ЖЭТФ, 2009, том 136, вып. 2 (8), стр. 247–253

ПЕРЕНОРМИРОВКА УРАВНЕНИЯ ЛОРЕНЦА – АБРАГАМА – ДИРАКА ДЛЯ РАДИАЦИОННОЙ СИЛЫ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

И. В. Соколов *

University of Michigan, MI48109 USA

Поступила в редакцию 9 апреля 2009 г.

В работе Дирака о радиационной силе в классической электродинамике предусматривалась возможность введения 4-импульса излучающего электрона, неколлинеарного с 4-вектором его скорости. Тем самым фактически предлагалась перенормировка массы как оператора, соотносящего указанные векторы. Там же отмечалась неединственность выбора, приводящего к уравнению Лоренца – Абрагама – Дирака (ЛАД). Показано, что перенормировка уравнения ЛАД при дополнительном требовании, чтобы перенормированные энергия-импульс подчинялись такому же релятивистскому соотношению, как и обычные, $\mathcal{E}^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4$, приводит к существенной модификации уравнения ЛАД. Свойства нового уравнения таковы: оно строже, чем уравнение ЛАД, поскольку не имеет его недостатков; оно проще, чем известное приближение для уравнения ЛАД; оно представляется предпочтительным для численного моделирования процессов в полях сверхсильных лазерных импульсов.

PACS: 41.60.-m, 52.38.-r

1. Движение электрона в фокусе мощного лазера, такого как HERCULES (University of Michigan) [1], в основном контролируется излучательными потерями энергии и импульса [2]. Проблемы как можно более точного описания такого движения в рамках классической электродинамики и как можно более эффективного численного интегрирования уравнений движения для систем многих частиц (плазмы) в значительной степени остаются открытыми и актуальными.

Вообще говоря, при рассмотрении этих задач необходимо решать уравнение Лоренца – Абрагама – Дирака (ЛАД). Обзор теории уравнения ЛАД дан в работе [3], достаточно полный список современных публикаций имеется в работе [4], а в настоящей статье мы будем ссылаться только на те работы, которые кажутся уместными в обсуждаемом контексте. Прямое численное моделирование для уравнения ЛАД, у которого «почти все» решения уходят на бесконечность за малое время, осуществлено в работе [5]. При этом примененный метод (интегрирование вспять по времени), хотя изящен, но вряд ли пригоден для многочастичных систем, что лишний раз подчеркивает незаконченность теории, несмотря на значительные усилия в этом направлении. Известны приближенные версии уравнения ЛАД; несомненно, лучшая из них описана в работе [6] (см. уравнение (76.3)). Все приближенные версии не свободны от недостатков (см. обсуждение и ссылки в [3]), таких, например, как неточное сохранение энергии-импульса в системе внешнее поле–частица–излучение.

В настоящей работе используется идея, предложенная Дираком в работе [7], но не разработанная. Именно, предлагается перенормировка массы электрона, но не как скаляра, соотносящего полную энергию одетого электрона с энергией покоя голого заряда и его электростатической энергией, а как оператора, соотносящего 4-импульс одетой частицы с 4-скоростью голого заряда, т. е. с током. При этом как равноправная альтернатива уравнению ЛАД, а не как приближение, возникает система уравнений, которая кажется более пригодной, по крайней мере, для численного моделирования.

Подчеркнем, что в настоящей работе обсуждаются только точные законы сохранения и удовлетворя-

*E-mail: igorsok@umich.edu

ющие им уравнения движения, но к самим уравнениям применение понятия «точные» вряд ли оправдано. Сама концепция радиационной силы в [6] (как и уравнение ЛАД) вводится как приближенная. Вне пределов приближения излучение высокоэнергичного фотона приводило бы к значительному изменению импульса электрона Δp^i, которое не может быть сведено к импульсу силы $(f^i)_{rad}\Delta t$ за сколь угодно малый интервал времени Δt. Столь далеко выходящий за пределы классической электродинамики случай здесь не рассматривается.

