена в среднем на области длиной $\langle L_x \rangle$ и $\langle L_y \rangle$ соответственно в направлении осей x и y.

3. ЛИНЕЙНОЕ ПО КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Вычисление эффективной электропроводности σ_e изотропной среды, состоящей из матрицы проводимости σ_1 и включений проводимости σ_2, методом, изложенным в книге [17, § 9], после усреднения выражения $\mathbf{j} - \sigma_1 \mathbf{E}$ приводит к соотношению

$$(\sigma_e - \sigma_1)\langle \mathbf{E} \rangle = -N(\sigma_1 - \sigma_2)\int_v \mathbf{E}\,dV. \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{j}$ — плотность тока, $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\langle \mathbf{E} \rangle$ — среднее по объему (площади в двумерном случае) образца, а N, как и выше, — размерная концентрация включений. Интеграл в соотношении (7), взятый по объему включения v, может быть выражен через его дипольный момент $\mathbf{p}$.

Рассмотрим аналогичную задачу для макроскопического тела с диэлектрической проницаемостью ε, помещенного во внешнее однородное электрическое поле напряженности $\mathbf{E}_0$. Дипольный момент $\mathbf{p}$ равен интегралу по объему этого тела v от вектора поляризации $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{p} = \int_v \mathbf{P}\,dV = \frac{1}{4\pi}\int_v (\mathbf{D}-\mathbf{E})\,dV = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\int_v \mathbf{E}\,dV, \tag{8}$$

где $\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции. С другой стороны, дипольный момент выражается через $\mathbf{E}_0$ следующим образом:

$$\mathbf{p} = \hat{\Lambda}\,\mathbf{E}_0, \tag{9}$$

где $\hat{\Lambda}$ — дипольная поляризуемость тела, имеющая размерность объема (площади в двумерном случае).

Для задачи о проводимости искомое соотношение следует из формулы (8) при замене $\varepsilon \to \sigma_2/\sigma_1$, так что из формул (7)–(9) получаем

$$(\sigma_e - \sigma_1)\langle \mathbf{E} \rangle = 4\pi N \sigma_1 \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0. \tag{10}$$

В линейном по концентрации приближении следует положить $\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}_0$ и тогда для достаточно симметричных включений, тензор $\hat{\Lambda}$ для которых сводится к скаляру Λ, из уравнения (10) находим (см., например, [18])

$$\sigma_e = \sigma_1 (1 + 4\pi N \Lambda). \tag{11}$$

Если же $\hat{\Lambda}$ не сводится к скаляру, а включения хаотически ориентированы, то тензор $\hat{\Lambda}$ нужно усреднить по углам, так что вместо (11) получим

$$\sigma_e = \sigma_1 \left\{ 1 + \frac{4\pi}{D} N \operatorname{Sp}\hat{\Lambda} \right\}, \tag{12}$$

где D — размерность пространства.

Наконец, если несимметричные включения одинаково ориентированы, то такая среда и при изотропной матрице становится макроскопически анизотропной. Для такого структурно анизотропного композита эффективный тензор проводимости в линейном по концентрации приближении имеет вид

$$\hat{\sigma}_e = \sigma_1 \left(\hat{1} + 4\pi N \hat{\Lambda} \right). \tag{13}$$

Здесь $\hat{1}$ — единичный диагональный тензор: $(\hat{1})_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. В главных осях

$$\sigma_{\nu e} = \sigma_1 (1 + 4\pi N \Lambda_\nu), \quad \nu = x, y, z. \tag{14}$$

Здесь и ниже используются сокращенные обозначения: $\sigma_{xx} = \sigma_x, \ldots, \Lambda_{xx} = \Lambda_x, \ldots$

Отметим, что выражения (11)–(14) особенно удобны в предельных случаях диэлектрических и идеально проводящих включений (в том числе и для «бестелесных», типа царапин), когда для нахождения тензора поляризуемости $\hat{\Lambda}$ достаточно ограничиться внешней задачей. При $D = 2$ для этого можно использовать метод конформных отображений, см., например, Приложение.

Для исследуемой в настоящей работе модели тензор $\hat{\Lambda}$ найден в Приложении. При применении формулы типа (14) царапины с углами θ и $-\theta$ относительно оси y можно рассматривать как разные включения одинаковой концентрации $N/2$. Поэтому в случае диэлектрических (d) царапин для безразмерных эффективных проводимостей $f_{\nu d} = \sigma_{\nu e}^{(d)}/\sigma_1$ получаем

$$f_{\nu d} = 1 + 4\pi N \overline{\Lambda}_{\nu d}, \quad \nu = x, y, \tag{15}$$

где $\overline{\Lambda}_{\nu d}$ — составляющие симметричного тензора

$$\hat{\overline{\Lambda}}_d = \frac{1}{2}\left\{\hat{\Lambda}_d(\theta) + \hat{\Lambda}_d(-\theta)\right\} = \\ = -\frac{a^2}{4}\begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Результат (15) означает, что в этом приближении рассматриваемая система эквивалентна более простой модели с одинаковыми включениями, обладающими симметричным тензором поляризуемости $\hat{\overline{\Lambda}}_d$ из формулы (16).

