

ЭВОЛЮЦИЯ ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНЫХ ЛАВИН И СТРИМЕРОВ В НЕПРЯМОЗОННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

A. C. Кюрегян*

Всероссийский электротехнический институт им. В. И. Ленина
111250, Москва, Россия

Поступила в редакцию 30 января 2009 г.

Проведено численное моделирование зарождения и эволюции стримеров в полупроводниках. Использовалось диффузионно-дрейфовое приближение с учетом ударной и туннельной ионизации. Предполагалось, что внешнее электрическое поле E_0 постоянно и однородно, лавина и стример аксиально-симметричны, фоновые электроны и дырки отсутствуют, а все их кинетические коэффициенты равны. Подробно изучены линейная эволюция электронно-дырочной лавины, лавинно-стримерный переход и две последовательные стадии эволюции стримера — промежуточная «диффузионная» и основная экспоненциально-автомодельная. Показано, что стример похож на гантель с коническими грузами. Основания этих конусов — фронты стримера — представляют собой тонкие оболочки, содержащие почти весь заряд стримера и по своей форме очень близкие к половинкам эллипсоидов вращения. Фронт распространяется так, что неизменными остаются его форма и форма «груза» гантели, максимальное поле на фронте и плотность электронно-дырочной плазмы в грузах. Напряженность поля за фронтом много меньше E_0 , но увеличивается по мере приближения к «ручке» гантели, диаметр которой растет со временем t за счет поперечной диффузии. Концентрация электронов и дырок в ручке увеличивается за счет ударной ионизации в почти однородном поле, которое лишь немного меньше E_0 . Во время «диффузионной» стадии длина стримера и радиус кривизны его фронта увеличиваются с постоянными скоростями, которые определяются не только ударной ионизацией и дрейфом, но и диффузией. В относительно слабом поле ($E_0 \lesssim 0.4$ МВ/см для кремния) эта стадия завершается из-за возникновения неустойчивости фронта. В более сильном поле до начала неустойчивости начинает проявляться туннельная ионизация, которая приводит к возникновению стримера нового типа. Его главной особенностью является устойчивый экспоненциальный рост всех пространственных масштабов с одной и той же постоянной времени t_R , так что при больших t концентрация носителей заряда и напряженность поля зависят только от одной векторной переменной $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \exp(-t/t_R)$. Это означает, что асимптотически решение задачи Коши, описывающей эволюцию стримера в однородном поле, является экспоненциально-автомодельным.

PACS: 51.50.+v, 52.35.-g, 52.80.-s, 72.20.Ht

1. ВВЕДЕНИЕ

Стримерный механизм электрического разряда, предложенный почти 70 лет назад [1, 2], широко используется для описания импульсного электрического пробоя газов при высоких давлениях [3, 4]. Исследование стримеров посвящено множество работ, однако построение физической модели этого интересного и практически важного объекта еще далеко не завершено. Причины такого положения дел хорошо известны. Очень высокая (до 10^9 см/с) скорость рас-

пространения u_f и малые (от единиц микрометров в полупроводниках до сотен микрометров в газах) поперечные размеры стримера настолько осложняют экспериментальные исследования, что лишь совсем недавно начали появляться первые результаты о внутренней структуре стримеров [5, 6]. Построение аналитической теории крайне затруднено, так как для описания структуры и эволюции стримеров даже в рамках гидродинамического приближения необходимо решить нестационарную, неодномерную и сильнолинейную систему уравнений непрерывности совместно с уравнением Пуассона. Поэтому все попытки создания теории стримеров были осно-

*E-mail: ask@vei.ru

ваны на более или менее правдоподобных простых моделях [7–15], которые, однако, до сих пор не получили достаточного обоснования.

Таким обоснованием могли бы быть результаты численного моделирования стримеров, опубликованные в десятках статей (см. литературу, цитированную в [16, 17]). Однако все известные нам результаты весьма противоречивы, далеко не полны и во многих отношениях не совпадают с результатами теоретических моделей. Большинство опубликованных работ посвящено либо решению какого-нибудь частного (хотя бы и важного) вопроса, либо преодолению вычислительных проблем (на самом деле очень не простых) и демонстрации эффективности новых алгоритмов. В этом направлении за последние годы были достигнуты значительные успехи [18–20], которые наряду с прогрессом вычислительной техники позволяют выполнять высококачественные численные эксперименты. Тем не менее эти новые возможности до сих пор не привели к появлению работ, в которых было бы дано достаточно полное количественное и качественное описание глобальной структуры стримеров и ее эволюции даже для самого простого случая однородного и постоянного поля¹⁾. Следует еще добавить, что подавляющее большинство этих работ посвящено моделированию стримеров в газах. Между тем стримеры наблюдаются также при импульсном пробое других сред, в частности полупроводников [22].

Стримеры в полупроводниках обладают важными особенностями. Например, они обычно распространяются вдоль определенных кристаллографических направлений [22], а излучение стримерной электронно-дырочной плазмы может быть стимулированным [23, 24]. Микроскопические процессы в полупроводниках, определяющие структуру и характер эволюции стримеров, также существенно отличаются от таковых в газах. Во-первых, перенос заряда и ударная ионизация осуществляются и электронами, и дырками, т. е., в отличие от газов, являются биполярными. Во-вторых, рост дрейфовых скоростей электронов и дырок прекращается (или даже может смениться убыванием) в относительно слабых полях. В-третьих, в полупроводниках существует дополнительный (кроме ударной ионизации и фотоионизации) механизм генерации свободных носителей заряда — межзонное туннелирование, который мо-

жет оказаться весьма эффективным или даже основным в сильном поле на фронте стримера [23]. Поэтому опубликованные результаты численного моделирования не могут быть использованы для интерпретации экспериментальных исследований стримеров в полупроводниках и построения соответствующей теории.

В настоящей работе мы предприняли попытку моделирования стримеров в полупроводниках. Главной целью работы являлось получение максимально подробных и полных результатов для простейшего случая постоянного и однородного внешнего поля E_0 , которые могли бы служить основой для дальнейших исследований. Кроме того, мы ограничились рассмотрением только непрямозонных полупроводников типа Si, Ge или SiC, в которых скорость излучательной рекомбинации очень мала и поэтому можно пренебречь фотоионизацией среды перед фронтом стримера. Учет этого механизма (который может оказывать решающее влияние на стримеры в прямозонных полупроводниках типа $A^{III}B^V$ и $A^{II}B^{VI}$, как и в газах) сильно осложняет вычисления [25–27] и заслуживает отдельного исследования.

Есть и еще одна причина для такого выбора объекта исследований. Именно, стримерные полупроводниковые лазеры [23, 24], несмотря на все свои потенциальные возможности, до сих пор не нашли практического применения. В то же время есть основания полагать [28, 29], что стримерный механизм пробоя определяет (по крайней мере в некоторых режимах) работу уникальных по своим характеристикам коммутаторов — лавинных обострителей напряжения [30, 31]. Основным материалом для этих приборов до сих пор служит монокристаллический кремний, а стримеры в них возникают вследствие эволюции удаленных друг от друга электронно-дырочных лавин в относительно однородном (по сравнению с полем в геометрии точка—плоскость, типичной для стримерных лазеров [23, 24]) электрическом поле высоковольтных $p-n$ -переходов.

В разд. 2 описаны использованные нами математическая модель электронно-дырочных лавин и стримеров в полупроводниках, а также метод численного решения соответствующей задачи Коши. В разд. 3 последовательно изложены и обсуждены результаты моделирования линейной стадии эволюции электронно-дырочных лавин и лавинно-стримерного перехода, промежуточной «диффузионной» стадии эволюции стримеров и основной стадии, во время которой эволюция стримеров является экспоненциально-автомодельной. В тех случаях, когда это возможно, результаты моделирова-

¹⁾ Единственным известным нам исключением является цикл работ [21], в которых приведены наиболее подробные, но все же недостаточно полные результаты моделирования стримерного пробоя азота и воздуха в однородном поле.

ния сравниваются с теорией стационарных плоских волн ударной ионизации. Далее обсуждаются ограничения применимости использованной нами модели. В Заключении суммированы основные результаты и проведено их сопоставление с ранее опубликованными работами.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

2.1. Математическая модель лавины и стримера

Как и авторы большинства работ, посвященных численному моделированию стримеров, мы использовали диффузионно-дрейфовое приближение, в рамках которого распределения электронов, $n(t, \mathbf{r})$, дырок, $p(t, \mathbf{r})$, и потенциала, $\varphi(t, \mathbf{r})$, описываются системой уравнений непрерывности и Пуассона:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}_e = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}_h = s_g - s_r, \quad (1)$$

$$\Delta \varphi = \frac{q}{\varepsilon} (n - p), \quad (2)$$

где q — элементарный заряд, ε — диэлектрическая проницаемость полупроводника, слагаемые $s_{g,r}$ определяют все возможные механизмы генерации и рекомбинации, плотности потоков свободных носителей заряда равны

$$\mathbf{j}_{e,h} = (\mathbf{v}_{e,h} n - \nabla D_{e,h} n),$$

индексы « e » и « h » соответствуют электронам и дыркам. В непрямозонных полупроводниках генерация пар происходит главным образом за счет ударной и тунNELной ионизации, поэтому скорость генерации

$$s_g = (\alpha_e v_e n + \alpha_h v_h p) h(n + p - n_{th}) + g_t, \quad (3)$$

где $h(x)$ — единичная функция Хэвисайда, n_{th} — некоторая пороговая концентрация. Она введена для того, чтобы исключить появление нефизических решений из-за ударной ионизации далеко перед фронтом стримера, где концентрация электронов и дырок, порожденных тунNELной ионизацией во внешнем поле, очень мала ($n + p < n_{th}$) и континуальное приближение заведомо неприменимо [32, 33]. Предполагая, что время жизни носителей заряда много больше времени распространения стримера, мы пренебрегали рекомбинацией, т. е. полагали $s_r = 0$. Кроме того, мы считали, что коэффициенты ударной ионизации $\alpha_{e,h}$, дрейфовые скорости

$\mathbf{v}_{e,h}$ и скорость тунNELной ионизации g_t являются заданными мгновенными и локальными функциями напряженности поля $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, использовали обычные аппроксимации

$$\mathbf{v}_h = -\mathbf{v}_e = \mu \mathbf{E}, \quad \mu = v_s / (E + E_s), \quad (4)$$

$$\alpha_e = \alpha_h = \tilde{\alpha} \exp(-\tilde{E}/E), \quad (5)$$

$$g_t = \tilde{g}_t (E/E_t)^2 \exp(-E_t/E), \quad (6)$$

и пренебрегали зависимостью коэффициентов диффузии $D_{e,h}$ от E , полагая $D_e = D_h = D = \text{const}$. Входящие в выражения (4)–(6) параметры μ , v_s , $E_{s,t}$, $\tilde{\alpha}$, \tilde{E} , \tilde{g}_t определяются зонной структурой полупроводников и механизмами рассеяния электронов и дырок.

Учитывая все сказанное выше и используя безразмерные переменные

$$\theta = \tilde{\alpha} v_s t, \quad \mathbf{R} = \tilde{\alpha} \mathbf{r}, \quad \Phi = \varphi \tilde{\alpha} / \tilde{E},$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} / \tilde{E} = -\nabla_{\mathbf{R}} \Phi,$$

$$\sigma = q(p+n)/\varepsilon \tilde{\alpha} \tilde{E}, \quad \rho = q(p-n)/\varepsilon \tilde{\alpha} \tilde{E},$$

систему уравнений (1), (2) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \nabla_{\mathbf{R}}(\rho \mathbf{V} - \mathcal{D} \nabla_{\mathbf{R}} \sigma) = 2[\sigma V A h(\sigma - \sigma_{th}) + G_t], \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \nabla_{\mathbf{R}}(\sigma \mathbf{V} - \mathcal{D} \nabla_{\mathbf{R}} \rho) = 0, \quad (8)$$

$$\Delta_{\mathbf{R}} \Phi = -\rho, \quad (9)$$

где $\sigma_{th} = q n_{th} / \varepsilon \tilde{\alpha} \tilde{E}$, $\mathbf{V} = \mu \mathbf{E} / v_s = \mathbf{F} / (F + F_s)$,

$$A = \exp\left(-\frac{1}{F}\right), \quad G_t = G_{t0} F^2 \exp\left(-\frac{F_t}{F}\right),$$

$$\mathcal{D} = \frac{\tilde{\alpha} D}{v_s}, \quad G_{t0} = \frac{q \tilde{g}_t \tilde{E}}{\varepsilon v_s E_t^2 \tilde{\alpha}^2}, \quad F_{s,t} = \frac{E_{s,t}}{\tilde{E}}.$$

При типичных параметрах полупроводников (например, кремния) единичные значения этих безразмерных переменных соответствуют времени $(\tilde{\alpha} v_s)^{-1} \approx 0.1$ пс, длине $\tilde{\alpha}^{-1} \approx 0.01$ мкм, напряженности поля $\tilde{E} \approx 1.5$ МВ/см, потенциалу $\tilde{E}/\tilde{\alpha} \approx 1.5$ В, концентрации $\varepsilon \tilde{\alpha} \tilde{E} / q \approx 10^{19}$ см⁻³, скорости $v_s \approx 10^7$ см/с и коэффициенту диффузии $v_s/\tilde{\alpha} \approx 10$ см²/с. Далее везде мы будем описывать и обсуждать результаты в терминах этих безразмерных переменных.