2. В пренебрежении излучением движение электрона во внешнем электромагнитном поле описывается следующими уравнениями [6]:

$$\dot{p}^i = \frac{e}{c} F^{ij} \dot{x}_j, \quad \dot{x}^i = m^{-1} p^i, \tag{1}$$

где F^{ij} — тензор поля, p^i и x^i — 4-векторы механического импульса и координат электрона, $e = -|e|$ и m — его заряд и масса покоя, c — скорость света. Точка обозначает дифференцирование по собственному времени τ. 4-векторы и 4-тензоры перемножаются по обычным правилам с метрическим тензором, $g^{ij} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Динамика поля дается уравнением для тензора энергии-импульса T^{ij}:

$$\frac{d}{d\tau} \int T^{i0} dV = -\frac{e}{c} F^{ij} \dot{x}_j, \tag{2}$$

так что суммарные энергия и импульс сохраняются:

$$p^i + \int T^{i0} dV = \mathrm{const}.$$

Система (1) является гамильтоновой, с каноническим (обобщенным) импульсом

$$P^i = p^i + \frac{eA^i}{c},$$

что следует из представления тензора поля через 4-вектор потенциала A^i:

$$F^{ij} = \frac{\partial A^j}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_j}.$$

Если вектор-потенциал не зависит от (циклической) координаты вдоль некоторого направления, $(\mathbf{n} \cdot \nabla) A^i$, то проекция обобщенного потенциала на это направление сохраняется: $(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{P}}) = 0$. Правая часть уравнения (1) ортогональна как 4-импульсу, так и (коллинеарной с ним) 4-скорости, что обеспечивает выполнение тождеств

$$\dot{x}^2 = c^2, \tag{3}$$

$$p^2 = m^2 c^2 \tag{4}$$

(здесь и далее квадрат любого 4-х вектора a^i определен согласно правилу $a^2 = a^i a_i$).

3. Введение перенормировки в уравнения (1) не является необходимостью, однако она без труда может быть проведена [6]. Сначала рассмотрим покоящийся электрон и окружим его точечный заряд сферической поверхностью очень малого радиуса ϵ. Подсчитаем энергию электростатического поля, созданного зарядом электрона снаружи от указанной поверхности:

$$\mathcal{E}_{em} = \frac{e^2}{2} \int\limits_{\epsilon}^{\infty} \frac{dr}{r^2},$$

где r — расстояние до заряда. Из соображений релятивистской инвариантности следует выражение для 4-импульса собственного электромагнитного поля электрона, равномерно движущегося со скоростью $\dot{x}$. Снаружи окружающей заряд и движущейся вместе с ним поверхности интеграл энергии-импульса поля равен

$$p^i_{em} = \frac{e^2 \dot{x}^i}{2c^2} \int\limits_{\epsilon}^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

(более длинное доказательство дано в [8, гл. 17.5]).

В пренебрежении ускорением электрона можно суммировать импульс увлекаемого поля с импульсом заключенной внутри поверхности «голой» частицы:

$$p^i_n = m_n \dot{x}.$$

При этом можно ввести массу «одетой» частицы как скаляр

$$m = m_n + \frac{e^2}{2\epsilon c^2},$$

пользуясь коллинеарностью всех импульсов:

$$p^i_{em} \propto \dot{x}^i, \quad p^i_n \propto \dot{x}^i.$$

4. При учете ускорения электрона ситуация качественно изменяется. Во-первых, необходимо учитывать эффекты запаздывания в формировании электромагнитной энергии электрона: для грубых оценок полагаем, что часть энергии-импульса поля при $r > c\Delta\tau$ относится к значению скорости в момент времени $\tau - \Delta\tau$, тогда как скорость в текущий момент времени отнесена к интервалу интегрирования $\epsilon < r < c\Delta t$, тогда получаем

$$p^i_{em} = \frac{e^2}{2c^2} \left[\dot{x}^i(\tau - \Delta\tau) \int\limits_{c\Delta\tau}^{\infty} \frac{dr}{r^2} + \dot{x}^i \int\limits_{\epsilon}^{c\Delta\tau} \frac{dr}{r^2} \right],$$