Из формул (15), (16) следует, что

$$f_{xd} = 1 - \pi a^2 N \cos^2\theta, \quad (17)$$

$$f_{yd} = 1 - \pi a^2 N \sin^2\theta. \quad (18)$$

Отметим, что при $\theta = \pi/4$ рассматриваемая модель изотропна: $f_{xd} = f_{yd} = f_d$, где $f_d = 1 - (1/2)\pi a^2 N$.

Выражения (17), (18) с ростом концентрации N обращаются в нуль и затем становятся отрицательными. Однако распространение этих формул на такие концентрации неправомерно, так как их область применимости ограничена малостью линейных по N поправок по сравнению с единицей. Тем не менее при $\theta \sim 1$ выражения (17), (18) дают, по-видимому, правильную по порядку величины оценку для порога протекания N_c этой модели. Действительно, царапины могут образовать бесконечный кластер [2], если среднее расстояние между их центрами $\ell = N^{-1/2}$ не превышает величины порядка a, откуда для критической концентрации получаем оценку $N_c \sim 1/a^2$.

При $\theta \ll 1$ включения ориентированы почти вертикально, так что соседние (вдоль оси y) царапины пересекутся, если среднее расстояние $\langle L_y\rangle \sim (aN\theta)^{-1}$ между ними сравнимо с их длиной $2a$. При этом среднее расстояние вдоль оси x не должно превышать величины равной примерно $a\theta$. Поэтому в этом случае «протекание» по включениям в направлении оси y произойдет при $N_c \sim 1/(a^2\theta) \gg 1/a^2$. При таких средних расстояниях между царапинами (при $N \sim N_c$) возможно «протекание» и по включениям в направлении оси x. Следовательно, пороги протекания вдоль осей x и y либо совпадают, либо имеют одинаковый порядок величины. Как будет показано ниже, в приближении эффективной среды в рассматриваемой модели имеется только один порог протекания, при котором обращаются в нуль (в случае непроницаемых царапин) обе составляющие эффективного тензора проводимости.

4. ЛИНЕЙНОЕ ПО КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Использованный в предыдущем разделе подход может быть обобщен и на анизотропный случай. Для этого нужно предварительно перейти к некоторой «штрихованной» системе, в которой включение окружено изотропной средой. Ниже ограничимся двумерным случаем.

Рассмотрим двумерную систему, для которой главные оси тензоров проводимости матрицы $\hat{\sigma}_1$ и включения $\hat{\sigma}_2$ совпадают с декартовыми осями x и y. Уравнения постоянного тока $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0. \quad (19)$$

Для закона Ома в первой и второй компонентах имеем соответственно

$$j_{x1} = \sigma_{x1}E_{x1}, \quad j_{y1} = \sigma_{y1}E_{y1}, \quad (20)$$

$$j_{x2} = \sigma_{x2}E_{x2}, \quad j_{y2} = \sigma_{y2}E_{y2}. \quad (21)$$

Потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ вне включения подчиняется уравнению

$$\sigma_{x1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \sigma_{y1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (22)$$

Преобразуем координаты, напряженность электрического поля и плотность тока следующим образом:

$$x = x', \quad y = \gamma\, y', \quad \gamma = \sqrt{\frac{\sigma_{y1}}{\sigma_{x1}}}; \quad (23)$$

$$E_x = \gamma E'_{x'}, \quad E_y = E'_{y'}; \quad (24)$$

$$j_x = j'_{x'}, \quad j_y = \gamma j'_{y'}. \quad (25)$$

В штрихованной системе уравнения (19) сохраняют свой вид, а матрица становится изотропной с законом Ома

$$\mathbf{j}' = \sigma_0\mathbf{E}', \quad \sigma_0 = \sqrt{\sigma_{x1}\sigma_{y1}}, \quad (26)$$

так что вместо формулы (22) потенциал $\varphi'(\mathbf{r}')$ подчиняется уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y'^2} = 0. \quad (27)$$

Наконец, для составляющих тензора проводимости $\hat{\sigma}'_2$ получаем

$$\sigma'_{x2} = \gamma\,\sigma_{x2}, \quad \sigma'_{y2} = \frac{1}{\gamma}\,\sigma_{y2}. \quad (28)$$

Подчеркнем, что при преобразовании (23)–(25) изменяется не только тензор проводимости включения, но и его форма.

Для анизотропной среды соотношения, аналогичные (7) и (8), имеют вид

$$(\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_1)\langle \mathbf{E}\rangle = -N\,(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)\int\limits_v \mathbf{E}\,dV, \qquad (29)$$

$$p_\alpha = \frac{1}{4\pi}\,(\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta})\int\limits_v E_\beta\,dV. \qquad (30)$$

При диагональных тензорах диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ и поляризуемости $\hat{\Lambda}$ из x-составляющей равенства (30) находим

$$\int\limits_v E_x\,dV = \frac{4\pi}{\varepsilon_x - 1}\,p_x = \frac{4\pi}{\varepsilon_x - 1}\,\Lambda_x E_{0x}. \qquad (31)$$

Такое же соотношение с заменой $x \to y$ следует и из составляющей y равенства (30).