Лавина и стример обладают аксиальной симметрией, поэтому мы использовали цилиндрическую систему координат $\mathbf{R} = \{X, Y, \vartheta\}$, где $X = \tilde{\alpha}x$ и $Y = \tilde{\alpha}\sqrt{y^2 + z^2}$. При сделанных допущениях начальные условия для системы уравнений (7)–(9) имеют вид

$$\Phi(0, X, Y) = F_0 X, \quad (10)$$

$$\sigma(0, X, Y) = \sigma_0(X, Y), \quad \rho(0, X, Y) = 0, \quad (11)$$

где $F_0 = E_0/\tilde{E}$, $\sigma_0(X, Y)$ — любая достаточно сильно локализованная функция, удовлетворяющая условию нормировки $\iint \sigma_0(X, Y) Y dX dY = q\tilde{\alpha}^2/\pi\varepsilon\tilde{E}$. Оно соответствует появлению в начале координат одной электронно-дырочной пары в момент времени $\theta = 0$. Мы использовали гауссово распределение

$$\sigma_0(X, Y) = \sigma_{00} \exp\left(-\frac{X^2 + Y^2}{Y_\sigma^2}\right), \quad (12)$$

где Y_σ — «радиус» локализации начального возмущения, $\sigma_{00} = 2q\tilde{\alpha}^2/\pi^{3/2}\varepsilon\tilde{E}Y_\sigma^3 \approx 0.036Y_\sigma^{-3}$. В этом случае наша задача также симметрична относительно плоскости $X = 0$, поэтому ее достаточно решить в прямоугольной области Γ ,

$$0 \leq X \leq X_0, \quad 0 \leq Y \leq Y_0,$$

размеры X_0, Y_0 которой должны быть значительно больше длины стримера. При этом граничные условия принимают вид

$$\Phi(\theta, 0, Y) = 0, \quad \Phi(\theta, X_0, Y) = F_0 X_0,$$

$$\partial\Phi(\theta, X, Y)/\partial Y|_{Y=0, Y_0} = 0, \quad (13)$$

$$\sigma(\theta, X_0, Y) = \sigma(\theta, X, Y_0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \partial\sigma(\theta, X, Y)/\partial X|_{X=0} &= \\ &= \partial\sigma(\theta, X, Y)/\partial Y|_{Y=0} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\rho(\theta, 0, Y) = \rho(\theta, X_0, Y) = \rho(\theta, X, Y_0) = 0,$$

$$\partial\rho(\theta, X, Y)/\partial Y|_{Y=0} = 0. \quad (15)$$

2.2. Численное решение задачи Коши

Задача Коши (7)–(15) решалась методом конечных элементов с квадратичными элементами Лагранжа [34]. Для решения линеаризованной системы уравнений использовался алгоритм UMFPACK [35]. Шаг по времени $\Delta\theta$ устанавливался таким образом,

чтобы дальнейшее его уменьшение практически не влияло на результаты; обычно величина $\Delta\theta$ изменялась от 0.01 до 0.2 в зависимости от стадии эволюции и величины F_0 . Область вычислений Γ представляла собой квадрат, стороны которого $X_0 = Y_0$ изменились от 10^3 до 10^5 в зависимости от величины F_0 , и во всех случаях превосходила длину стримера по крайней мере в три раза.

Вследствие многомасштабности структуры стримеров [36], качественное моделирование их эволюции практически невозможно при использовании равномерной и даже неравномерной, но не изменяющейся во времени сетки. Поэтому в большинстве современных работ, посвященных моделированию стримеров в газах, применялся какой-либо алгоритм адаптации сетки (см., например, работы [18–20] и цитированную в них литературу). Например, вся область Γ разбивалась [18] на множество прямоугольных подобластей Γ_k^i , в каждой из которых сетка была однородной, а размер элементов был равен $\Delta X_{min} \cdot 2^k$ с параметром k , принимающим целочисленные значения от 0 до $m = 4$ –6. Размеры, положение и значение k для каждой подобласти определялись на каждом временном шаге с помощью некоторых критериев точности и устойчивости вычислений. Такая процедура позволяет минимизировать полное количество элементов при заданной величине ΔX_{min} , но одновременно сама по себе замедляет процесс вычислений.

Мы осуществляли процедуру адаптации сетки следующим образом. В области Γ выделялась подобласть Γ_{st} , внутри которой распространялись лавина и стример. В свою очередь подобласть Γ_{st} разбивалась на еще меньшие части, из которых две-три заполняли область Γ_f в виде эллипсоподобной оболочки, где распространялся фронт и очень резко изменялись концентрация σ , плотность объемного заряда ρ и напряженность поля F , а остальные перекрывали «тело» лавины или стримера. Толщина области Γ_f в направлении распространения стримера обычно превышала толщину δ его фронта в 5–10 раз. Для каждой из этих малых областей устанавливался свой размер элементов ΔX таким образом, чтобы от элемента к элементу величины σ, ρ и F изменялись не больше чем на 20–30 %. Таким образом формировалась пространственно-неоднородная сетка, плотность которой была максимальна ($\Delta X = \Delta X_{min}$) в области Γ_f , содержащей около 50–70 % всех элементов. Остальная часть области Γ_{st} , объем которой превышал Γ_f в несколько раз, содержала 15–25 % всех элементов. Полное число элементов определялось ресурсами использованного нами компьютера

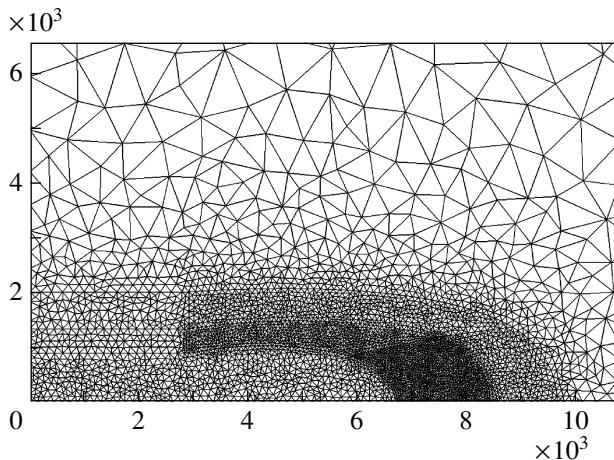


Рис. 1. Пример неоднородной сетки конечных элементов в области Γ размерами $X_0 = Y_0 = 3 \cdot 10^4$, которая использовалась для моделирования стримера во внешнем поле $F_0 = 0.435$ в интервале значений $\theta = 680\text{--}700$. Общее число элементов равно 15020. Область Γ_f (с наиболее плотной сеткой), через которую проходит фронт толщиной $\delta \approx 160$, содержит около 6000 элементов размерами $\Delta X, \Delta Y \leq 40$

и обычно изменялось в пределах $(1\text{--}2) \cdot 10^4$. Типичный пример такой неоднородной сетки приведен на рис. 1.

Процесс вычислений разбивался на 5–25 этапов, в течение каждого из которых сетка оставалась неизменной, а фронт распространялся через область Γ_f . После завершения каждого этапа данные вычислений сохранялись, а размеры всех малых подобластей в Γ_{st} увеличивались так, чтобы во время следующего этапа фронт опять распространялся через измененную область Γ_f с наиболее плотной сеткой. Начальными условиями для каждого этапа служили результаты вычислений в последний момент этапа предыдущего. Возможность реализации такой процедуры основана на том, что структура лавины и стримера, также как и характер их эволюции вполне предсказуемы (см. разд. 3.2 и 3.3). Именно это позволило сконструировать более или менее оптимальную конфигурацию множества подобластей Γ_{st}^i с различными и наиболее подходящими для каждой из них величинами ΔX , а также выработать алгоритм изменения размеров этих подобластей. Особенно простым такой алгоритм был при моделировании стримера на стадии экспоненциально-автомодельной эволюции стримера (см. разд. 3.3). Именно, после завершения каждого этапа вычислений размеры всех подобластей Γ_{st}^i просто увеличивались на 15–30 %.

Описанная процедура позволила реализовать по сути дела ту же стратегию моделирования, которая была предложена в работе [18]. Ее авторы исследовали также влияние размера ΔX_{min} на результаты вычислений в рамках так называемой минимальной модели стримера²⁾. Они пришли к выводу о том, что для обеспечения надлежащей точности моделирования размеры элементов в области фронта должны удовлетворять неравенству

$$\Delta X_{min} A_M \leq 1/4,$$

где $A_M = A(F_M)$, F_M — максимальная напряженность поля на фронте стримера. Это условие действительно иногда необходимо, в частности для изучения проблемы устойчивости фронта стримера [38–40]. Однако до возникновения неустойчивости использование более грубой сетки приводит лишь к незначительным количественным расхождениям. Мы убедились в этом, повторив моделирование стримера в газе из работы [18] при $F_0 = 0.5$, но используя описанную выше процедуру вычислений и значительно более грубую, чем в [18], сетку на фронте ($\Delta X_{min} A_M = 4/3$ в области Γ_f). Оказалось, что полученное таким образом время устойчивого распространения фронта всего на 8 % меньше, чем в [18], а до возникновения неустойчивости основные параметры (положение и скорость фронта, максимальная напряженность поля на фронте) практически не отличаются от полученных в [18]. Во всех наших расчетах значения $\Delta X_{min} A_M$ изменились от 1.25 до 2.5 на диффузионной стадии эволюции (разд. 3.2). Однако для устойчивого моделирования основной стадии эволюции стримера, описанной в разд. 3.3, оказалось достаточным поддерживать постоянство отношения $\Delta X_{min}/\delta$ на уровне 0.15–0.25, хотя при этом величина $\Delta X_{min} A_M$ экспоненциально увеличивалась со временем и могла превышать 100.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Все расчеты выполнялись при напряженности внешнего однородного поля F_0 в интервале 0.17–0.91

²⁾ Минимальная модель стримера, по определению авторов работы [37], основана на гидродинамическом приближении, учитывает только ударную ионизацию, дрейф и диффузию электронов и предполагает, что фоновые электроны перед фронтом отсутствуют. В настоящей работе аналогичная модель, учитывающая особенности полупроводников, использовалась для вычислений во время «диффузионной» стадии эволюции стримера, описанной в разд. 3.2.

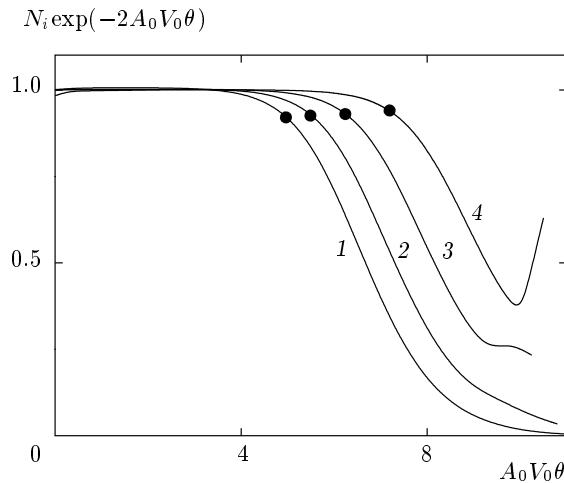


Рис. 2. Замедление экспоненциального роста полного числа электронно-дырочных пар в лавине после завершения линейной стадии эволюции. Линии — результаты численного моделирования при значениях $A_0 = A(F_0) = 0.1$ (кривая 1), 0.03 (2), 0.01 (3), 0.003 (4). Точками отмечены моменты θ_a начала лавинно-стримерного перехода, рассчитанные по формуле (21) при $\eta = 0.2$

и значениях $\mathcal{D} = 0.4, 2.0, 10$. Для остальных параметров, входящих в уравнения (7)–(9), были приняты значения $F_s = 0.01$ и $G_{t0} = 30$, $F_t = 15$, которые получаются при использовании типичных величин соответственно $E_s = 15$ кВ/см и $\tilde{g}_t = 6.7 \cdot 10^{35}$ см $^{-3} \cdot$ с $^{-1}$, $E_t = 2.25$ МВ/см [41]. Результаты практически не зависели от величин пороговой концентрации σ_{th} в интервале 10^{-10} – 10^{-6} и радиуса локализации Y_σ первичной электронно-дырочной пары в интервале 10^{-1} – 10 ; в большинстве случаев мы использовали значения $\sigma_{th} = 10^{-8}$ и $Y_\sigma = 2$. В качественном отношении на результаты не влияла также величина \mathcal{D} , поэтому все данные приведены для случая $\mathcal{D} = 2$, если это специально не оговорено.