или

$$p^i_{em} = \frac{e^2}{2c^2} \left[\frac{\dot{x}^i}{\epsilon} - \frac{\ddot{x}^i}{c} \right],$$

если считать что $\Delta\tau \to 0$, но при этом $c\Delta\tau > \epsilon$.

Суммируя с импульсом голого заряда, мы находим, что с учетом эффекта запаздывания полный импульс ускоренно движущегося электрона не вполне коллинеарен с направлением 4-скорости голого заряда:

$$p^i = p^i_{em} + m_n c\dot{x}^i = m\dot{x}^i - m(\dot{x})^i_{rad}, \qquad (5)$$

где

$$(\dot{x})^i_{rad} \approx \tau_0 \ddot{x}^i, \quad \tau_0 = \frac{2e^2}{3mc^3} \approx 6.2 \cdot 10^{-24}\,\text{с}.$$

Связанный с ускорением дополнительный член в импульсе здесь и ниже обозначен как $-m(\dot{x})^i_{rad}$, поскольку для дальнейшего существенно, что в системе отсчета, в которой импульс электрона равен нулю, ток ускоренно движущегося (т. е. излучающего) электрона отличен от нуля. Дополнительный член приблизительно 4-ортогонален 4-скорости, что и свидетельствует о неколлинеарности импульса и скорости голого заряда, или, что то же самое, импульса и тока. Выбор численного коэффициента в определении τ_0 обеспечивает точное согласие с расчетом Дирака [7], который вычислял интеграл энергии-импульса для связанного электромагнитного поля электрона (о тензоре энергии-импульса для свободного поля см. ниже). Точнее, вычислялось изменение этого объемного интеграла во времени, еще точнее — равный ему с обратным знаком поток тензора энергии-импульса через окружающую электрон гиперповерхность.

Однако из тех же соображений о запаздывании следует, что как бы ни были точны расчеты, их результат не может дать точного значения энергии-импульса связанного электромагнитного поля электрона в момент времени τ. Во-первых, вовлеченное в расчет собственное поле испущено электроном не позднее момента времени $\tau - O(\epsilon/c)$, так что в лучшем случае вычисленный импульс относится к некоторому предшествующему моменту времени (либо размазан по некоторому интервалу времени). Во-вторых, экстраполяция сингулярного члена

$$\frac{e^2}{2c^2\epsilon}\dot{x}\left(\tau - \frac{\epsilon}{c}\right)$$

в p^i_{em} к текущему моменту времени дала бы погрешность порядка $m\tau_0\ddot{x}$, которая не стремится к нулю при стремлении ϵ к нулю.

Тесно связано с отмеченным эффектом и то обстоятельство, что незначительное переопределение охватывающей электрон гиперповерхности, по которой проводится интегрирование потока энергии-импульса, приводит к кажущемуся исчезновению пропорционального 4-ускорению члена из интеграла энергии-импульса (см. [9] или полезный обзор [10]). При этом все равно приходится вводить такой член в определение импульса, но уже через постулированное выражение определенного вида для импульса «того, что находится внутри» указанной гиперповерхности, причем произвольный коэффициент в этом выражении должен определяться из независимых соображений. Подход весьма близок к использованному в настоящей работе.