Для двумерной штрихованной системы из формулы (31) при $\varepsilon_x = \sigma'_{x2}/\sigma_0$ получаем

$$\int\limits_{s'} E'_{x'}\,dS' = -4\pi\,\frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma'_{x2}}\,\Lambda'_x\,E'_{0x'}. \qquad (32)$$

Поэтому для исходной анизотропной системы имеем

$$\int\limits_s E_x\,dS = \gamma^2\int\limits_{s'} E'_{x'}\,dS' = -4\pi\gamma\,\frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma'_{x2}}\,\Lambda'_x\,E_{0x}. \qquad (33)$$

Поскольку

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma'_{x2}} = \frac{\sigma_{x1}}{\sigma_{x1} - \sigma_{x2}}, \qquad (34)$$

из формулы (29) с учетом (33), (34) в линейном по концентрации приближении получаем

$$\sigma_{xe} = \sigma_{x1}\,(1 + 4\pi N\gamma\,\Lambda'_x), \quad \gamma = \sqrt{\frac{\sigma_{y1}}{\sigma_{x1}}}. \qquad (35)$$

Аналогичным образом находим

$$\sigma_{ye} = \sigma_{y1}\left(1 + 4\pi N\gamma\,\Lambda'_y\right) \qquad (36)$$

с тем же значением величины γ.

5. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ СРЕДЫ

Для описания проводимости рассматриваемой модели при немалых концентрациях применим приближенный метод — так называемую теорию эффективной среды [1]. Это приближение неплохо зарекомендовало себя при изучении как изотропных [1], так и анизотропных [9] неупорядоченных композитов в широком диапазоне изменения концентрации. Как и всякая теория типа самосогласованного поля, этот метод неприменим в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик. Однако и в этом случае теория эффективной среды дает правильную по порядку величины оценку для порога протекания.

Для вывода основных уравнений приближения эффективной среды в задаче о проводимости n-компонентного композита усредним вектор $\mathbf{J} = \mathbf{j} - \hat{\sigma}_e\,\mathbf{E}$ по объему (площади при $D = 2$) образца V. Поскольку по определению эффективного тензора проводимости $\langle \mathbf{j}\rangle = \hat{\sigma}_e\langle \mathbf{E}\rangle$, среднее значение вектора $\mathbf{J}$ равно нулю. С другой стороны,

$$\langle \mathbf{j} - \hat{\sigma}_e\,\mathbf{E}\rangle = -\sum_{i=1}^{n}(\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_i)\,\frac{1}{V}\int\limits_{V_i}\mathbf{E}\,dV, \qquad (37)$$

где $\hat{\sigma}_i$ — тензор проводимости i-й компоненты, а интеграл берется по ее объему V_i. С учетом равенства нулю левой части тождество (37) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} N_i\,(\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_i)\,\overline{\left\{\int\limits_v \mathbf{E}\,dV\right\}}_i = 0. \qquad (38)$$

Здесь N_i — число включений i-й компоненты в единице объема, интегрирование в формуле (38) ведется по объемам включений этой компоненты. Под $\overline{\{\ldots\}}_i$ понимается усреднение по разным включениям i-й компоненты.

Приближение метода эффективной среды состоит в замене величины $\overline{\{\ldots\}}_i$ в формуле (38) на интеграл от напряженности электрического поля $\mathbf{E}_i$ внутри некоторого среднего i-го включения, помещенного в матрицу («эффективную среду») с тензором проводимости $\hat{\sigma}_e$.

Форму «включений» первой (с изотропной проводимостью σ_1) компоненты выбираем из тех соображений, что они в среднем имеют размер $\langle L_x\rangle$ вдоль оси x и $\langle L_y\rangle$ вдоль оси y. Согласно формуле (6) $\langle L_x\rangle/\langle L_y\rangle = \operatorname{tg}\theta$, так что в качестве «включения» первой компоненты возьмем эллипс с отношением полуосей

$$a_x/a_y = \operatorname{tg}\theta. \qquad (39)$$

Выбор эллиптической формы продиктован тем, что внутри такого включения напряженность электрического поля может быть найдена в явном виде. Для сохранения площади включения следует положить $a_x = \langle L_x\rangle/\sqrt{\pi}$ и $a_y = \langle L_y\rangle/\sqrt{\pi}$.

В данном случае главные оси тензора $\hat{\sigma}_e$ совпадают как с осями симметрии этого эллипса, так и с осями координат x и y. Поэтому согласно работе [9] для составляющих напряженности электрического поля $\mathbf{E}_1$ внутри рассматриваемого эллипса имеем

$$E_{\nu 1} = \frac{\sigma_{\nu e}}{\sigma_{\nu e} - (\sigma_{\nu e} - \sigma_1)\,\bar{n}^{(\nu)}}\,E_{\nu 0}, \quad \nu = x, y. \tag{40}$$

Здесь $\sigma_{\nu e}$ — главные значения тензора $\hat{\sigma}_e$, $\mathbf{E}_0 = \langle \mathbf{E} \rangle$ — напряженность электрического поля вдали от включения, $\bar{n}^{(\nu)}$ — коэффициенты деполяризации эллипса с полуосями

$$\bar{a}_\nu = \frac{a_\nu}{\sqrt{\sigma_{\nu e}}}, \quad \nu = x, y. \tag{41}$$

В рассматриваемом двумерном случае коэффициенты деполяризации имеют простой вид

$$\bar{n}^{(x)} = \frac{\bar{a}_y}{\bar{a}_x + \bar{a}_y}, \quad \bar{n}^{(y)} = \frac{\bar{a}_x}{\bar{a}_x + \bar{a}_y}, \tag{42}$$

откуда с учетом выражений (39), (41) для $\bar{n}^{(\nu)}$ из формулы (40) получаем окончательно

$$\bar{n}^{(x)} = \frac{1}{1 + \gamma\,\operatorname{tg}\theta}, \quad \bar{n}^{(y)} = \frac{\gamma\,\operatorname{tg}\theta}{1 + \gamma\,\operatorname{tg}\theta}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\sigma_{ye}}{\sigma_{xe}}}. \tag{43}$$

Поле, определенное формулой (40), однородно и поэтому интегрирование напряженности $E_{\nu 1}$ сводится просто к умножению ее на соответствующую площадь.