3.1. Линейная стадия эволюции электронно-дырочной лавины и лавинно-стримерный переход

До тех пор пока искажение внешнего поля объемным зарядом электронно-дырочной лавины пренебрежимо мало, она эволюционирует в соответствии с аналитической теорией [42]. На этой стадии полное число N_i электронно-дырочных пар в лавине увеличивается со временем по экспонциальному закону (рис. 2)

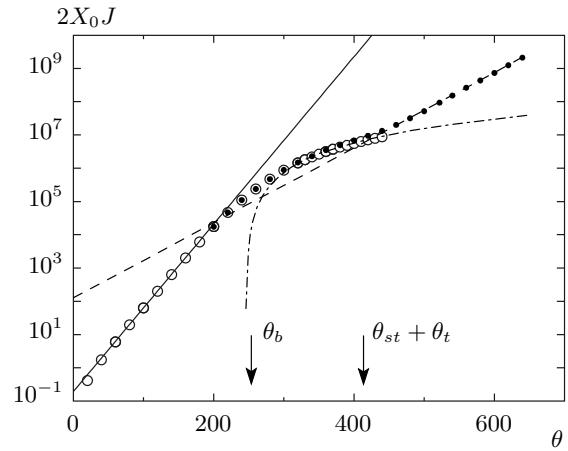


Рис. 3. Зависимость приведенного межэлектродного тока от времени при $A_0 = 0.03$ без учета (\circ) и с учетом (\bullet) туннельного эффекта. Сплошная линия — расчет по формулам (16), (18), штриховая — расчет по (38), штрихпунктирная — расчет по (26). Стрелками указаны моменты скачка экстремумов эволюции ($\theta_{st} + \theta_t$)

$$N_i = \exp(2A_0 V_0 \theta), \quad (16)$$

где $A_0 = A(F_0)$ и $V_0 = V(F_0)$. Аналогично увеличивается ток I , как это видно из рис. 3. Так и должно быть, поскольку в нашем случае безразмерный ток $J = I\tilde{\alpha}/\varepsilon\tilde{E}v_s$, протекающий между плоскими электродами, удаленными друг от друга на расстояние $2X_0$, равен [43]

$$J = \frac{2\pi}{X_0} \int_0^{Y_0} \int_0^{X_0} \left(\sigma V_X - \mathcal{D} \frac{\partial \rho}{\partial X} \right) Y dY dX. \quad (17)$$

Второе (диффузионное) слагаемое в (17) всегда дает пренебрежимо малый вклад в интеграл, поэтому до тех пор пока искажения внешнего поля малы и X -компоненты дрейфовой скорости $V_X \approx V_0 \approx 1$, должно выполняться равенство

$$2JX_0 = 2N_i q \tilde{\alpha}^2 / \varepsilon \tilde{E}. \quad (18)$$

Множитель 2 в показателе экспоненты в (16) появился из-за биполярности ударной ионизации. Другим следствием этой особенности полупроводников является то, что электронно-дырочная лавина (в отличие от электронной лавины в газах) распространяется в обе стороны от точки старта. Она представляет собой разреженное облако, плотность которого при

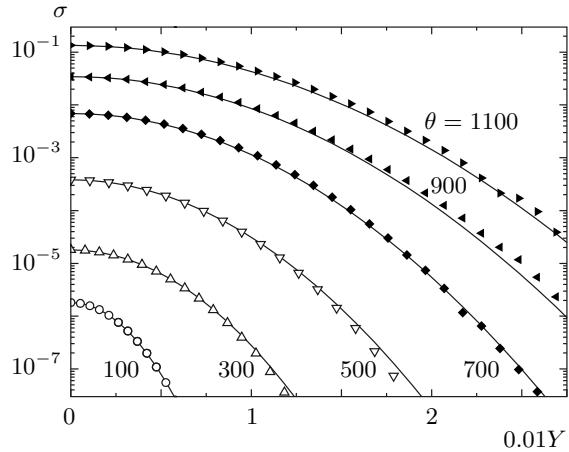


Рис. 4. Радиальные распределения концентрации электронов и дырок в плоскости симметрии лавины и стримера в различные моменты времени при $A_0 = 0.01$ и $G_{t0} = 0$. Светлые символы — результаты численного моделирования при $\theta < \theta_a = 624$, темные — при $\theta > \theta_a$, кривые — расчет по формуле (34), совпадающей с (19) при $\theta < \theta_a$, когда $\sigma(\theta, 0, 0) = \sigma_a(\theta)$ и $D_c(0) = D$

$A_0 V_0 \theta \gg 1$ и $X < \theta$ описывается формулой

$$\sigma(\theta, X, Y) = \sigma_a(\theta) \exp\left(-\frac{Y^2}{4D\theta} - \frac{X^2}{4D_{||}\theta}\right), \quad (19)$$

где

$$\sigma_a(\theta) = \frac{q\tilde{\alpha}^2}{\varepsilon\tilde{E}} \frac{N_i}{4(\pi\theta)^{3/2}D\sqrt{D_{||}}}.$$

Радиус лавины определяется только поперечной диффузией (рис. 4), тогда как в увеличение ее длины основной вклад вносят дрейф и ударная ионизация. Поэтому эффективный продольный коэффициент диффузии $D_{||} = D + V_0/2A_0$ обычно много больше D и лавина оказывается сильно вытянутой вдоль поля. При $X > \theta$ концентрация убывает с ростом X гораздо быстрее³⁾, чем по формуле (19) (рис. 5), так что эффективная длина лавины примерно равна θ .

Плотность объемного заряда лавины равна

$$\rho = \sigma X / 4D_{||}\theta A_0 \quad (20)$$

и достигает максимума на оси симметрии при $X = X_Q = \sqrt{2D_{||}\theta}$. Этот заряд искажает внешнее поле, ослабляя его в центральных областях лавины и усиливая перед фронтом (при $X > X_Q$). Наибольшее ослабление поля на величину $F_a(\theta, 0)$ происходит в начале координат (в точке старта лавины),

³⁾ Но в согласии с более общими, чем формула (19), результатами теории [42].

а наибольшее усиление на величину $F_a(\theta, X_E)$ — на оси X в точке $X = X_E \approx 2X_Q$. Обычно $F_a(\theta, 0)$ в 2–4 раза превышает $F_a(\theta, X_E)$. Поэтому нелинейные эффекты заряда лавины в первую очередь должны привести к уменьшению скорости роста полного количества пар N_i и тока J по сравнению с «невозмущенными» законами (16), (18), что подтверждается результатами численного моделирования (см. рис. 2, 3). Поперечное поле F_a^\perp , наибольшее значение которого достигается на окружности $\{X \approx X_Q, Y \approx 2\sqrt{D\theta}\}$, всегда оказывается в 5–10 раз меньше $F_a(\theta, 0)$, что и предопределяет чисто диффузионный характер расширения лавины [42].

Все сказанное остается верным вплоть до момента $\theta = \theta_a$, после которого пренебрегать искажением внешнего поля уже нельзя. Задавшись некоторой допустимой величиной отклонения $\eta \ll 1$ скорости ударной ионизации или концентрации пар в центре лавины от «невозмущенных» значений, можно получить уравнение для определения длительности линейной стадии эволюции лавины [42]. В наших обозначениях оно имеет вид

$$\frac{(2\pi A_0 V_0 \theta_a)^{3/2}}{\exp(2A_0 V_0 \theta_a)} = \frac{q\tilde{\alpha}^2 f(1 + 2D A_0 / V_0)}{\varepsilon\tilde{E}\eta F_0^2}, \quad (21)$$

где $f(x) = \operatorname{arcth}(\sqrt{x}) - 1/x$. Как видно из рис. 6, результаты численного моделирования хорошо совпадают с расчетом величины θ_a по формуле (21). Следует отметить существенное отклонение зависимости $\theta_a(F_0)$ от так называемого критерия Рётера–Мика $\theta_a V_0 A_0 = \text{const}$, приводящее к тому, что полное число пар в лавине к моменту времени $\theta = \theta_a$ может изменяться на 2–3 порядка в зависимости от величины F_0 .

При $\theta > \theta_a$ искажение внешнего поля зарядом лавины становится существенным, поэтому время $\theta = \theta_a$ следует считать началом лавинно-стримерного перехода. На этой стадии напряженность поля в центре лавины продолжает уменьшаться, но главным процессом, конечно, является усиление поля на фронте лавины. Вследствие этого вблизи $X = X_E$ быстро увеличиваются скорость ударной ионизации, концентрация электронов и дырок и их объемный заряд, что приводит в конце концов к качественному изменению распределений σ и F : на фронте возникают сначала локальные, а затем и абсолютные максимумы концентрации и минимумы напряженности поля (см. рис. 5). Все эти скачки экстремумов σ и F происходят почти одновременно при $\theta = \theta_b \approx (\theta_a + 2/A_0 V_0)$ (см. рис. 6). Положение X_E максимума поля в момент $\theta = \theta_b$ немонотонно за-

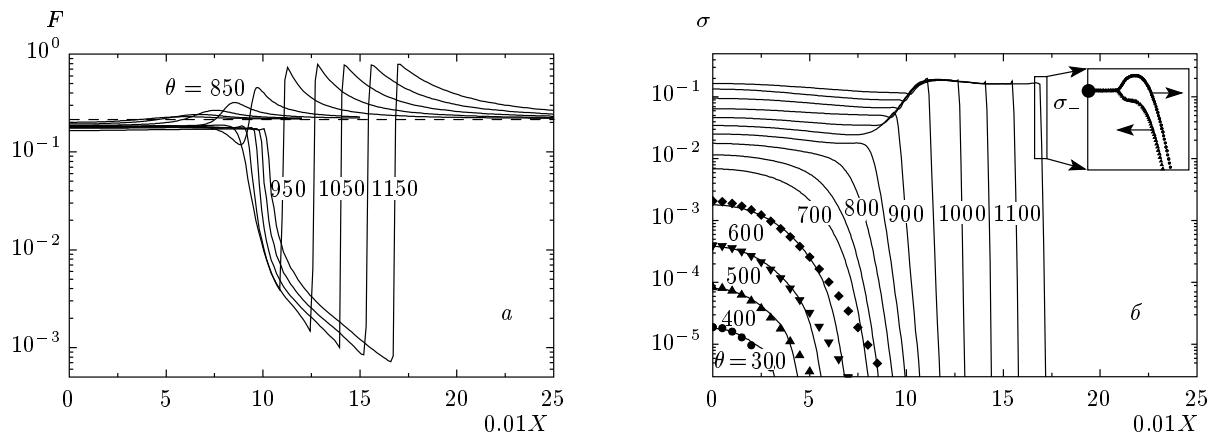


Рис. 5. Распределения напряженности поля (*а*) и концентрации носителей заряда (*б*) вдоль оси лавины и стримера при $A_0 = 0.01$ и $G_{t0} = 0$ в различные моменты времени. Линии — результаты численного моделирования, символы — расчет по формуле (19). Пунктиром отмечено невозмущенное значение напряженности внешнего поля F_0 . На врезке изображены увеличенные распределения концентрации σ_- носителей заряда за фронтом, дрейфующих в указанных стрелками направлениях

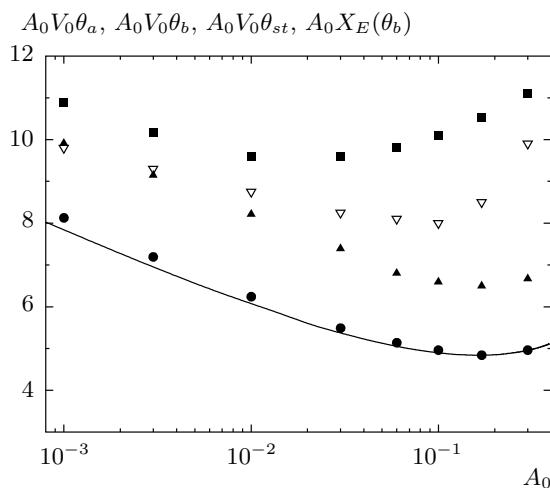


Рис. 6. Зависимости нормированных значений времени θ_a начала лавинно-стримерного перехода при $\eta = 0.2$ (●), времени θ_b скачка экстремумов σ и F (▲), времени θ_{st} окончания перехода при $F_m = 0.3F_s$ (■) и положения $X_E(\theta_b)$ максимума напряженности поля в момент времени $\theta = \theta_b$ (▽) от величины коэффициентов ударной ионизации $A_0 = A(F_0)$ во внешнем поле F_0 . Линия — расчет θ_a по формуле (21)

висит от A_0 , но для грубой оценки можно воспользоваться равенством $X_E(\theta_b) \approx 9/A_0$. Далее концентрация σ и максимальное поле F_M на фронте продолжают увеличиваться, а минимальное поле F_m — уменьшаться, как это изображено на рис. 5, 7. Этот

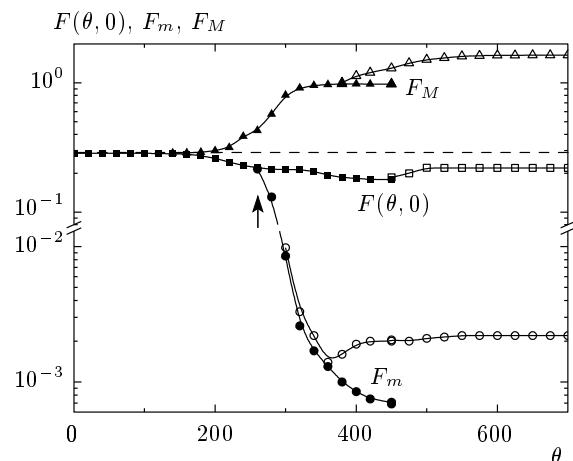


Рис. 7. Зависимости напряженности поля в начале координат, $F(\theta, 0)$, минимальной F_m и максимальной F_M напряженностей поля от времени θ при $A_0 = 0.03$ без учета (темные символы) и с учетом (светлые символы) туннельной ионизации. Пунктиром отмечено значение внешнего поля F_0 , стрелкой — момент θ_b скачка минимума F

процесс продолжается до тех пор, пока в момент⁴⁾ $\theta = \theta_{st} \approx 10/V_0 A_0$ (см. рис. 6) не сформируется стример, структура которого изображена на рис. 4, 5, 8.

⁴⁾ Завершение лавинно-стримерного перехода не сопровождается скачкообразными изменениями каких-либо параметров и происходит относительно плавно, поэтому выбор времени θ_{st} достаточно условен. По причинам, ясным из дальнейшего, мы использовали равенство $F_m = 0.3F_s$ в качестве условного критерия окончания перехода.