Поскольку ускоренно движущийся электрон в классической электродинамике обязательно излучает, необходимо проследить, чтобы вычеркивание связанного поля из тензора энергии-импульса не затрагивало бы ту часть тензора, которая описывает излучение. Такое возможно, поскольку в тензоре энергии-импульса собственного поля электрона может быть выделена относящаяся к излучению часть,

$$T^{ij}_{rad} = \frac{e^2}{4\pi r^2 c^4}\kappa^i\kappa^j\left[-(\ddot{x}(\tau))^2 - (\ddot{x}^l(\tau)\kappa_l)^2\right], \qquad (6)$$

$$r = [r^i - x^i(\tau)]\dot{x}_i(\tau)/c, \quad \kappa^i = [r^i - x^i(\tau)]/r, \qquad (7)$$

которая сама по себе подчиняется закону сохранения во всем пространстве, за исключением мировой линии голого заряда (см. выражение для T^{ij}_{rad} и доказательства приведенных ниже утверждений в [9, 10]):

$$\frac{\partial T^{ij}_{rad}}{\partial r^j} = c\int(\dot{p}^i)_{rad}\,\delta^4(r^i - x^i(\tau))\,d\tau. \qquad (8)$$

Здесь r^i — координатный 4-вектор в некоторой системе отсчета, τ в уравнениях (6), (7) определяется для данной точки r^i из условия запаздывания: $k^i k_i = 0$; $(\dot{p}^i)_{rad}$ — приращение 4-импульса излучения за единицу собственного времени, что подтверждается интегрированием уравнения (8) по d^4r^i: по всей области, занятой излучением, и по времени от $-\infty$ до текущего момента времени t:

$$\int T^{i0}_{rad}(t)\,dV = \int^{\tau(t)}(\dot{p}^i)_{rad}d\tau. \qquad (9)$$

В то же время на больших расстояниях именно T^{ij}_{rad} определяет поток и угловое распределение излучения (см. [11]). Выражение для $(\dot{p})_{rad}$, разумеется, известно и дается формулами для электродипольного излучения [6].

5. Для учета воздействия излучения на движение электрона Дирак предложил следующего типа расширение гамильтоновой системы [7]:

$$\dot{p}^i = \frac{e}{c} F^{ij} \dot{x}_j - (\dot{p})^i_{rad}, \quad \dot{x}^i = m^{-1} p^i + (\dot{x})^i_{rad}, \quad (10)$$

выражения для добавленных членов пока несущественны.

Такая интерпретация теории Дирака не бесспорна. Более того, разбиение традиционной 4-силы радиационного трения на два слагаемых,

$$m d(\dot{x})^i_{rad}/d\tau - (\dot{p})^i_{rad},$$

(в используемых здесь обозначениях) и включение первого из них, являющегося полной производной по времени, в определение 4-импульса, а не в уравнение импульсов, критиковалось, например, в работе [11]. Однако, во-первых, Дирак ясно подчеркивал, что происхождение тех членов, что включены в энергию-импульс электрона в уравнениях (10), связано именно с внутренней энергией электрона. Во-вторых, как показано выше, отделение этих членов от излучательных эффектов возможно и целесообразно, а вот корректное отделение их от энергии собственного поля электронов вряд ли возможно.

Выражая $(\dot{x})^i_{rad}$ либо через $\dot{x}$, либо через p^i, можно рассматривать второе из уравнений (10) как операторную перенормировку либо массы

$$p^i = \hat{m}[\dot{x}^j],$$

где

$$\hat{m}[\dot{x}^j] = m(\dot{x}^i + (\dot{x})^i_{rad}[\dot{x}]),$$

либо обратной массы

$$\dot{x^i} = \hat{m}^{-1}[p^j],$$

где

$$\hat{m}^{-1}[p^j] = m^{-1} p^i - (\dot{x})^i_{rad}[p^j].$$

6. По сравнению с (1), свойства уравнений (10) изменяются следующим образом. В законе сохранения энергии-импульса,

$$\dot{p}^i + (\dot{p})^i_{rad} + \frac{d}{d\tau} \int T^{i0} dV = 0, \quad (11)$$