Для вычисления интеграла от $\mathbf{E}$ по площади включения воспользуемся подходом, аналогичным примененному в предыдущем разделе. Отличие состоит только в том, что при преобразовании типа (23)–(25) в качестве коэффициента γ следует взять величину, определенную в формуле (43): $\gamma = \sqrt{\sigma_{ye}/\sigma_{xe}}$. Для соответствующего интеграла, усредненного по включениям с углами θ и $-\theta$, аналогично формулам (32)–(34) получим

$$\int\limits_s E_\nu\,dS = -4\pi\gamma\,\frac{\sigma_{\nu e}}{\sigma_{\nu e} - \sigma_2}\,\overline{\Lambda}_\nu'\,E_{\nu 0}. \tag{44}$$

Подстановка в (38) (после указанной выше замены $\overline{\{\ldots\}}_i$ на интегралы от $\mathbf{E}_i$) выражений (40) и (44) приводит к искомым уравнениям приближения эффективной среды

$$p\,\frac{\sigma_{\nu e} - \sigma_1}{\sigma_{\nu e} - (\sigma_{\nu e} - \sigma_1)\,\bar{n}^{(\nu)}} - 4\pi\gamma N\,\overline{\Lambda}_\nu' = 0, \quad \nu = x, y \tag{45}$$

с γ из (43). В формуле (45) p — доля площади, занимаемой первой компонентой, $\overline{\Lambda}_\nu'$ — диагональная составляющая тензора поляризуемости включения, вычисленного в «штрихованной» системе.

Для рассматриваемой модели включения имеют нулевую площадь, так что в (45) следует положить $p = 1$. В штрихованной системе царапина меняет как длину, так и угол наклона:

$$a' = a\,\frac{\cos\theta}{\gamma}\,\sqrt{1 + \gamma^2\operatorname{tg}^2\theta}, \quad \operatorname{tg}\theta' = \gamma\operatorname{tg}\theta. \tag{46}$$

Поэтому для диагональных составляющих тензора $\hat{\overline{\Lambda}}{}'$ в случае непроводящих (d) царапин находим

$$\overline{\Lambda}_{xd}' = -\frac{(a')^2}{4}\,\cos^2\theta' = -\frac{a^2}{4\gamma^2}\,\cos^2\theta, \tag{47}$$

$$\overline{\Lambda}_{yd}' = -\frac{(a')^2}{4}\,\sin^2\theta' = -\frac{a^2}{4}\,\sin^2\theta. \tag{48}$$

Подставляя (47), (48) в (45), для безразмерных проводимостей $f_{\nu d} = \sigma_{\nu e}^{(d)}/\sigma_1$ с учетом $p = 1$ получаем

$$f_{xd} = \frac{1 - g\,\gamma^{-1}\,\bar{n}^{(x)}\cos^2\theta}{1 + g\,\gamma^{-1}\,\bar{n}^{(y)}\cos^2\theta}, \quad g = \pi a^2 N, \tag{49}$$

$$f_{yd} = \frac{1 - g\,\gamma\,\bar{n}^{(y)}\sin^2\theta}{1 + g\,\gamma\,\bar{n}^{(x)}\sin^2\theta} \tag{50}$$

с $\bar{n}^{(x)}$ и $\bar{n}^{(y)}$ из формул (43). При выводе (49), (50) использовано очевидное тождество $\bar{n}^{(x)} + \bar{n}^{(y)} = 1$. Для определения параметра $\gamma = \sqrt{f_{yd}/f_{xd}}$ из (49), (50) следует уравнение

$$\gamma^2 = \frac{1 - g\gamma\bar{n}^{(y)}\sin^2\theta}{1 + g\gamma\bar{n}^{(x)}\sin^2\theta}\,\frac{1 + g\,\gamma^{-1}\,\bar{n}^{(y)}\cos^2\theta}{1 - g\gamma^{-1}\bar{n}^{(x)}\cos^2\theta}. \tag{51}$$

Для идеально проводящих (s) царапин соответствующие безразмерные проводимости находятся из формул (49) и (50) с помощью соотношений

$$f_{xs} = \frac{1}{f_{yd}}, \quad f_{ys} = \frac{1}{f_{xd}} \tag{52}$$

при том же параметре $\gamma = \sqrt{f_{ys}/f_{xs}} = \sqrt{f_{yd}/f_{xd}}$.

Формулы (49), (50) и (52) вместе с уравнением (51) и выражениями (43) для $\bar{n}^{(\nu)}$ дают решение поставленной задачи в рамках приближения эффективной среды.

6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Анализ уравнений (49)–(51) при произвольных значениях величин a, θ и N требует привлечения численных методов. Ниже ограничимся рассмотрением некоторых предельных случаев.