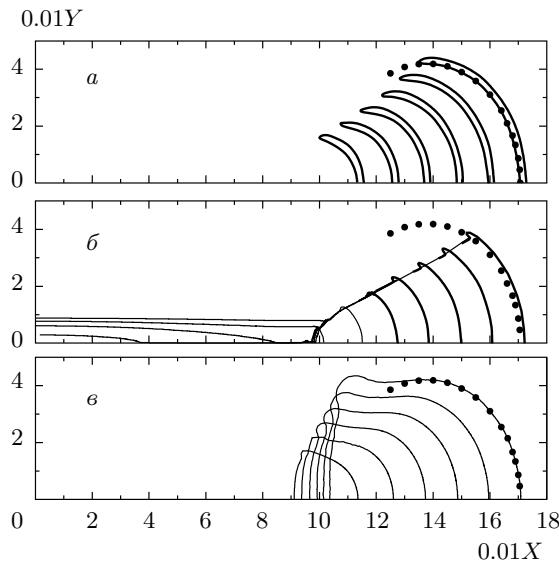


Рис. 8. Линии постоянных плотности объемного заряда $\rho = 0.2\rho_M$ (а), концентрации $\sigma = 0.5\sigma_-$ (б) и напряженности поля $F = 0.1F_M$ (в) при $A_0 = 0.01$ и $G_{t0} = 0$ до момента времени $\theta = 1160$ с шагом $\Delta\theta = 40$. Точками указан эллипс с полуосами $B_X = 328$ и $B_Y = 420$, пересекающий ось симметрии в точке $X = 1707$, где $F = 0.1F_M$ при $\theta = 1160$

3.2. Диффузационная стадия эволюции стримера

Стример состоит из четырех качественно различных областей Ω_c , Ω_- , Ω_f и Ω_+ , расположенных последовательно вдоль оси X (см. ниже рис. 16). В области Ω_+ (перед фронтом) концентрация и плотность объемного заряда электронов и дырок пренебрежимо малы. Здесь внешнее поле усиливается в соответствии с уравнением Лапласа благодаря заряду стримера q_{st} , сосредоточенному главным образом в области Ω_f (т. е. на фронте стримера). Фронт стримера представляет собой тонкую оболочку, форма которой очень близка к слабосплюснутому эллипсоиду вращения (см. рис. 8) с полуосами B_X и B_Y . Этот фронтальный эллипсоид смещается вдоль оси X с постоянной скоростью U_0 и, сохранив свою форму, расширяется со временем по линейному закону

$$B_{X,Y} = U_{X,Y}(\theta - \theta_0), \quad (22)$$

как это видно на рис. 9. Скорость фронта на оси стримера равна $U_f = U_0 + U_X$. Отношение $B_X/B_Y = U_X/U_Y = 0.74\text{--}0.86$ и в этих пределах слабо уменьшается с ростом D и с уменьшением F_0 . Интересно отметить, что линейная экстраполя-

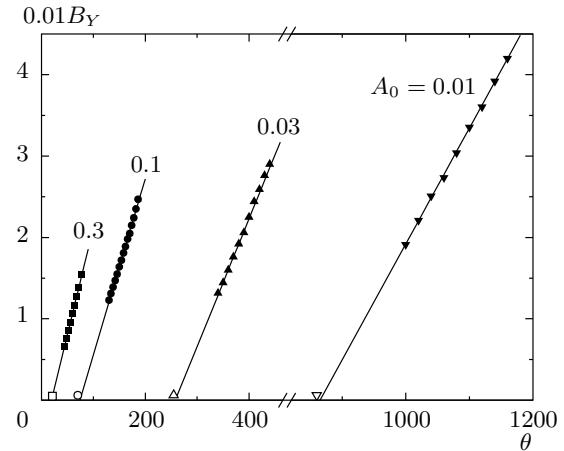


Рис. 9. Зависимости длины B_Y поперечной полуоси фронтального эллипса от времени при $G_{t0} = 0$. Цифры у кривых означают величины безразмерных коэффициентов ударной ионизации A_0 во внешнем поле F_0 . Темные символы — результаты численного моделирования, светлые — моменты θ_b скачка экстремумов σ и F , сплошные линии — аппроксимации зависимостей $B_Y(\theta)$ функциями (22)

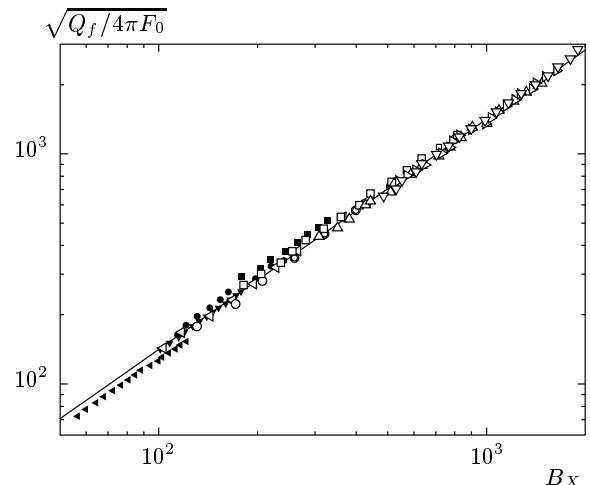


Рис. 10. Взаимосвязь между нормированным зарядом половины стримера и длиной B_X продольной полуоси фронтального эллипса при различных значениях F_0 без учета (темные символы) и с учетом (светлые символы) туннельного эффекта. Сплошная линия — расчет по формуле (24)

ции зависимостей $B_{X,Y}(\theta)$ к нулю дает время θ_0 «зарождения фронта», очень близкое к времени θ_b скачка экстремумов σ и F .

Важным параметром фронта является его заряд q_f . Как уже было сказано, он лишь незначитель-

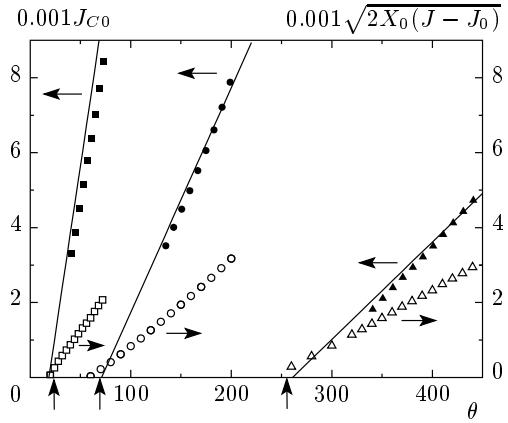


Рис. 11. Зависимости тока проводимости J_{C0} через плоскость симметрии $X = 0$ (темные символы) и приведенного межэлектродного тока J (светлые символы) от времени без учета туннельного эффекта при $A_0 = 0.3$ (квадраты), 0.1 (кружки), 0.03 (треугольники). Символы — результаты численного моделирования, линии — расчет по формуле (25). Вертикальными стрелками указаны моменты θ_b скачка экстремумов σ и F

но отличается от заряда половины всего стримера q_{st} , поэтому безразмерную величину $Q_f = |q_f| \tilde{\alpha}^2 / \varepsilon \tilde{E}$ можно вычислять по формуле

$$Q_f \approx Q_{st} = 2\pi \int_0^{Y_0} \int_0^{X_0} |\rho| Y dY dX. \quad (23)$$

Результаты таких вычислений, приведенные на рис. 10, во всех рассмотренных случаях можно аппроксимировать простой зависимостью

$$Q_f \approx 8\pi F_0 B_X^2 \quad (24)$$

с погрешностью не более 10 %. Вследствие этого ток проводимости через плоскость симметрии стримера, $X = 0$, равный $J_{C0} = dQ_{st}/d\theta$, должен возрастать со временем по закону

$$J_{C0} = 16\pi F_0 U_X^2 (\theta - \theta_0). \quad (25)$$

Как видно из рис. 11, этот вывод подтверждается результатами численного моделирования. Однако зависимость межэлектродного тока J от времени гораздо лучше аппроксимируется квадратичной функцией

$$J = I_0 + I_1 (\theta - \theta_1)^2, \quad (26)$$

где $I_{0,1}$ и θ_1 — некоторые константы, причем θ_1 оказывается немножко меньше θ_0 . Объяснение такой зависимости будет дано ниже.

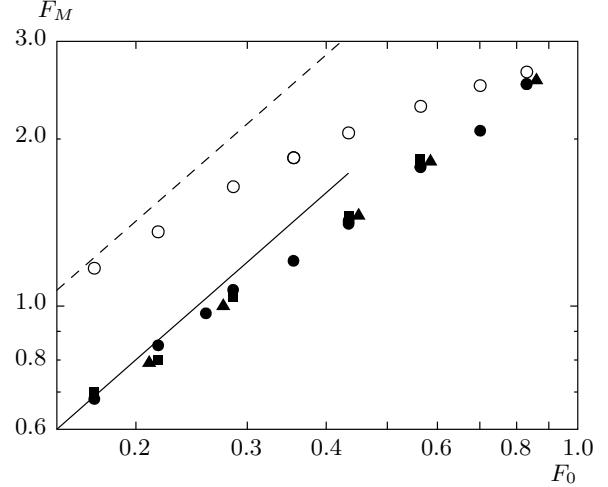


Рис. 12. Зависимости максимальной напряженности поля на оси стримера от напряженности внешнего поля без учета (темные символы) и с учетом (светлые символы) туннельного эффекта при $G_{t0} = 0$, $D = 10$ (■), 2 (●), 0.4 (▲) и $G_{t0} = 30$, $D = 0.4-10$ (○). Линии — расчет по формуле (28) при $B_X/B_Y = 0.83$ (сплошная), 1.3 (штриховая)

Знание формы и заряда фронта позволяет оценить важнейший параметр стримера F_M , определяющий многие его свойства. Действительно, максимальная напряженность поля на поверхности металлического заряженного эллипсоида вращения (который может служить хорошей моделью фронта стримера), помещенного в однородное поле, равна [44]

$$F_M = 3F_0 \left(\frac{B_X}{B_Y} \right)^{4/5} \phi \left(\frac{B_Y}{B_X} \right) + \frac{Q_f}{4\pi B_Y^2}. \quad (27)$$

С учетом выражений (22), (24) отсюда сразу следует постоянство F_M в процессе эволюции стримера, что также подтверждается результатами моделирования (см. рис. 5, 7). Вместо входящей в (27) функции

$$\phi(z) = \frac{1}{3z^{6/5}} \frac{\sqrt{(z^2 - 1)^3}}{\sqrt{z^2 - 1} - \arctg \sqrt{z^2 - 1}}$$

можно подставить единицу, так как в актуальном для нас интервале значений $0.7 < z < 1.4$ выполняются неравенства $1 < \phi(z) < 1.025$. В результате получается окончательная формула

$$F_M = F_0 \left[3(B_X/B_Y)^{4/5} + 2(B_X/B_Y)^2 \right], \quad (28)$$

которая, как видно из рис. 12, согласуется с результатами моделирования стримера в относительно слабых внешних полях, но в сильных полях дает завышенные значения F_M . Причина этого расхождения

состоит в том, что в сильных полях расстояние $2X_f$ между противоположными фронтами превосходит поперечный размер $2B_Y$ фронтов всего в 1.5–2 раза. Поэтому заряды этих фронтов заметно компенсируют друг друга. В то же время в слабых полях отношение X_f/B_Y достигает десяти и взаимной компенсации зарядов противоположных фронтов почти не происходит. Формула (28) должна давать завышенные (особенно в сильном внешнем поле) значения F_M еще и вследствие конечности отношения $\delta/B_{Y,X}$, которое увеличивается с ростом F_M .

Кроме длин $B_{X,Y}$ полуосей (определеняющих, в частности, длину заметного ослабления поля перед фронтом) фронт обладает еще двумя характерными размерами: толщиной δ слоя пространственного заряда и длиной затухания Λ^{-1} концентрации перед фронтом. Оба этих размера много меньше $B_{X,Y}$, что оправдывает применение теории стационарных плоских волн ударной ионизации для описания некоторых параметров фронта стримера (см., например, работы [12, 37]) на этой стадии эволюции. Подходящая к нашему случаю (отсутствие перед фронтом ударной волны фоновых носителей заряда и отличных от ударной ионизации механизмов ионизации) теория дана в работе [45], основные результаты которой сводятся к следующему. Фронт такой волны относится к классу «вытягиваемых» [46], его скорость определяется процессами (дрейфом, диффузией и ударной ионизацией) в лидирующей области, где нелинейными эффектами можно пренебречь и концентрация затухает по закону $\sigma \propto X \exp(-\Lambda X)$. При равенстве всех кинетических коэффициентов электронов и дырок

$$\Lambda = A_M \sqrt{\frac{1}{D_M} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{D_M}}}, \quad (29)$$

а скорость фронта

$$U_f = \frac{V_M D_M}{2 A_M} \left(3 + \sqrt{1 + \frac{4}{D_M}} \right) \Lambda, \quad (30)$$

где $V_M = V(F_M)$, $D_M = \mathcal{D} A_M / V_M$. Формулы (29), (30) применимы к стримеру, если $1/\Lambda \leq \sqrt{\mathcal{D}/A_M} \ll B_{X,Y}$ и кривизной фронта можно пренебречь. Используя результаты, приведенные на рис. 9, легко убедиться, что это сильное неравенство хорошо выполняется даже при $\mathcal{D} = 10$. Так как во всех рассмотренных случаях $F_M \gg F_s$, то $V_M - 1 \ll 1$ и скорость фронта должна зависеть только от одной величины $D_M \approx \mathcal{D} A_M$, что и подтверждается данными, приведенными на рис. 13.