новый член, $(\dot{p})^i_{rad}$, описывает энергию и импульс, уносимые излучением. Соотношение (2) остается неизменным, причем вклад от тока перехода, $eF^i{}_j (\dot{x})^j_{rad}/c$, имеет смысл энергии-импульса, которые электрон отбирает от поля в процессе излучения. Как поясняющий пример рассмотрим релятивистски сильную электромагнитную волну с волновым вектором k^i_0 в качестве внешнего электромагнитного поля. При излучении электроном в поле волны одного высокоэнергичного фотона с волновым вектором k^i_1 закон сохранения энергии-импульса дает

$$p^i_f = p^i_i + n\hbar k^i_0 - \hbar k^i_1,$$

нижние индексы («i» и «f») обозначают начальное и конечное состояния электрона. В сильном поле число поглощенных квантов, n, может быть очень велико, и их отбор от классического поля, уже хотя бы по этой причине, должен описываться в соответствии с уравнением (2) как действие тензора поля на некоторый ток. Именно этот ток и введен как $e(\dot{x})^i_{rad}$. Импульс же излученного фотона дает вклад в $(\dot{p})^i_{rad}$. Переход к пределу классической электродинамики приводит к уравнению типа (10), а точнее, дает альтернативный вывод системы (20).

Закон сохранения обобщенного импульса видоизменяется, если импульс излучения имеет ненулевую проекцию на направление циклической координаты:

$$(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{P}}) = -\mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{p}})_{rad} = 0.$$

В отсутствие излучения и внешнего поля механический и обобщенный импульсы сохраняются: в частности, они равны нулю, если они изначально равны нулю (самовоздействие отсутствует).

7. Трудности однако возникают с выполнением уравнений (3), (4). Отмеченная Дираком неоднозначность выбора выражения для импульса (иными словами, для перенормировки оператора массы) сопряжена с выбором: каким из этих уравнений следует пожертвовать, поскольку для системы (10) их одновременное выполнение невозможно. В частности, обычно обеспечивается выполнение условия (3), что возможно, если

$$(\dot{x})^i_{rad} \dot{x}_i = 0, \quad m(\dot{x})^i_{rad} \ddot{x}_i = -(\dot{p})^i_{rad} \dot{x}_i.$$

Если излучательные потери выражены через ускорение согласно формуле для дипольного излучения, то мы имеем

$$(\dot{p})^i_{rad} = -\frac{m\tau_0 \ddot{x}^2}{c^2} \dot{x}^i, \quad (\dot{x})^i_{rad} = \tau_0 \ddot{x}^i, \quad (12)$$

$$\hat{m}[\dot{x}^i] = m \left(1 - \tau_0 \frac{d}{d\tau}\right) \dot{x}^i. \quad (13)$$

Уравнения (10), (12) эквивалентны уравнению ЛАД:

$$m\ddot{x}^i = \frac{e}{c} F^{ij} \dot{x}_j + m\tau_0 \dddot{x}^i + \frac{m\tau_0 \ddot{x}^2}{c^2} \dot{x}^i. \quad (14)$$

Отличие такой формы записи (см. [7, 8]) от принятой в [6] не может вызвать недоразумения.

Общеизвестные трудности уравнения ЛАД [6–11] связаны с сингулярностью массового оператора: для самоускоряющегося решения $\dot{\mathbf{x}} \propto \exp(\tau/\tau_0)$, при том что скорость неограниченно растет, импульс электрона равен нулю (см. (13)). Проблемой является и нарушение тождества (4), которое принимает вид

$$p^2 = m^2(c^2 + \tau_0^2 \ddot{x}^2) \le m^2 c^2$$

(напомним, что $\ddot{x}^2 \le 0$). Поскольку

$$p^2 = \mathcal{E}^2/c^2 - \mathbf{p}^2,$$

где $\mathcal{E}$ — энергия электрона, не только нарушается известное соотношение между энергией и импульсом

$$\mathcal{E}^2/c^2 \ne \mathbf{p}^2 + m^2 c^2,$$

но и энергия покоя ускоренного электрона оказывается меньшей, чем mc^2. Более того, теория допускает превращение этого дефекта энергии в излучение: при анализе баланса (сохраняющейся!) энергии в самоускоряющемся решении легко видеть, что энергия излучения неограниченно черпается из энергии покоя электрона.