1. При $\theta = 0$ ток, направленный вдоль непроницаемых царапин, не испытывает сопротивления и из формулы (50) следует очевидный результат $f_{yd} = 1$. В этом случае $\bar{n}^{(x)} = 1$ и $\bar{n}^{(y)} = 0$, так что из формулы (49) для проводимости f_{xd} получаем уравнение

$$f_{xd} = 1 - \pi a^2 N \gamma^{-1}, \qquad (53)$$

откуда с учетом равенства $\gamma = 1/\sqrt{f_{xd}}$ находим

$$f_{xd} = F\left(\frac{1}{2}\pi a^2 N\right), \quad F(\xi) = \left[\sqrt{1+\xi^2} - \xi\right]^2. \qquad (54)$$

С другой стороны, решением уравнения (51) при $\theta = 0$ является

$$\gamma = g/2 + \sqrt{g^2/4 + 1} \qquad (55)$$

и подстановка (55) в выражение (53) также приводит к формуле (54).

При $a^2 N \ll 1$ из (54) следует выражение (17) с $\theta = 0$. В противоположном случае, $a^2 N \gg 1$, имеем

$$f_{xd} \approx \frac{1}{(\pi a^2 N)^2}, \qquad (56)$$

что согласуется с качественной оценкой, приведенной в работе [8]. В этом случае проводимость f_{xd} обращается в нуль только в пределе $N \to \infty$. Отметим, что функция $F(\xi)$ из формулы (54) возникает и при рассмотрении проводимости двумерного композита с естественной анизотропией в приближении эффективной среды [9].

2. При $\theta = \pi/4$ уравнение (51) сводится к $(\gamma+1)^3(\gamma-1) = 0$. Отсюда следует, что $\gamma = 1$, т.е. при $\theta = \pi/4$ модель является макроскопически изотропной и характеризуется скалярной эффективной проводимостью f_d, для которой из (49), (50) с учетом равенства $\bar{n}^{(x)} = \bar{n}^{(y)} = 1/2$ получаем

$$f_d = \frac{1 - \pi a^2 N/4}{1 + \pi a^2 N/4}. \qquad (57)$$

В этом случае в рассматриваемой модели имеется порог протекания — проводимость обращается в нуль при критической концентрации

$$N_c = \frac{4}{\pi a^2}, \quad \theta = \frac{1}{4}\pi. \qquad (58)$$

Величина (58) близка к значению порога протекания для макроскопически изотропной модели с хаотической ориентацией царапин, найденного в работе [15]:

$$N_c = \frac{(2.118)^2}{\pi a^2}. \qquad (59)$$

Аналогичная оценка для N_c дана в работе [10].

3. При углах θ в диапазоне $0 < \theta < \pi/4$ компьютерное моделирование, проведенное в работах [10, 11], дало разные критические концентрации для величин f_{xd} и f_{yd}. В этом случае параметр γ из формул (49)–(51) должен обращаться либо в нуль, либо в бесконечность при стремлении N к первому (наименьшему) порогу протекания. Однако ни тот, ни другой предел не совместим с выражениями (49)–(51). Поэтому остается единственная возможность — одновременное обращение в нуль проводимостей f_{xd} и f_{yd}, так что в приближении эффективной среды имеется только один порог протекания N_c.

Для определения порога N_c приравняем числители выражений (49) и (50) нулю. Каждое из получившихся двух уравнений решаем относительно величины g. Поскольку порог протекания один, эти выражения для g должны быть равны, что дает уравнение для определения параметра γ в точке фазового перехода металл–диэлектрик. Решением этого уравнения является

$$\gamma_c = \operatorname{ctg}\theta. \qquad (60)$$

С помощью равенства (60) находим критическое значение величины g:

$$g_c = \frac{4}{\sin 2\theta}, \qquad (61)$$

откуда для искомого порога протекания получаем

$$N_c(\theta) = \frac{4}{\pi a^2 \sin 2\theta}. \qquad (62)$$

При $\theta = \pi/4$ из (62) следует выражение (58).

Для того чтобы найти зависимость проводимостей f_{xd} и f_{yd} от параметра близости к точке фазового перехода $\tau = (N_c - N)/N_c \ll 1$, положим в уравнении (51)

$$\gamma = \gamma_c + \delta\gamma, \quad g = g_c + \delta g, \qquad (63)$$

где $\delta\gamma$ и δg — величины одного порядка малости. В результате из (51) находим

$$\delta\gamma = \frac{1}{3}\cos^2\theta \cos 2\theta\, \delta g. \qquad (64)$$

Подстановка выражения (64) в (49) и (50) дает

$$f_{xd} \approx \sin^2\theta\, \frac{N_c - N}{N_c}, \quad f_{yd} \approx \cos^2\theta\, \frac{N_c - N}{N_c}. \qquad (65)$$

Из формул (65) следует, что в пределе $N \to N_c$ имеем $\sqrt{f_{yd}/f_{xd}} = \operatorname{ctg}\theta$, что согласуется с (60).