Нарастание концентрации электронов и дырок и плотности их объемного заряда на фронте приводит

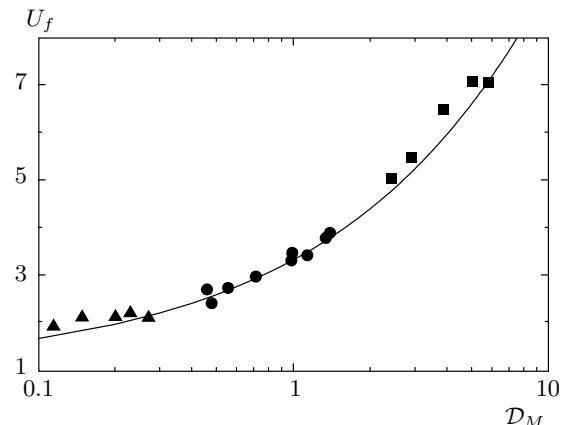


Рис. 13. Зависимость скорости фронта стримера от безразмерного коэффициента диффузии $D_M = \mathcal{D} A_M / V_M$. Символы — результаты численного моделирования стримера без учета туннелирования при различных напряженностях внешнего поля и значениях $D = 10$ (■), 2 (●), 0.4 (▲); линия — расчет по формуле (30)

к подавлению поля, которое после достижения максимального значения F_M при $X = X_f$ значительно уменьшается. В результате этого за фронтом образуется область Ω_- , где ударной ионизацией можно пренебречь, и поэтому концентрация перестает изменяться со временем (см. рис. 5): на оси стримера она равна σ_- во всей области Ω_- . Анализ результатов моделирования показывает, что после окончания лавинно-стримерного перехода величина σ_- действительно перестает зависеть от времени и, значит, от кривизны фронта. Для ее вычисления тоже можно воспользоваться моделью стационарных плоских волн ударной ионизации, которая в нашем случае приводит к формуле

$$\sigma_- = 2 \int_0^{F_M} A(F) \left(1 + \frac{\mathcal{D}}{U_f} \frac{\partial \ln F'_X}{\partial X} \right) dF,$$

где $F'_X = \partial F / \partial X$. Второе слагаемое под интегралом можно вычислить только в дрейфовом приближении, которое дает [47]

$$\frac{\partial \ln F'_X}{\partial X} = - \frac{2U_f A(F)}{(U_f/V_M)^2 - 1}.$$

Так как диффузия приводит к дополнительному (по сравнению с дрейфовым приближением) уширению фронта, эта формула на самом деле определяет верхнюю границу величины диффузационной поправки. Используя выражение (30), нетрудно убедиться, что даже при наибольших значениях F_M она не превос-

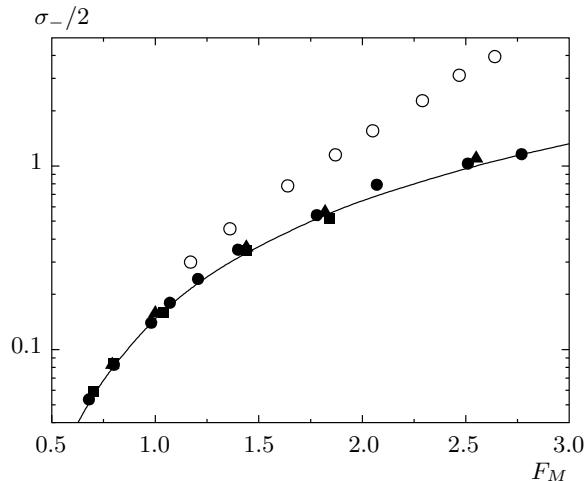


Рис. 14. Зависимость концентрации электронов на оси стримера непосредственно за фронтом от максимальной напряженности поля на фронте при различных значениях коэффициента диффузии без учета (темные символы) и с учетом (светлые символы) туннельного эффекта. Линия — расчет по формуле (31). Обозначения такие же, как на рис. 12

ходит 15 %. Поэтому при вычислении σ_- можно пренебречь диффузией и использовать простую формулу⁵⁾

$$\sigma_- = 2 \int_0^{F_M} A(F) dF. \quad (31)$$

Данные, приведенные на рис. 14, показывают, что величина σ_- однозначно определяется значением F_M в точном соответствии с формулой (31) вне зависимости от коэффициента диффузии. Существенно, что эта взаимосвязь сохраняется при изменении максимального поля на фронте не только на оси стримера за счет изменения F_0 , но и при удалении от оси вдоль фронта.

Поверхности равной концентрации в области Ω_- представляют собой конусы (см. рис. 8), основаниями которых является фронт стримера, а усеченными вершинами — граница между Ω_- и Ω_c , расположенная при $X = X_c$. Телесный угол при вершине этих конусов равен примерно 0.3π и практи-

⁵⁾ Точно такой результат был получен в дрейфовом приближении для газов [48] (см. также [13, 37]). Однако это совпадение случайно в том смысле, что формула (31) верна для полупроводников только при равенстве кинетических коэффициентов электронов и дырок. В общем случае под интегралом в (31) стоит сложная рациональная функция переменных $\alpha_{e,h}$, $v_{e,h}$ и U_f [45, 47].

чески не изменяется с течением времени, поэтому электрическое сопротивление области Ω_- возрастает по мере удаления от фронта. Вследствие этого напряженность поля тоже должна начать увеличиваться после достижения некоторого минимального значения F_m , что и происходит на самом деле (см. рис. 5). Плотность тока проводимости за фронтом, $\sigma_- V(F_m)$, больше плотности тока смещения перед фронтом, $2U_f F_M / R_f$, примерно в $a_f \equiv (1 + \delta/R_f)^2$ раз, где δ — толщина, а $R_f = B_Y^2/B_X$ — радиус кривизны фронта. Учитывая это, для F_m легко получить приближенное уравнение

$$2a_f U_f F_M / R_f \sigma_- \approx V(F_m) \approx F_m / F_s. \quad (32)$$

Последнее равенство является следствием того, что на этой стадии эволюции левая часть уравнения (32) всегда много меньше единицы, и поэтому в полупроводниках⁶⁾ должно быть $F_m \ll F_s$ [12]. Анализ результатов моделирования показывает, что соотношение (32) выполняется с хорошей точностью при $a_f = 1.40 \pm 0.15$. Это лишний раз указывает на малость толщины фронта δ по сравнению с его радиусом кривизны R_f . Так как в левой части уравнения (32) только R_f зависит от θ , напряженность поля за фронтом должна уменьшаться со временем по гиперболическому закону,

$$F_m \propto 1/R_f \propto (\theta - \theta_0)^{-1}, \quad (33)$$

который хорошо согласуется с результатами численного моделирования (см. рис. 7).

По мере удаления от фронта напряженность поля увеличивается до тех пор, пока в области Ω_c не начнется необходимый для поддержания роста тока проводимости повторный рост σ из-за ударной ионизации. Вследствие резкой зависимости $A(F)$, достаточный рост σ в области Ω_c обеспечивается при значениях $F = F_c = 0.15\text{--}0.25$, которые очень слабо уменьшаются со временем по мере приближения к плоскости $X = 0$, а также при уменьшении F_0 . В области Ω_c напряженность поля увеличивается по мере удаления от оси стримера и приближается к F_0 на расстоянии порядка B_Y . Радиальное распределение концентрации в области Ω_c можно описать функцией

$$\sigma(\theta, X, Y) = \sigma(\theta, X, 0) \exp[-Y^2/4D_c(X)\theta], \quad (34)$$

⁶⁾ При моделировании стримеров в газах обычно полагают подвижность μ_e электронов постоянной, так что $V(F) = F$. В этом случае множитель F_s^{-1} в правой части уравнения (32) отсутствует [12] и отношение F_m/F_s хотя также мало (обычно порядка 0.1–0.2), но примерно в 100 раз больше, чем в полупроводниках.

где $\sigma(\theta, X, 0)$ уменьшается с ростом X и увеличивается со временем примерно пропорционально J_{C0} . Эффективный поперечный коэффициент диффузии $D_c(0) = D$ в плоскости симметрии (см. рис. 4) и слабо увеличивается с ростом X . Большая часть электронов и дырок сосредоточена в цилиндре, радиус которого порядка $2\sqrt{D\theta} \ll B_Y$ и внутри которого поле почти однородно. Граница $X = X_-$ между областями Ω_- и Ω_c также движется в направлении фронта, но ее скорость значительно меньше U_f и уменьшается со временем. Можно показать, что так и должно быть для поддержания роста тока проводимости согласно закону (25), коль скоро коническая форма области Ω_- и концентрация носителей заряда в ней не изменяются со временем.

Принимая во внимание описанную выше структуру стримера, можно дать качественное объяснение формулы (26). Действительно, межэлектродный ток определяется интегралом (17), в котором диффузионное слагаемое всегда пренебрежимо мало. В этот интеграл дают свой вклад все три области, Ω_f , Ω_- и Ω_c . Концентрация σ и толщина фронта δ не зависят от времени, поэтому вклад области Ω_f в интеграл пропорционален площади фронта и, следовательно (см. (22)), пропорционален $(\theta - \theta_0)^2$. В области Ω_- концентрация также постоянна, а ее объем пропорционален $(\theta - \theta_0)^3$. Однако напряженность поля за фронтом (а, значит, и V_X) уменьшается со временем по закону (33), поэтому вклад в интеграл (17) области Ω_- также должен быть пропорционален $(\theta - \theta_0)^2$. Таким образом, зависимость $J(t)$ должна иметь вид (26) до тех пор, пока вклад области Ω_c , пропорциональный $\theta - \theta_0$, относительно мал.

Описанный в настоящем разделе процесс эволюции стримера определяется не только дрейфом и ударной ионизацией, но и в значительной степени диффузией. Именно это побудило нас использовать термин «диффузионная» стадия эволюции. Эта стадия, конечно, важна, но весьма коротка и по ряду причин заканчивается лишь ненамного позже θ_{st} . Первая из этих причин проявляется в относительно слабом внешнем поле⁷⁾ (при $A_0 < A_1 \equiv A(F_1) \approx 0.03$) и состоит в том, что по мере уменьшения кривизны фронта начинает развиваться неустойчивость, подобная той, что неоднократно наблюдалась ранее при моделирова-

⁷⁾ Указанные здесь и далее граничные значения A_1 не являются универсальными, так как они зависят от величин G_{t0} и F_t , определяющих соотношение между скоростями ударной и тунNELной ионизации. Например, при увеличении G_{t0} в три раза получается значение $A_1 \approx 0.01$.

нии стримеров в газах [38–40]. Первоначально гладкий фронт искривляется и в конце концов единичный стример распадается, так что дальнейшее моделирование в рамках аксиально-симметричной модели теряет смысл. В очень слабых внешних полях (при $A_0 < 10^{-3}$) неустойчивость развивается даже раньше установления диффузионной стадии; именно это обстоятельство определило минимальное значение $F_0 = 0.145$, для которого мы проводили моделирование. Однако в сильном внешнем поле (при $A_0 \geq A_1$) до начала неустойчивости начинает проявляться другая причина качественного изменения характера эволюции стримера.

3.3. Экспоненциально-автомодельная стадия эволюции стримера

В предыдущем разделе были изложены результаты моделирования без учета туннельного эффекта, что позволило нам описать и обсудить диффузионную стадию в чистом виде. Влияние туннельной ионизации на эволюцию стримера состоит в том, что, порождая дополнительные затравочные электроны и дырки перед фронтом, она увеличивает скорость его распространения⁸⁾. Скорость туннельной ионизации зависит от напряженности поля намного резче, чем ударной: показатель экспоненты у зависимости $G_t(F)$ в $F_t = 15$ раз больше, чем у $A(F)$. Поэтому приращение скорости фронта по сравнению с «диффузионной» скоростью, определяемой формулой (30), быстро убывает по мере удаления от оси стримера. Вследствие этого форма фронта начинает изменяться так, что сплюснутый фронтальный эллипсоид постепенно становится вытянутым. Такое изменение характера эволюции начинается не сразу после возникновения стримера и достижения максимальным полем своего квазистационарного значения, характерного для диффузионной стадии. Необходим еще «инкубационный период» длительностью $\theta_t(F_0)$, в течение которого относительно слабая туннельная ионизация породит перед фронтом достаточно для изменения характера эволюции количество электронов и дырок. С ростом внешнего поля

⁸⁾ Подобный механизм совместного действия туннельной и ударной ионизации ранее изучался в работе [32] путем численного моделирования плоских волн ионизации в очень сильно перенапряженных кремниевых $p-n$ -переходах. Однако, по нашему мнению [29], в этих условиях вместо плоской волны должно возникнуть много удаленных друг от друга стримеров, эволюция которых и определяет динамику пробоя. Отчасти справедливая критика [49] мультистримерной модели пробоя [29] явилась одним из побудительных мотивов выполнения настоящей работы.

время θ_t уменьшается, так что при $A_0 \geq A_1$ (или при $F_0 \geq F_1 \approx 0.28$) неустойчивость диффузионной стадии эволюции не успевает развиться, а при $A_0 \geq 0.1$ инкубационный период по сути дела отсутствует, поскольку туннельная ионизация начинает «работать» практически сразу после возникновения стримера.

Полный заряд фронта по-прежнему (и, как видно из рис. 10, даже точнее, чем во время диффузионной стадии) удовлетворяет соотношению (24). Поэтому увеличение отношения B_X/B_Y приводит к росту максимального поля F_M (см. рис. 7), как и должно быть в соответствии с формулой (28). Однако теперь эта формула дает еще более завышенное значение F_M (см. рис. 12), так как отношение δ/R_f хотя и остается малым ($\lesssim 0.3$), но существенно увеличивается по сравнению со значением в диффузионной стадии. Одновременно увеличивается концентрация σ_- , а также поле F_m за фронтом и в области Ω_c (см. рис. 7). Спустя некоторое время процесс перестройки стримера завершается, величины B_X/B_Y , δ/R_f , F_M , F_m , F_c и σ_- достигают новых, больших по сравнению с диффузионной стадией значений (см. рис. 7, 12, 14), которые в дальнейшем не изменяются. В установившемся режиме отношение B_X/B_Y находится в пределах 1.17–1.5 в зависимости от значения F_0 и максимально при $A_0 = 0.06$. Еще одна особенность состоит в изменении распределения поля вблизи правой границы $X = X_-$ области Ω_c : теперь напряженность поля приближается к значению F_c не монотонно, а совершая апериодические колебания, затухающие при уменьшении X (см. вставку на рис. 16a). В остальном структура стримера очень похожа на описанную в предыдущем разделе.