Несмотря на проблемы с энергией в уравнении ЛАД, отметим, что в известной приближенной модели для радиационной силы [6] вообще не просматривается возможность ввести энергию-импульс излучающей частицы, поскольку эта модель непредставима в виде (10). Приближенная модель, представимая в виде (10), очень давно была предложена в работе [12]:

$$(\dot{p})^i_{rad} = -\frac{e\tau_0 \ddot{x}_l F^{lj} \dot{x}_j}{c^3} \dot{x}^i, \quad (\dot{x})^i_{rad} = \tau_0 \frac{eF^{ij}\dot{x}_j}{mc}, \quad (15)$$

$$\hat{m}[\dot{x}^i] = m^{ij}\dot{x}_j = m\left(g^{ij} - \tau_0 \frac{eF^{ij}}{mc}\right)\dot{x}_j. \quad (16)$$

Модель эта впоследствии была признана неудачной (см. [3]). Однако дальнейшее преобразование уравнений (10), (15), сводящее их к уравнению (76.3) из работы [6], приводит к неточному сохранению энергии-импульса. Действительно, преобразованный член $md((\dot{x})_{rad})/d\tau$ после выполнения дифференцирования по времени и приближенного выражения ускорения через силу Лоренца (как в [6]) уже не является полной производной по τ, так что уравнение (11) уже не выполняется ни в дифференциальной форме, ни даже в интегральной.

8. Теперь потребуем выполнения (4) вместо (3), что возможно в случае

$$\frac{e}{c} p^i F_{ij} (\dot{x})^j_{rad} = p_i (\dot{p})^i_{rad}. \quad (17)$$

Предполагая обычную связь между энергией и импульсом излучения [6], получим согласованное с (17) выражение для тока перехода:

$$(\dot{p})^i_{rad} = \frac{I}{mc^2} p^i, \quad (\dot{x})^i_{rad} = \frac{\tau_0}{m} \frac{I}{I_E} f^i_L, \quad (18)$$

где I — интенсивность излучения (потеря энергии за единицу времени), а $I_E = -\tau_0 f_L^2/m$ — интенсивность электродипольного излучения, выраженная, как и сила Лоренца,

$$f^i_L = \frac{eF^{ij}p_j}{mc},$$

через импульс электрона и действующие на него поля. Соответственно перенормированный оператор (в данном случае — тензор) массы выглядит следующим образом:

$$(\hat{m}^{-1})^{ij} = \frac{1}{m} g^{ij} + \frac{\tau_0 e}{m^2 c} \frac{I}{I_E} F^{ij}. \quad (19)$$

Если положить $I = I_E$ (что необязательно, I может быть иной функцией или вообще не функцией, а случайной величиной, отражая вероятностный характер излучения кванта), приходим к системе уравнений движения для излучающего электрона:

$$\dot{p}^i = \frac{e}{c} F^{ij}\dot{x}_j + \frac{\tau_0 f_L^2}{m^2 c^2} p^i, \quad \dot{x}^i = m^{-1} p^i + \frac{\tau_0}{m} f^i_L. \quad (20)$$