Отметим, что несмотря на результаты компьютерного эксперимента в работе [10] сделан вывод, что порог протекания должен быть один. Для соответствующей критической длины царапины в работе [10] была предложена формула, из которой для порога протекания в случае нашей модели следует выражение

$$N_c(\theta) = \frac{N_c(\pi/4)}{\sin 2\theta}, \tag{66}$$

где $N_c(\pi/4)$ — порог протекания для изотропной (при $\theta = \pi/4$) модели. Как отмечалось выше, величина $N_c(\pi/4)$, согласно работам [10, 11], близка к значению (58), так что выражения (62) и (66) практически совпадают.

7. КРИТИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ

Как и в других приближениях типа самосогласованного поля, проводимости f_{xd} и f_{yd} из (65) при $N \to N_c$ линейно зависят от параметра близости к точке фазового перехода $\tau = (N_c - N)/N_c$. Однако, как и в обычной (изотропной) теории протекания [1–3], в реальности эти зависимости являются, по-видимому, степенны́ми с соответствующими критическими индексами. Для оценки этих зависимостей в окрестности порога протекания поступим следующим образом.

Преобразуем координаты, напряженность электрического поля и плотность тока согласно формулам (23)–(25) с параметром γ, определенным из условия $\theta' = \pi/4$. В этом случае из формулы (46) следует

$$\gamma = \operatorname{ctg}\theta, \quad a' = \sqrt{2}\, a \sin\theta. \tag{67}$$

При таком преобразовании исходно изотропная матрица со скалярной проводимостью σ_1 становится анизотропной с тензором проводимости $\hat{\sigma}_1' = \left(\sigma_{x1}', \sigma_{y1}'\right)$, где

$$\sigma_{x1}' = \gamma\sigma_1, \quad \sigma_{y1}' = \gamma^{-1}\sigma_1. \tag{68}$$

Аналогичными соотношениями связаны составляющие тензоров эффективной проводимости исходной $\hat{\sigma}_e$ и штрихованной $\hat{\sigma}_e'$ систем:

$$\sigma_{xe} = \gamma^{-1}\sigma_{xe}', \quad \sigma_{ye} = \gamma\,\sigma_{ye}'. \tag{69}$$

Далее имеем $\langle L_x \rangle = \langle L_x' \rangle$ и

$$\langle L_y' \rangle = \gamma^{-1}\langle L_y \rangle = \langle L_x' \rangle, \tag{70}$$

так что в штрихованной системе распределение включений структурно (геометрически) изотропно. В то же время критическая концентрация является чисто геометрической характеристикой распределения диэлектрических включений и не зависит от проводящей компоненты, которая может быть как изотропной, так и анизотропной. Поэтому для порога протекания штрихованной системы N_c' имеем

$$N_c' = \frac{G}{\pi\,(a')^2} = \frac{G}{2\pi a^2 \sin^2\theta}, \tag{71}$$

где, в согласии с предыдущим разделом, $G \approx 4$. Концентрации включений для исходной N и штрихованной N' систем связаны соотношением

$$N = \gamma^{-1} N', \tag{72}$$

так что для порога протекания исследуемой модели N_c из уравнения (71) с учетом (72) и определения $\gamma = \operatorname{ctg}\theta$ находим

$$N_c = \frac{G}{\pi a^2 \sin 2\theta}, \tag{73}$$

что фактически совпадает с формулами (62), (66).

Согласно сказанному выше, штрихованная система представляет собой двумерный композит изотропной структуры с матрицей, обладающей проводимостью с естественной анизотропией. Как отмечалось в работах [5–9], такой композит становится практически изотропным при приближении к порогу протекания, так что $\sigma_{xe}' \approx \sigma_{ye}'$. Так, если эффективная электропроводность σ_e' композита той же структуры со скалярной проводимостью матрицы σ_1' при $N \to N_c$ убывает по закону

$$\tau \to 0: \quad \sigma_e' \approx A\sigma_1'\,\tau^t, \quad \tau = \frac{N_c - N}{N_c} \tag{74}$$

(здесь A — численный коэффициент порядка единицы), то для анизотропного случая при $\sigma_{x1}' \gg \sigma_{y1}'$ будем иметь [9]

$$\tau \to 0: \quad \sigma_{xe}' \approx \sigma_{ye}' \approx 2A\sigma_{y1}'\,\tau^t \tag{75}$$

с тем же («изотропным») критическим индексом t.

В формуле (75) учтено, что основной вклад в сопротивление композита как целого вносят участки путей протекания с наименьшей проводимостью σ_{y1}'. Коэффициент 2 в формуле (75) связан с тем, что участки с проводимостями σ_{x1}' и σ_{y1}' встречаются одинаково часто и при $\sigma_{x1}' \gg \sigma_{y1}'$ участки с σ_{x1}' вносят в сопротивление пренебрежимо малый вклад.

При произвольном соотношении между σ_{x1}' и σ_{y1}' для удельного сопротивления путей протекания будем иметь

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_{x1}'} + \frac{1}{\sigma_{y1}'}\right), \tag{76}$$

так что вместо формулы (75) получим

$$\tau \to 0: \quad \sigma'_{xe} \approx \sigma'_{ye} \approx 2\frac{\sigma'_{x1}\sigma'_{y1}}{\sigma'_{x1}+\sigma'_{y1}}\, A\tau^t. \qquad (77)$$

Для изотропного случая ($\sigma'_{x1} = \sigma'_{y1} = \sigma'_1$) из формулы (77) следует (74), а при $\sigma'_{x1} \gg \sigma'_{y1}$ — формула (75).