Фундаментальное различие состоит в характере эволюции этой структуры. Во время диффузионной стадии элементы автомодельности (трансляционной) были присущи только фронту, который перемещался и расширялся подобно самому себе с постоянной скоростью в соответствии с формулой (22). Остальные области эволюционировали по иным, более сложным законам. Туннельная генерация пар перед фронтом приводит к тому, что при больших θ на этой стадии все пространственные масштабы стримера увеличиваются со временем по экспоненте $\exp(\theta/\theta_R)$ с одной и той же постоянной времени θ_R . Концентрация σ и напряженность поля \mathbf{F} зависят только от переменных $\hat{X} = X \exp(-\theta/\theta_R)$ и $\hat{Y} = Y \exp(-\theta/\theta_R)$, а распределения плотности объемного заряда и потенциала можно представить в виде

$$\rho(t, X, Y) = \hat{\rho}(\hat{X}, \hat{Y}) \exp(-\theta/\theta_R), \quad (35)$$

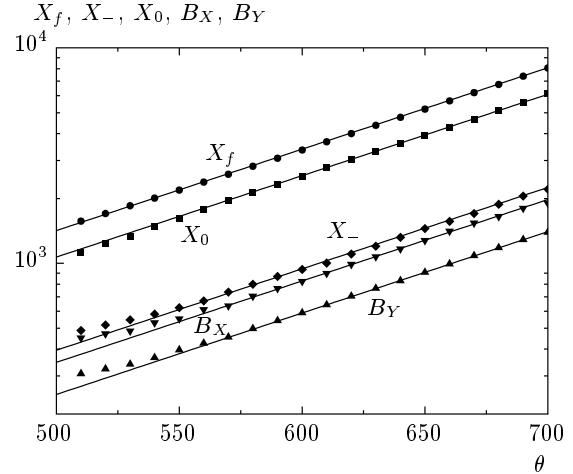


Рис. 15. Зависимости положения фронта X_f , границы X_- и параметров фронтального эллипсоида (положения центра X_0 и длин полуосей $B_{x,y}$) от времени при $A_0 = 0.03$. Линии — аппроксимации этих зависимостей функциями, пропорциональными $\exp(\theta/\theta_R)$ с постоянной времени $\theta_R = 115$

$$\Phi(t, X, Y) = \hat{\Phi}(\hat{X}, \hat{Y}) \exp(\theta/\theta_R). \quad (36)$$

Эти закономерности проиллюстрированы данными, приведенными на рис. 15, 16. Они указывают на то, что при больших θ решение исходной задачи Коши (7)–(15) стремится к экспоненциально-автомодельному⁹⁾ виду [50], так что все исходные величины ($\sigma, F, \hat{\rho}$ и $\hat{\Phi}$) начинают зависеть только от одной автомодельной векторной переменной $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \exp(-\theta/\theta_R)$. Исключением является часть области Ω_c вблизи плоскости $X = 0$, где эффективный радиус Ω_c увеличивается со временем гораздо медленнее всех остальных размеров, а концентрация явно зависит от времени при постоянных малых значениях \hat{X}, \hat{Y} . Относительные размеры этой «неавтомодельной» части области Ω_c экспоненциально уменьшаются с ростом θ , а абсолютные размеры примерно совпадают с размерами стримера на диффузионной стадии эволюции, который по сути дела является зародышем экспоненциально-автомодельного стримера. Существование зародыша конечных размеров неизбежно приводит к тому, что решение исходной задачи Коши всегда отличается от автомодельного, но это различие экспоненциально уменьшается со временем. Таким образом, полученные нами численные решения имеют асим-

⁹⁾ Иногда такой тип решений называют предельно-автомодельным [51].

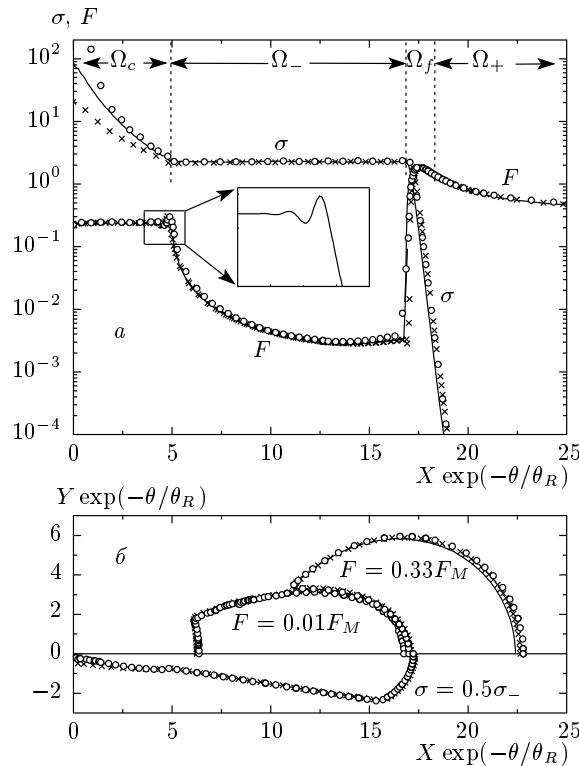


Рис. 16. а) Распределения безразмерных напряженности поля и концентрации носителей заряда вдоль оси стримера с учетом туннельной генерации пар ($G_{t0} = 30$) при $A_0 = 0.06$ в моменты времени $\theta = 380$ (крестики), 440 (сплошная линия), 500 (кружки); $\theta_R = 68.5$. Вертикальными штриховыми линиями отмечены границы между областями Ω_c , Ω_f , Ω_- и Ω_+ . На вставке изображено увеличенное изображение распределения поля вблизи границы X_- . б) Линии равной напряженности поля и концентрации носителей заряда в различные моменты времени θ ; обозначения те же, что и на верхнем графике

птически-автомодельный характер [51] и приближенно описывают стример только при больших θ , когда его размеры увеличиваются во много раз по сравнению с диффузионной стадией эволюции.

Результаты моделирования на этой стадии не зависят в пределах ошибки вычислений от коэффициента диффузии в интервале значений $D = 0.4\text{--}10$. Причина этого очевидна: при экспоненциальном росте пространственных масштабов и постоянстве $\sigma(\hat{\mathbf{R}})$ градиенты концентрации экспоненциально уменьшаются со временем и при больших θ диффузионные (а также термоэлектрические) токи становятся пренебрежимо малыми. По той же при-

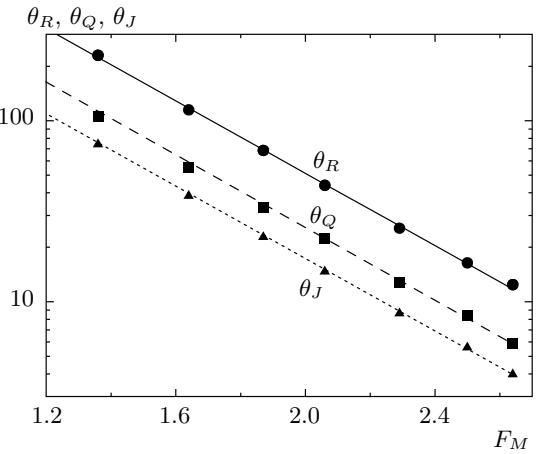


Рис. 17. Зависимости постоянных времени экспоненциального роста пространственных масштабов стримера (θ_R), заряда фронта стримера (θ_Q) и межэлектродного тока (θ_J) от максимальной напряженности поля на фронте. Символы — результаты численного моделирования; сплошная линия — аппроксимации этих зависимостей функцией $\Theta_R = 5100 \exp(-2.3F_M)$, штриховая — $\Theta_R/2$, пунктирная — $\Theta_R/3$

чине с ростом θ уменьшается погрешность использованного нами локально-полевого приближения.

Полный заряд фронта вместе с током проводимости растет по экспоненте,

$$Q_f \propto J_{C0} \propto \exp(\theta/\theta_Q), \quad (37)$$

с постоянной времени $\theta_Q = \theta_R/2$ в соответствии с формулой (24). Межэлектродный ток J тоже увеличивается экспоненциально (см. рис. 3)

$$J \propto \exp(\theta/\theta_J), \quad (38)$$

но с еще меньшей постоянной времени $\theta_J = \theta_R/3$. В том, что так и должно быть, легко убедиться, заменяя в формулах (17) и (23) переменные $\mathbf{R} = \{X, Y, \vartheta\}$ на $\hat{\mathbf{R}} = \{\hat{X}, \hat{Y}, \vartheta\}$ и учитывая, что все величины под интегралом в выражении (17) зависят только от $\hat{\mathbf{R}}$, а ρ под интегралом в (23) описывается формулой (35). Эти выводы проиллюстрированы данными, приведенными на рис. 17. Из него также следует, что все три постоянных времени экспоненциально уменьшаются с ростом F_M .

Увеличение σ_- по сравнению с диффузионной стадией, конечно, связано с ростом F_M , однако оно оказывается заметно больше того, которое предсказывается формулой (31); в самых сильных полях

расхождение величины (31) с результатами моделирования превышает 100 %. Постоянство напряженности F_m поля за фронтом объясняется тем, что при $X_f \propto \exp(\theta/\theta_R)$ скорость фронта $U_f = X_f/\theta_R$, поэтому из (32) следует

$$V(F_m) = 2a_f \frac{F_M X_f}{\sigma_- \theta_R R_f}.$$

Правая часть этой формулы не зависит от θ , но оказывается малой только в очень слабом внешнем поле (при $A_0 \lesssim 0.03$). С ростом F_0 напряженность F_m поля за фронтом увеличивается и даже превышает F_s (при $A_0 \gtrsim 0.3$).

Завершая описание этой стадии эволюции стримеров, необходимо отметить еще два важных обстоятельства. Во-первых, процесс моделирования оказывается устойчивым даже при использовании нами сравнительно грубой сетки. Во-вторых, неустойчивость фронта на диффузационной стадии при $A_0 < A_1$ не означает, что эволюция нового типа вообще невозможна в слабом внешнем поле. Оказывается, что уменьшение напряженности сильного внешнего поля F_0 до нового постоянного значения $F_{01} < F_1$ после формирования экспоненциально ускоряющегося и расширяющегося стримера приводит не к потере устойчивости фронта, а лишь к изменению его формы (т. е. отношения B_X/B_Y) и основных параметров (F_M, σ_- и т. д.). В качественном отношении характер эволюции остается прежним. Результаты расчетов, приведенные на рис. 10, 12, 14, 17 для значений A_0 в интервале $0.03 > A_0 \geq 0.003$ были получены именно таким способом.

3.4. Ограничения применимости модели стримера

При выполнении описанных выше расчетов мы не учитывали ряд явлений, которые могут оказывать существенное влияние на эволюцию стримера. Это было сделано не только для того, чтобы предельно упростить модель и на ее основе выявить лишь самые главные характеристики стримера. Другая причина состоит в том, что в настоящее время отсутствуют сколько-нибудь обоснованные физические предпосылки для корректного учета этих явлений в экстремальных условиях, возникающих при стримерном разряде в полупроводниках. Однако сейчас мы все же кратко обсудим эту проблему, чтобы получить хотя бы ориентировочное пред-

ставление об условиях применимости полученных результатов.

1. Правомерность использованного нами локально-полевого диффузационно-дрейфового приближения далеко не очевидна, поскольку на фронте стримера скорости изменения напряженности поля во времени, $\partial E/\partial t$, и в пространстве, $|\nabla E|$, могут достигать очень больших величин (соответственно порядка 10^{18} В/см·с и 10^{11} В/см²). Однако расстояние δ , на котором существенно изменяется поле, и соответствующее время δ/u_f все же в десятки раз превышают длину $l_p \lesssim 10^{-6}$ см и время $t_p \lesssim 10^{-14}$ с свободного пробега горячих носителей заряда; поэтому погрешность простейшей модели не должна быть очень большой. Исследованию этого вопроса применительно к стримерам в газах было посвящено несколько работ. Наиболее ясные и точные результаты получены авторами работы [52], которые сравнили результаты моделирования плоской анодно-направленной волны ионизации в азоте методом Монте-Карло с полученными в локально-полевом диффузационно-дрейфовом приближении. Существенно, что в последнем случае использовались зависимости кинетических коэффициентов от E , полученные тем же методом Монте-Карло для постоянного и однородного поля. Было показано, что в полях $E_0 \leq 50$ кВ/см (соответствующих примерно трехкратному перенапряжению для азота при нормальном давлении) погрешность диффузационно-дрейфового приближения пренебрежимо мала, но увеличивается с ростом поля и при $E_0 = 200$ кВ/см достигает 60 % для концентрации n_- электронов за фронтом и 10 % для скорости u_f фронта. Авторы работы [52] указали также, что причиной этого является увеличение градиента концентрации перед фронтом с ростом напряженности поля, в результате которого длина (в наших безразмерных обозначениях она равна Λ^{-1}) затухания σ становится сравнимой с безразмерной длиной свободного пробега $\tilde{\alpha}l_p$. В нашем случае величина Λ^{-1} также является минимальным характерным размером задачи. Поэтому из выражения (29) следует, что необходимое условие $\tilde{\alpha}l_p\Lambda \ll 1$ применимости диффузационно-дрейфового приближения имеет вид

$$\tilde{\alpha}l_p \ll \sqrt{\mathcal{D}/\xi A_M}, \quad (39)$$

где $1 < \xi < 2$. В полупроводниках обычно $\tilde{\alpha}l_p \lesssim 1$, поэтому в сильном поле (т. е. при $A_M \sim 1$) неравенство (39) может оказаться недостаточно сильным, и тогда погрешность диффузационно-дрейфовой модели станет значительной. Однако именно при этих усло-

виях диффузионная стадия эволюции стримера фактически отсутствует (см. разд. 3.3) и через время порядка θ_R после лавинно-стримерного перехода длина Λ^{-1} опять станет достаточно большой для применимости диффузионно-дрейфовой модели. Правда, в полях $E \sim \tilde{E}$ никто никогда не вычислял и не измерял зависимости $v(E)$ и $\alpha(E)$ в полупроводниках, так что на самом деле простейшие аппроксимации (4) и (5) могут давать заметную ошибку. По этой причине использованная нами модель обеспечивает не столько строгое физическое, сколько феноменологическое описание стримера.