9. Обсудим свойства полученных уравнений. Прежде всего, их отличие от уравнения ЛАД очень мало, что видно из сравнения (10)–(12) с (20), с учетом малости τ_0. Тем не менее отсутствуют самоускоряющиеся решения и энергетические парадоксы. Радиационные «поправки» к гамильтоновой системе выражены через параметры «невозмущенной» системы (импульс и поле в точке, где находится частица), что допускает сопоставление с построенной по теории возмущений квантовой электродинамикой. Полезна и проста 3-векторная формулировка (20):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}_L + \frac{e}{c}[\delta\mathbf{u} \times \mathbf{B}] - \frac{\mathcal{E}^2(\delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_L)}{m^2 c^6}\mathbf{u}, \quad (21)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}, \quad \delta\mathbf{u} = \frac{\tau_0}{m} \frac{\mathbf{f}_L - \mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_L)/c^2}{1 + \tau_0(\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_L)/(mc^2)}, \quad (22)$$

где t — время в произвольной системе отсчета,

$$\mathcal{E}/c = (m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2},$$

$$\mathbf{u} = c^2\mathbf{p}/\mathcal{E},$$
$$\mathbf{f}_L = e(\mathbf{E} + [\mathbf{u}\times\mathbf{B}]/c)$$

— сила Лоренца, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — электрическое и магнитное поля.

Численное решение уравнений (21), (22) в рамках метода частиц в ячейке не представляет труда и не многим сложнее, чем для гамильтоновых уравнений. При расчетах в рамках этого метода ток электронов со скоростью $\delta\mathbf{u}$, должен учитываться в уравнениях для электромагнитного поля, так как именно этот ток отвечает за отбор энергии от поля электроном в процессе излучения. Кроме того, не представляет труда и подсчет полной энергии излучения, при этом может использоваться дополнительное к (21), (22) уравнение энергии:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E}\cdot(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}) - \frac{\mathcal{E}^2(\delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_L)}{m^2c^4}. \qquad (23)$$

Для излучаемой за единицу времени энергии, которая дается последним членом в (23), нетрудно также рассчитать угловое и спектральное распределения. Пример расчета по такой схеме дан в [13, 14].

10. Неизбежен вопрос о нарушении тождества (3). Игнорируя благоприятные для теории моменты (при ограничении на величину поля, необходимом для применимости классической теории, нарушение соотношения (3) мало:

$$\frac{\hbar^2|f_L^2|}{m^2c^2} \ll m^2c^4, \quad c^2\left(1-\frac{1}{137^2}\right) < \dot{x}^2 \le c^2,$$

что во всяком случае исключает сверхсветовые парадоксы), рассмотрим главную логическую трудность: при нулевом пространственном импульсе электрона, $\mathbf{p} = 0$, скорость излучающего электрона отлична от нуля и равна, как нетрудно видеть,

$$\dot{\mathbf{x}}_{rad} = \tau_0\frac{e\mathbf{E}}{m}$$

(именно поэтому $\dot{x}^2 = c^2 - \dot{\mathbf{x}}_{rad}^2 \le c^2$). Опять, игнорируем тот благоприятный факт, что за любой мыслимый интервал времени электрон наберет многократно большую скорость за счет ускорения полем.

Вынужденно прибегая к квантовым понятиям и используя приведенный выше пример электрона в поле одномерной релятивистски сильной электромагнитной волны, ответим последовательно на три вопроса.

Что означает равный нулю (в течение некоторого малого интервала времени) импульс электрона? Он означает, что если в течение этого времени излучение (вероятностный процесс) отсутствовало, то как импульс, так и скорость частицы в данной системе отсчета равны нулю или, в любой другой системе отсчета, электрон движется по траектории гамильтоновой системы (1).

Почему в процессе излучения скорость электрона становится отличной от нуля? Потому что, как объяснялось выше, для излучения электрон должен отобрать энергию от поля.

Наконец, почему бы не допустить, что в процессе излучения импульс изменяется в соответствии со скоростью? Потому что это противоречило бы одному из законов сохранения: чтобы отобрать энергию от поля волны, скорость должна быть параллельна $\mathbf{E}$, но это направление циклической координаты, и изменение проекции импульса на это направление контролируется законом сохранения обобщенного импульса.