Подстановка в (77) выражений (68) с параметром γ из (67) дает

$$\tau \to 0: \quad \sigma'_{xe} \approx \sigma'_{ye} \approx \sigma_1 A \sin 2\theta \tau^t. \qquad (78)$$

Наконец, из равенств (69) с учетом формул (78) для $f_\nu = \sigma_{\nu e}/\sigma_1$ находим окончательно

$$\tau \to 0: \quad f_x \approx 2A\sin^2\theta\tau^t, \quad f_y \approx 2A\cos^2\theta\tau^t \qquad (79)$$

с τ из (74). Выражения (79) отличаются от (65) заменой τ на $2A\tau^t$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Пусть в изотропной среде проводимости σ_1 имеется включение (проводимости σ_2) произвольной формы, находящееся во внешнем однородном электрическом поле напряженности $\mathbf{E}_0$. Вдали от включения асимптотика потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ в двумерном случае имеет вид

$$r \to \infty: \quad \varphi(\mathbf{r}) \approx -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + 2\,\frac{\mathbf{pr}}{r^2} + \ldots, \qquad (\text{A.1})$$

где

$$\mathbf{p} = \hat{\Lambda}\,\mathbf{E}_0, \quad \hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda_{xx} & \Lambda_{xy} \\ \Lambda_{xy} & \Lambda_{yy} \end{pmatrix}. \qquad (\text{A.2})$$

Здесь $\hat{\Lambda}$ — симметричный тензор дипольной поляризуемости включения. Вычислив $E_x = -\partial\varphi/\partial x$ и $E_y = -\partial\varphi/\partial y$ с использованием (A.1), найдем асимптотику производной комплексного потенциала $\Phi'(z) = -E_x + iE_y$ (где $z = x + iy$), откуда получаем ($z \to \infty$)

$$\Phi(z) \approx -(E_{0x} - iE_{0y})\,z + {}+2\frac{\Lambda_{xx}E_{0x} + i\Lambda_{xy}(E_{0x} - iE_{0y}) + i\Lambda_{yy}E_{0y}}{z} + \ldots \qquad (\text{A.3})$$

В частном случае кругового включения радиуса R может быть найдено точное выражение для комплексного потенциала этой задачи, справедливое во всей внешней области:

$$|z| \ge R: \quad \Phi(z) = -(E_{0x} - iE_{0y})\,z - {} - R^2\,\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\,\frac{E_{0x} + iE_{0y}}{z}. \qquad (\text{A.4})$$

Ниже понадобится комплексный потенциал для круга единичного радиуса в предельных случаях $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_2 = \infty$, имеющий следующий вид:

$$|z| \ge 1: \quad \Phi(z) = -(u_{0x} - iu_{0y})\,z - \lambda\frac{u_{0x} + iu_{0y}}{z}, \qquad (\text{A.5})$$

где $\lambda = +1$ для диэлектрического включения и $\lambda = -1$ для идеально проводящего. В формуле (A.5) $\mathbf{u}_0 = (u_{0x}, u_{0y})$ — напряженность внешнего электрического поля.

Обозначим через $w = w(z)$ функцию, конформно отображающую внешность исходного включения на внешность круга единичного радиуса. Асимптотическое выражение для $w(z)$ в общем случае имеет вид

$$z \to \infty: \quad w(z) \approx \frac{z}{C} + \frac{D}{z} + \cdots \qquad (\text{A.6})$$

В разложении (A.6) опущено несущественное для дальнейшего постоянное слагаемое. Константы C и D, вообще говоря, комплексны:

$$C = C' + iC'', \quad D = D' + iD''. \qquad (\text{A.7})$$

Согласно формуле (A.6) преобразование $w = w(z)$ асимптотически является линейным. Следовательно, в плоскости w, как и в плоскости z, поле на бесконечности однородно. Поэтому соответствующий комплексный потенциал этой задачи в плоскости w имеет вид (A.5) с заменой $z \to w$:

$$|w| \ge 1: \quad \Phi(w) = -(u_{0x} - iu_{0y})\,w - {} - \lambda\,\frac{u_{0x} + iu_{0y}}{w}. \qquad (\text{A.8})$$

Искомый комплексный потенциал $\Phi(z)$ следует из (A.8) при подстановке функции $w = w(z)$.

Потенциал однородного поля в плоскости z должен иметь вид $-(E_{0x} - iE_{0y})\,z$, так что из (A.8) и (A.6) заключаем, что

$$u_{0x} - iu_{0y} = C\,(E_{0x} - iE_{0y}). \qquad (\text{A.9})$$

Подставляя (A.9) и (A.6) в (A.8) и сравнивая с асимптотикой (A.3), найдем выражения для составляющих тензора поляризуемости $\hat{\Lambda}$:

$$\Lambda_{xx} = -\frac{1}{2}\left(\lambda|C|^2 + C'D' - C''D''\right), \qquad (\text{A.10})$$

$$\Lambda_{yy} = -\frac{1}{2}\left(\lambda|C|^2 - C'D' + C''D''\right), \qquad (\text{A.11})$$

$$\Lambda_{xy} = -\frac{1}{2}\left(C'D'' + C''D'\right). \qquad (\text{A.12})$$

Сравнение выражений (A.10)–(A.12) для диэлектрического (d) включения при $\lambda = +1$ и для идеально проводящего (s) при $\lambda = -1$ показывает, что

$$\Lambda^{(s)}_{xx} = -\Lambda^{(d)}_{yy}, \quad \Lambda^{(s)}_{yy} = -\Lambda^{(d)}_{xx}, \quad \Lambda^{(s)}_{xy} = \Lambda^{(d)}_{xy}. \qquad (\text{A.13})$$