2. Электронно-дырочное рассеяние существенно снижает подвижность при $\sigma \gtrsim 0.1$ ($n, p \gtrsim 10^{18} \text{ см}^{-3}$) [53]. Простейший способ учета этого эффекта в слабом поле и при больших $n = p$ состоит в замене обычных подвижностей μ на некую эффективную величину $\mu_{eff} = (\mu^{-1} + 2\mu_{eh}^{-1})^{-1}$, где $\mu_{eh} = \mu_0 n^{-1} M(n)(T/T_0)^{3/2}$, μ_0 — низкополевая подвижность при температуре $T = T_0$, $M(n) = n_0 [1 + n_0(n + n_1)^{-1}]^{-1}$ — функция, которая феноменологически описывает зависимость сечения электронно-дырочного рассеяния от n и обеспечивает хорошее совпадение с экспериментом [54] при надлежащем выборе параметров $n_{0,1}$. Такая модификация модели должна привести к тому, что величина F_m увеличится в 10–100 раз и значительно превысит F_s . Однако в столь сильном поле «температура» электронов T_e становится много больше T , в результате чего сечение электронно-дырочного рассеяния существенно уменьшается. Для грубой оценки этого эффекта можно в формуле для μ_{eh} заменить T на $T_e = T\sqrt{1 + (F/F_{eh})^2}$; эта функция дает правильные асимптотики в слабом и сильном полях и хорошо описывает зависимости $T_e(F)$, полученные для кремния методом Монте-Карло [55, 56]. Тогда вместо параметра F_s надо использовать функцию

$$F'_s = F_s \left[1 + 2 \frac{\sigma}{\sigma_0} \left(1 + \frac{\sigma_0}{\sigma + \sigma_1} \right) \left(\frac{F_{eh}^2}{F^2 + F_{eh}^2} \right)^{3/4} \right] \quad (40)$$

с параметрами $F_{eh} \approx 0.008$, $\sigma_0 \approx 0.07$ и $\sigma_1 \approx 0.014$, которые обеспечивают хорошее согласие с данными работы [54] в слабых полях при больших концентрациях и работ [55, 56] в сильных полях при малых концентрациях. Предварительные расчеты с использованием выражения (40) показывают, что и в этом случае минимальное поле за фронтом может превысить F_s , особенно в сильном внешнем поле, когда $\sigma_- \gtrsim 1$. Однако до тех пор пока $F_m \ll F_0$, все остальные параметры стримера (в частности, $\theta_R, F_M, \sigma_-, F_c$) изменяются незначительно.

3. Возникновение вихревого электрического поля E_H является одной из фундаментальных причин, ограничивающих величину u_f ; вблизи фронта $E_H \sim E_M (u_f/c_0)^2$ (c_0 — скорость света в полупроводнике) [12]. Как на самом деле этот эффект должен проявляться, пока непонятно. Однако полагая, что им можно пренебречь при $E_H < E_0$, получим неравенство

$$X_f < X_H = \theta_R \frac{c_0}{v_s} \sqrt{\frac{F_0}{F_M}}, \quad (41)$$

ограничивающее длину экспоненциально-автомодельного стримера.

4. Оже-рекомбинация, скорость которой $s_r = np(c_e n + c_h p)$, может оказаться важной при больших σ ($c_{e,h}$ — коэффициенты оже-рекомбинации). В области Ω_- соответствующее безразмерное время жизни во всех случаях оказывается много больше θ_R , поэтому этот процесс может проявиться только вблизи начала координат, где при больших θ концентрация максимальна. В начале координат ударная ионизация превосходит оже-рекомбинацию при

$$\sigma(\theta, 0, 0) < \sigma_A = 2\sqrt{2A(F_c)/C}, \quad (42)$$

где безразмерный коэффициент оже-рекомбинации $C = \hat{\alpha} v_s^{-1} (\epsilon \tilde{E}/q)^2 (c_e + c_h)$. Учитывая выражения (23), (34), (37) и соотношения $X_f = X_{f0} \exp(\theta/\theta_R)$, $X_f/B_X \approx 4$, можно показать, что на стадии экспоненциально-автомодельной эволюции неравенство (42) выполняется при $X_f < X_A$, где X_A — корень уравнения

$$\sigma_A \ln \frac{X_A}{X_{f0}} = \frac{F_0 X_A^2}{4D\theta_R^2}. \quad (43)$$

Необходимо иметь в виду, что в зависимости от деталей зонной структуры полупроводника коэффициенты оже-рекомбинации могут существенно и по-разному зависеть от T и T_e [57]. Однако в кремнии эти зависимости слабы, поэтому их можно игнорировать и использовать для численных оценок экспериментальное значение $C \approx 10^{-5}$.

5. Еще одной причиной ограничения применимости простейшей модели является джоулев разогрев. В нашем случае он максимальен в начале координат, где происходит адиабатически, и поэтому его легко оценить. Задаваясь некоторым допустимым перегревом ΔT и учитывая соотношение (37), получим еще одно ограничение на концентрацию в начале координат:

$$\sigma(\theta, 0, 0) < \sigma_T = \frac{2}{F_c \theta_R} \frac{\Delta T}{T_c}, \quad (44)$$

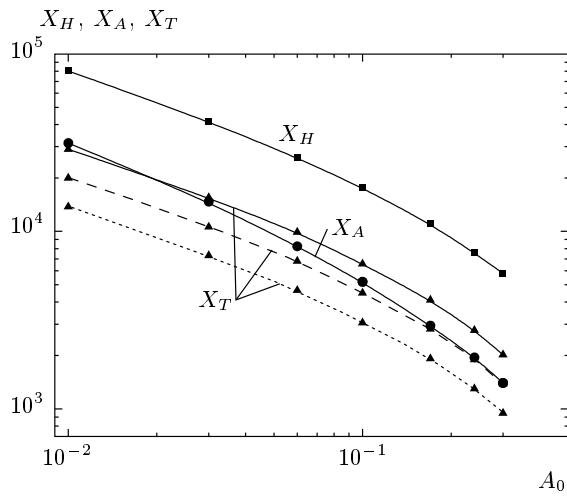


Рис. 18. Зависимости от величины A_0 длин половинок стримера, при достижении которых становятся существенными вихревое электрическое поле (кривая X_H) и оже-рекомбинация (кривая X_A), а максимальный перегрев ΔT достигает 350, 700 и 1400 °C (кривые X_T снизу вверх)

где $T_c = \varepsilon \tilde{E}^2 / \kappa \varrho \approx 1.2$ °C, κ — удельная теплоемкость, а ϱ — плотность полупроводника. Уравнение для длины стримера $2X_T$, при достижении которой максимальный перегрев станет равным ΔT , отличается от (43) заменой σ_A и X_A на σ_T и X_T . Проблема выбора величины ΔT , определяемой преобладающим механизмом разрушения материала, весьма сложна и выходит за рамки настоящей работы. Однако, скорее всего, критическая температура больше порога пластичности, но меньше температуры плавления. Для кремния это приводит к возможному диапазону $350^\circ\text{C} < \Delta T < 1400^\circ\text{C}$.

Результаты расчетов по формулам (41)–(44) с использованием данных численного моделирования приведены на рис. 18. Как видно, скорее всего разогрев является решающим фактором, ограничивающим как применимость использованной нами модели, так и максимальное расстояние (оно изменяется от 20–40 мкм в самых сильных полях до 300–500 мкм в самых слабых), которое могут пройти фронты стримера до разрушения полупроводника.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты настоящей работы состоят в следующем.

1. Эволюция электронно-дырочной лавины описывается формулами (16)–(20) в точном соответ-

ствии с аналитической теорией [42] до тех пор, пока ее объемный заряд не начинает заметно иска- жать внешнее электрическое поле. При заданной величине допустимого отклонения $\eta \ll 1$ скорости ударной ионизации или концентрации электронов от «невозмущенных» значений эта стадия линейной эволюции завершается в момент времени θ_a , определяемый уравнением (21).

2. После завершения линейной стадии эволюции начинается лавинно-стримерный переход, во время которого почти одновременно происходят скачкообразные перемещения максимума концентрации и минимума напряженности поля из центра лавины к ее фронтам. Если принять за критерий завершения такого перехода уменьшение минимальной напряженности поля за фронтом до величины $0.3E_s$, то окажется, что стример сформируется к моменту времени $\theta = \theta_{st} \approx 10/V_0 A_0$ (см. рис. 6).

3. Стример напоминает гантель¹⁰⁾ с коническими грузами (см. рис. 8, 16). Основаниями этих конусов являются фронты стримера (области Ω_f), представляющие собой тонкие оболочки, форма которых очень близка к половинкам эллипсоидов вращения с полуосами $B_{X,Y}$. В областях Ω_f рождается большинство электронно-дырочных пар и сосредоточен почти весь заряд стримера Q_f , который связан с напряженностью F_0 внешнего поля и длиной B_X про- дольной полуоси соотношением (24). Величины F_0 , Q_f и форма фронта (т. е. отношение B_X/B_Y) определяют распределение поля перед фронтом и максимальное поле F_M на оси стримера; оно не зависит от времени, но с ростом F_0 увеличивается в 2–4 раза в зависимости от стадии эволюции, хотя по порядку величины (см. работы [15]) равно единице при всех F_0 в соответствии с основополагающей гипотезой работы [12]. За фронтами расположены хорошо проводящие квазинейтральные области Ω_- (грузы гантелей), в которых $F \ll F_0$, а концентрация σ носителей заряда постоянна на оси симметрии и быстро уменьшается по мере удаления от оси. Электрическое сопротивление конических областей Ω_- увеличивается при удалении от фронта обратно пропорционально площади их поперечного сечения. Поэтому поле также растет до тех пор, пока не образуется область Ω_c (ручка гантелей), в которой начинается повторное увеличение концентрации σ из-за ударной ионизации, необходимое для поддержания возрастающего со временем тока проводимости. В области Ω_c поле

¹⁰⁾ На сходство стримера в однородном поле с гантелью впервые обратили внимание авторы работы [58], которые, однако, не сочли возможным называть подобный объект стримером.

практически однородно, его напряженность F_c лишь немногим меньше F_0 . Увеличение эффективного диаметра области Ω_c со временем происходит главным образом за счет поперечной диффузии электронов и дырок. Подчеркнем, что в рамках нашей модели существование области Ω_c обусловлено исключительно геометрией стримера; необходимость компенсировать рекомбинацию или прилипание [14, 59] приведет лишь к некоторому дополнительному увеличению F_c .

4. Если внешнее поле не слишком велико ($A_0 < 0.1$), то в момент $\theta = \theta_{st}$ начинается диффузионная стадия эволюции, во время которой характеристики стримера определяются не только дрейфом и ударной ионизацией, но и диффузией. На этой стадии фронт представляет собой слабо-сплюснутый эллипсоид вращения ($B_X/B_Y \approx 0.8$). Он перемещается и расширяется подобно самому себе с постоянными скоростями в соответствии с соотношением (22). Зависимости скорости U_f фронта и концентрации σ_- носителей заряда за фронтом вблизи оси симметрии $Y = 0$ от F_M хорошо согласуются с результатами аналитической теории стационарных плоских волн [45]. Ток проводимости J_{C0} через плоскость симметрии $X = 0$ растет со временем линейно, а заряд Q_f фронта и межэлектродный ток J — квадратично. Длительность диффузионной стадии эволюции невелика. В слабом внешнем поле (при $A_0 \lesssim 0.02$) она завершается из-за развития неустойчивости фронта стримера, но при $A_0 \gtrsim 0.02$ до развития неустойчивости начинает проявляться тунNELьная ионизация.

Аналогичный характер эволюции неоднократно получался при моделировании стримерного пробоя газов в однородном поле [18, 19, 39, 40]. Однако из всех упомянутых выше закономерностей, характеризующих диффузионную стадию, отмечалось лишь хорошее совпадение зависимостей $u_f(F_M)$ и $\sigma_-(F_M)$ с теорией стационарных плоских волн в газах [37].

5. Влияние тунNELьной ионизации на эволюцию стримера состоит в следующем. Во-первых, происходит количественное изменение основных параметров. Фронтальный эллипсоид становится вытянутым, а напряженность поля и концентрация во всех областях увеличиваются. Через некоторое время величины B_X/B_Y , δ/R_f , F_M , F_m , F_c и σ_- достигают новых, больших по сравнению с диффузионной стадией значений, которые в дальнейшем не изменяются. Во-вторых, глобальная структура стримера остается прежней, но радикально изменяется характер ее эволюции, которая асимптотически ста-

новится экспоненциально-автомодельной. При больших θ все пространственные масштабы стримера увеличиваются со временем по экспоненте $\exp(\theta/\theta_R)$ с одной и той же постоянной времени θ_R , концентрация σ и напряженность \mathbf{F} поля зависят только от одной автомодельной векторной координаты $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \exp(-\theta/\theta_R)$, а распределения плотности объемного заряда и потенциала описываются формулами (35), (36). Заряд Q_f фронта по-прежнему удовлетворяет соотношению (24) и вместе с токами J_{C0} , J экспоненциально увеличивается со временем. На этой стадии процесс эволюции совершенно устойчив и может продолжаться до тех пор, пока не будет подавлен одним из неучтенных в простейшей модели механизмов. В очень сильном внешнем поле (при $A_0 \geq 0.1$) тунNELьная ионизация начинает проявляться сразу после образования стримера, так что диффузионная стадия эволюции практически отсутствует.