Не видно иного выхода, как допустить нарушение соотношения (3) в качестве платы за непротиворечиво введенную энергию-импульс. Разумеется, непривычно представление об электроне, движущемся не строго в направлении импульса, или о ненулевой пространственной скорости при нулевом пространственном импульсе. Однако и то, и другое — всего лишь инверсии утверждения о том, что из-за эффекта запаздывания вклад собственного поля электрона в его импульс не может определяться мгновенным значением скорости заряда.

11. Пример аналитического решения найденных уравнений легко получить для одномерного движения[1)] в однородном (для простоты) электрическом поле. Координатную ось x направляем вдоль $e\mathbf{E}$. Пусть в момент времени $t = \tau = 0$ электрон имеет нулевой импульс и находится в точке $x = 0$. Решение уравнений (20) имеет вид (ср. с [6, § 20], [8, задача 17.5] и [11, гл. 3]):

$$\frac{\mathcal{E}}{mc^2} = \operatorname{ch}(\omega_E\tau), \quad \frac{p_x}{mc} = \operatorname{sh}(\omega_E\tau), \quad \omega_E = \frac{eE}{mc}, \quad (24)$$

причем в пренебрежении излучением эволюция энергии-импульса имела бы точно такой же характер. Однако движение излучающей частицы имеет существенные отличия:

$$\begin{aligned} \frac{x}{c} &= \frac{\operatorname{ch}(\omega_E\tau)-1}{\omega_E} + \tau_0\operatorname{sh}(\omega_E\tau),\\ t &= \frac{\operatorname{sh}(\omega_E\tau)}{\omega_E} + \tau_0\left[\operatorname{ch}(\omega_E\tau)-1\right]. \end{aligned} \qquad (25)$$

По сравнению с движением, которое имело бы место в отсутствие излучения, т. е. в пренебрежении

[1)] Я признателен неизвестному рецензенту, указавшему на эту возможность.

в уравнении (25) членами, пропорциональными τ_0, излучающий электрон проскальзывает вперед в пространстве и во времени (оба пропорциональных τ_0 члена положительны). При таком проскальзывании электрическое поле совершает дополнительную работу, которая компенсирует излученную энергию и импульс:

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_{rad} = \tau_0 \omega_E \operatorname{sh}(\omega_E \tau), \\ (p_x)_{rad} = \tau_0 \omega_E \left[\operatorname{ch}(\omega_E \tau) - 1\right].\end{gathered} \tag{26}$$

Выбирая различную калибровку (чисто скалярный или чисто векторный потенциал), нетрудно проследить сохранение не только энергии, но и обобщенного импульса. Другое аналитическое решение (для электрона в поле одномерной электромагнитной волны) дано в работе [14].

Работа автора по физике высоких плотностей энергии поддержана грантом DE-FC52-08NA28616.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Yanovsky et al., Opt. Express **16**, 2109 (2008).
2. S. V. Bulanov et al., Plasma Phys. Rep. **30**, 196 (2004).
3. N. P. Klepikov, Sov. Phys. Usp. **28**, 509 (1985).
4. R. T. Hammond, arXiv:0902.4231v1.
5. F. V. Hartemann and A. K. Kerman, Phys. Rev. Lett. **76**, 624 (1996).
6. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon, New York (1994).
7. P. A. M. Dirac, Proc. Royal Soc. London **167**, 148 (1938).
8. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd Edition, Wiley, New York (1975).
9. C. Teitelboim, D. Villarroel, and C. G. van Weert, Riv. Nuovo Cimento **3**, 9 (1980).
10. E. Poisson, arXiv:gr-qc/9912045.
11. V. L. Ginzburg, *Theoretical Physics and Astrophysics*, Pergamon, New York (1979).
12. C. J. Eliezer, Proc. Royal Soc. London. Ser. A **194**, 543 (1948).
13. N. M. Naumova et al., Phys. Rev. Lett. **102**, 025002 (2009).
14. I. V. Sokolov et al., arXiv:0904.0405.v1.