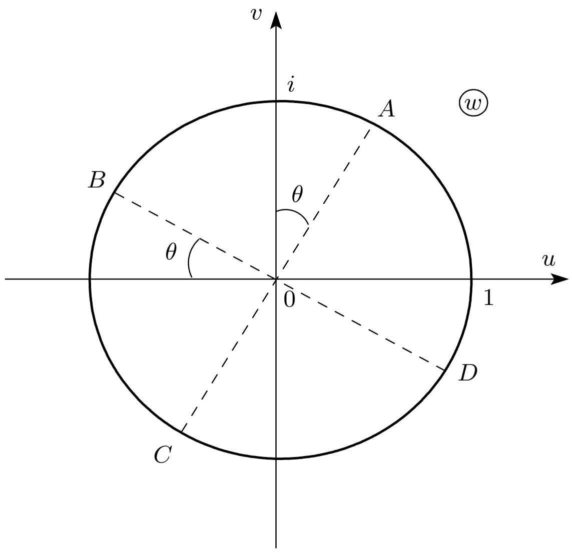

Рис. 2. Круг единичного радиуса в комплексной плоскости переменной $w = u + iv$

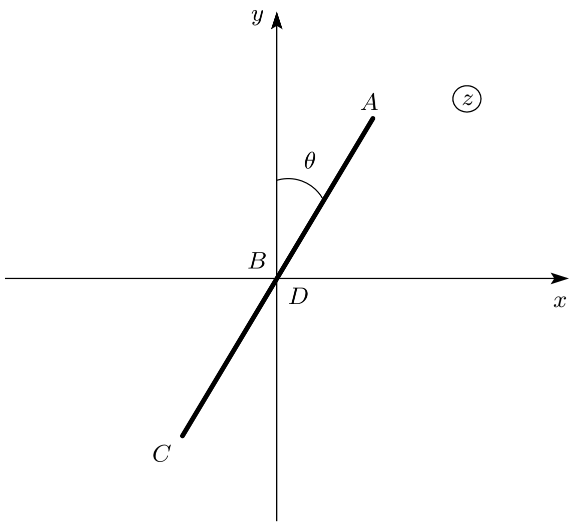

Рис. 3. Включение («царапина») в комплексной плоскости переменной $z = x + iy$

Соотношения (A.13) справедливы в двумерном случае для включений произвольной формы.

2. Функция

$$z = \frac{a}{2}\frac{w^2 - e^{-2i\theta}}{w} \tag{A.14}$$

конформно отображает внешность единичного круга (рис. 2) на внешность отрезка прямой длины $2a$, изображенного на рис. 3. При этом точке $w_A = ie^{-i\theta}$ отвечает $z_A = iae^{-i\theta}$, точке $w_B = -e^{-i\theta}$ соответствует $z_B = 0$ и т. д.

Находя из равенства (A.14) асимптотику функции $w(z)$ и сравнивая с (A.6), получаем

$$C = \frac{a}{2}, \quad D = \frac{a}{2}e^{-2i\theta}. \tag{A.15}$$

Поэтому для тензора поляризуемости непроницаемой царапины из (A.10)–(A.12) с учетом (A.15) находим

$$\hat{\Lambda}_d = -\frac{a^2}{4}\begin{pmatrix} \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{A.16}$$

Составляющие тензора поляризуемости идеально проводящей царапины находятся из (A.16) по соотношениям (A.13).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. **45**, 574 (1973). (Пер. в сб. *Теория и свойства неупорядоченных материалов*, Мир, Москва (1977).)
2. Б. И. Шкловский, А. Л. Эфрос, УФН **117**, 401 (1975).
3. A. L. Efros and B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. B **76**, 475 (1976).
4. J. Bernasconi, Phys. Rev. B **9**, 4575 (1974).
5. B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. B **85**, K111 (1978).
6. Б. И. Шкловский, Письма в ЖТФ **7**, 1312 (1981).
7. C. J. Lobb, D. J. Frank, and M. Tinkham, Phys. Rev. B **23**, 2262 (1981).
8. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **82**, 2053 (1982).
9. Б. Я. Балагуров, ФТТ **27**, 2375 (1985).
10. I. Balberg and N. Binenbaum, Phys. Rev. B **28**, 3799 (1983).
11. W. J. Boudville and T. C. McGill, Phys. Rev. B **39**, 369 (1989).
12. J. Tobochnik, M. A. Dubson, and M. L. Wilson, Phys. Rev. A **40**, 5370 (1989).
13. K. H. Han, J. O. Lee, and Sung-Ik Lee, Phys. Rev. B **44**, 6791 (1991).
14. B. Ya. Balagurov and G. A. Vinogradov, Composites: Part A **37**, 1805 (2006).
15. G. E. Pike and C. H. Seager, Phys. Rev. B **10**, 1421 (1974).
16. М. Кендалл, П. Моран, *Геометрические вероятности*, Наука, Москва (1972).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
18. Б. Я. Балагуров, ЖТФ **52**, 850 (1982).