Для того чтобы облегчить понимание изложенной выше картины, мы приведем в качестве примера основные характеристики процесса эволюции лавины и стримера в кремнии во внешнем поле $E_0 = 0.427$ МВ/см ($A_0 = 0.03$), используя обычные размерные единицы. В этом случае лавино-стримерный переход начинается через 18.3 пс после возникновения первичной электронно-дырочной пары, когда эффективная длина лавины достигает примерно 3.7 мкм. Минимум поля и максимум концентрации «пересекаются» из центра лавины к фронтам при $t \approx 25$ пс, когда расстояние между максимумами поля $2x_f \approx 5.4$ мкм. Завершение перехода и начало диффузионной стадии эволюции происходит при $t \approx 32$ пс, когда $2x_f \approx 8.9$ мкм, а концентрация за фронтом $2n_-$ и максимальное поле E_M достигают соответственно значений $2.9 \cdot 10^{18}$ см⁻³ и 0.97 МВ/см. Без учета тунNELьной ионизации неустойчивость фронта возникла бы при $t \approx 45$ пс, однако она не успевает развиться, так как при $t \approx 40$ пс и $2x_f \approx 14.2$ мкм начинает формироваться экспоненциально-автомодельный стример. Процесс перестройки характера эволюции завершается при $t \approx 50$ пс, когда $2x_f \approx 15.5$ мкм, а $2n_-$ и E_M достигают новых стационарных значений $1.56 \cdot 10^{19}$ см⁻³ и 1.64 МВ/см. После этого стример начинает экспоненциально ускоряться и расширяться с постоянной времени $t_R \approx 11.5$ пс. При $t = 75.6$ пс в центре стримера концентрация достигает $5 \cdot 10^{20}$ см⁻³, полупроводник нагревается до 700 °С и, вероятно, разрушается. В этот момент времени $2x_f \approx 256$ мкм, максимальный диаметр стримера равен примерно 48 мкм, а наведенный во внешней

цепи ток $I \approx (0.2 \text{ А}\cdot\text{см})/x_0$, где $2x_0$ — расстояние между плоскими электродами.

Экспоненциальное ускорение и расширение стримеров ранее наблюдалось при экспериментальном исследовании импульсного пробоя газов в однородном внешнем поле [60–62]. Авторы работы [62] объясняли свои результаты на основе теории [10], согласно которой катодно- и анодно-направленные стримеры представляют собой два высокопроводящих эллипсоида вращения, вытянутых вдоль внешнего однородного поля E_0 и соединенных относительно тонкой перемычкой, причем и длина a , и диаметр d эллипсоидов должны экспоненциально увеличиваться со временем. Однако это замечательное сходство с экспериментами и с нашими результатами на самом деле является чисто внешним и для их объяснения теория из работы [10] не пригодна. Действительно, она основана на предположении о том, что скорость u_f фронта равна дрейфовой скорости электронов в электрическом поле на поверхности эллипсоидов. Оно верно только в дрейфовом приближении при отсутствии перед фронтом фоновых электронов и дополнительных механизмов ионизации [63], игнорирует ключевую идею работ [1, 2] о сильном лавинном размножении электронов перед фронтом и не позволяет объяснить распространение катодно-направленных стримеров в газах. Кроме того, авторы работы [10] полагали, что заряд каждого из эллипсоидов равен нулю. В результате они пришли к противоречащему экспериментам и нашим результатам выводу о том, что радиус кривизны r_f фронта не зависит от времени, $a \propto \exp \sqrt{\mu_e |E_0| (t - t_0) / r_f}$, а $d = 2\sqrt{ar_f}$.

Экспоненциальное ускорение и расширение стримера в однородном поле предсказывалось также в работе [13], однако и ее нельзя использовать для интерпретации наших результатов. Во-первых, развитая в этой работе теория описывает распространение стримера в газах с однородным фоном затрачовых электронов и без дополнительных механизмов ионизации. Во-вторых, в [13] использовалась модель стримера в виде тонкой и очень длинной нити с конечной проводимостью, глобальная структура которой существенно отличается от той, что изображена на рис. 16. В-третьих, и это самое главное, в [13] не содержится указаний на экспоненциально-автомодельный характер эволюции стримера в целом; в частности, теория дает оценку постоянной времени роста радиуса головки стримера, но не позволяет связать ее с постоянной времени роста скорости и длины стримера.

Похожие на описанные в разд. 3.3 структура и

эволюция стримеров были получены в ряде работ¹¹⁾, посвященных численному моделированию пробоя газов в однородном внешнем поле [17, 21, 58, 64, 65]. Наиболее полные данные приведены в цикле статей [21], автор которых обнаружил, что не только скорость, но также радиус кривизны и толщина фронта стримера экспоненциально растут с одинаковыми постоянными временем, а межэлектродный ток — с постоянной времени втрое меньшей. Однако он не заметил, что эти результаты прямо указывают на экспоненциально-автомодельный характер эволюции стримеров.

По нашему мнению, это фундаментальное свойство стримеров, распространяющихся в однородном поле, должно быть основным результатом соответствующей теории или, по крайней мере, лежать в ее основе в качестве исходной гипотезы. В принципе создание такой теории не исключено, поскольку система уравнений непрерывности (1) и Пуассона (2) допускает асимптотические экспоненциально-автомодельные решения. Это недавно было показано автором [71] на примере сферически-симметричной волны ударной ионизации в газах, структура которой оказалась очень похожей на описанную в [21]. Поэтому такая волна может служить простейшей, но наглядной и весьма полной моделью стримеров в однородном электрическом поле. Правда, для проведения количественного сравнения с результатами разд. 3.3 теорию работы [71] надо модифицировать так, чтобы в ней учитывались особенности полупроводников, указанные во Введении. Кроме того, ее необходимо попытаться обобщить на менее симметричные случаи, так как в рамках сферической модели невозможно получить реальную аксиально симметричную форму стримера.

Автор благодарен А. В. Горбатюку за многочисленные плодотворные обсуждения вопросов, затронутых в настоящей работе.

¹¹⁾ В большинстве ранних работ, посвященных моделированию стримеров в однородном поле, получались весьма противоречивые результаты. Например, в [66] сообщалось о квазистационарном распространении стримеров, в [67, 68] было получено экспоненциальное ускорение стримера при почти постоянном радиусе кривизны фронта, в [69] получена зависимость $u_f(t)$, похожая на экспоненту, но при линейном росте радиуса стримера. Возможно, это объясняется несовершенством вычислительных методов и компьютеров, доступных в то время. Однако и в более поздних работах (см., например, [70]) сообщалось о стационарном распространении стримеров в однородном поле. Детальный анализ этих противоречий выходит за рамки настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. B. Loeb and J. M. Meek, *J. Appl. Phys.* **11**, 438, 459 (1940).
2. H. Reather, *Z. Phys.* **112**, 464 (1939).
3. Ю. Д. Королев, Г. А. Месяц, *Физика импульсного пробоя газов*, Наука, Москва (1991).
4. Э. М. Базелян, Ю. П. Райзер, *Искровой разряд*, Изд-во МФТИ, Москва (1997).
5. Yu. V. Shcherbakov and R. S. Sigmond, *J. Phys. D* **40**, 460, 474 (2007).
6. M. M. Nudnova and A. Yu. Starikovskii, *J. Phys. D* **41**, 234003 (2008).
7. J. K. Wright, *Proc. Roy. Soc. London A* **280**, 23 (1964).
8. G. Dawson and W. P. Winn, *Z. Phys.* **183**, 159 (1965).
9. I. Gallimberti, *J. Phys. D* **5**, 2179 (1972).
10. Э. Д. Лозанский, О. Б. Фирсов, *ЖЭТФ* **56**, 670 (1969); *Теория искры*, Атомиздат, Москва (1975).
11. А. С. Гайвороновский, И. М. Ржанский, *ЖТФ* **56**, 1110 (1986).
12. М. И. Дьяконов, В. Ю. Качоровский, *ЖЭТФ* **94**, 321 (1988).
13. М. И. Дьяконов, В. Ю. Качоровский, *ЖЭТФ* **95**, 1850 (1989).
14. М. И. Дьяконов, В. Ю. Качоровский, *ЖЭТФ* **98**, 895 (1990).
15. Ю. П. Райзер, А. Н. Симаков, *Физика плазмы* **22**, 668 (1996); **24**, 754 (1998).
16. G. E. Georghiou, A. P. Papadakis, R. Morrow et al., *J. Phys. D* **38**, R303 (2005).
17. A. Luque, V. Ratushnaya, and U. Ebert, *J. Phys. D* **41**, 234005 (2008).
18. C. Montijn, W. Hundsdorfer, and U. Ebert, *J. Comp. Phys.* **219**, 801 (2006).
19. D. Bessieres, J. Paillol, A. Bourdon et al., *J. Phys. D* **40**, 6559 (2007).
20. A. P. Papadakis, G. E. Georghiou, and A. C. Metaxas, *J. Phys. D* **41**, 234019 (2008).
21. A. A. Kulikovsky, *J. Phys. D* **28**, 2483 (1995); **30**, 441, 1515 (1997).
22. В. П. Грибковский, *Ж. прикл. спектр.* **15**, 709 (1984).
23. Н. Г. Басов, А. Г. Молчанов, А. С. Насибов и др., *ЖЭТФ* **70**, 1751 (1976).
24. А. З. Обидин, А. Н. Печенов, Ю. М. Попов и др., *КЭ* **9**, 1530 (1982).
25. P. Segur, A. Bourdon, E. Marode et al., *Plasma Sources Sci. Technol.* **15**, 648 (2006).
26. A. Bourdon, V. P. Pasko, N. Y. Liuet et al., *Plasma Sources Sci. Technol.* **16**, 656 (2007).
27. J. Capeillere, P. Segur, A. Bourdon et al., *J. Phys. D* **41**, 234018 (2008).
28. С. Н. Вайнштейн, Ю. В. Жиляев, М. Е. Левинштейн, *Письма в ЖТФ* **14**, 152 (1988).
29. А. С. Кюргян, *Письма в ЖТФ* **31**, 11 (2005).
30. I. V. Grekhov, *Sol. St. Electron.* **32**, 923 (1989).
31. R. J. Focia, E. Schamiloglu, C. B. Fleidermann et al., *IEEE Trans. Plasma Sci.* **25**, 138 (1997).
32. P. Rodin, U. Ebert, W. Hundsdorfer et al., *J. Appl. Phys.* **92**, 958 (2002).
33. C. Li, U. Ebert, W. J. M. Brok et al., *J. Phys. D* **41**, 032005 (2008).
34. Л. Сегерлинд, *Применение метода конечных элементов*, Мир, Москва (1979).
35. T. A. Davis, *ACM Trans. Math. Softw.* **30**, 196 (2004); <http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/umfpack/>.
36. U. Ebert, C. Montijn, T. M. P. Briels et al., *Plasma Sources Sci. Technol.* **15**, S118 (2006).
37. U. Ebert, W. Van Saarloos, and C. Caroli, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4178 (1996); *Phys. Rev. E* **55**, 1530 (1997).
38. M. Arrayas, U. Ebert, and W. Hundsdorfer, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 174502 (2002).
39. A. Rocco, U. Ebert, and W. Hundsdorfer, *Phys. Rev. E* **66**, 035102(R) (2002).
40. C. Montijn, U. Ebert, and W. Hundsdorfer, *Phys. Rev. E* **73**, 065401(R) (2006).
41. J. J. Liou, *Sol. St. Electron.* **33**, 971 (1990).
42. А. С. Кюргян, *ФТП* **42**, 23 (2008).
43. R. Morrow and N. Sato, *J. Phys. D* **32**, L20 (1999).
44. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
45. А. С. Кюргян, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 360 (2007).
46. W. van Saarloos, *Phys. Rep.* **386**, 29 (2003).

47. А. С. Кюргян, ФТП **41**, 761 (2007).
48. С. В. Сизых, Автореф. дисс. . . . канд. физ.-мат. наук, ИВТАН, Москва (1985).
49. И. В. Греков, П. Б. Родин, Письма в ЖТФ **33**, 87 (2007).
50. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов, *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*, Физматлит, Москва (2005).
51. Г. И. Баренблatt, *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика*, Гидрометеоиздат, Ленинград (1982).
52. C. Li, W. J. M. Brok, U. Ebert et al., J. Appl. Phys. **101**, 123305 (2007).
53. T. T. Mnatsakanov, Phys. Stat. Sol. (b) **143**, 225 (1987).
54. J. R. Krausse, Sol. St. Electron. **15**, 1377 (1972).
55. M. V. Fischetti, and S. E. Laux, Phys. Rev. B **38**, 9721 (1988).
56. S. E. Laux, M. V. Fischetti, and D. J. Frank, IBM J. Res. Develop. **34**, 496 (1990).
57. В. Н. Абакумов, В. И. Перель, И. Н. Яссевич, *Безызлучательная рекомбинация в полупроводниках*, Изд-во «Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова РАН», Санкт-Петербург (1997).
58. D. Nikandrov, L. Tsedin, V. Kolobov et al., in *Proc. 28th ICPIG*, Prague, July 15–20 (2007), p. 445 (<http://icpig2007.ipp.cas.cz/>).
59. Н. Л. Александров, Э. М. Базелян, ЖЭТФ **118**, 835 (2000).
60. K. H. Wagner, Z. Phys. **189**, 465 (1966).
61. В. А. Давиденко, Б. А. Долгошайн, С. В. Сомов, ЖЭТФ **55**, 435 (1968).
62. Н. С. Руденко, В. И. Сметанин, ЖЭТФ **61**, 146 (1971).
63. А. Н. Лагарьков, И. М. Руткевич, *Волны электрического пробоя в ограниченной плазме*, Наука, Москва (1989).
64. N. Yu. Babaeva and G. V. Naidis, IEEE Trans. Plasma Sci. **25**, 375 (1997).
65. A. Luque, U. Ebert, C. Montijn et al., Appl. Phys. Lett. **90**, 081501 (2007).
66. И. В. Евлахов, В. Ю. Качоровский, В. М. Чистяков, ЖЭТФ **102**, 59 (1992).
67. C. Wu and E. E. Kunhardt, Phys. Rev. A **37**, 4396 (1988).
68. P. Vitello, B. Penetrante, and J. Bardsley, Phys. Rev. E **49**, 5574 (1994).
69. J. Guo and C. Wu, IEEE Trans. Plasma Sci. **24**, 1348 (1996).
70. S. V. Pancheshnyi and A. Yu. Starikovskii, J. Phys. D **36**, 2683 (2003).
71. A. S. Kyuregyan, Phys. Rev. Lett. **101**, 174505 (2008).