ЖЭТФ, 2009, том 136, вып. 6 (12), стр. 1194–1208

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОДНОТОЧЕЧНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ В СТОХАСТИЧЕСКИХ МАГНИТО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

В. И. Кляцкин [*]

Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук
109017, Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 мая 2009 г.

Изучаются интегральные статистические характеристики векторной пассивной примеси (однородной в начальный момент времени) в поле скоростей, которое предполагается гауссовым однородным в пространстве и дельта-коррелированным во времени случайным полем. Такие статистические характеристики описывают динамическую систему в целом на всем пространстве, выделяя процессы генерации полей, что позволяет не отвлекаться на детали динамики, связанной с адвекцией этих величин. Такой примесью являются градиент поля плотности (в общем случае сжимаемой жидкости), вектор магнитного поля и его пространственные производные (в несжимаемой жидкости). Изучаются вопросы изотропизации во времени, спиральности и диссипации этих полей в отсутствие эффектов, связанных с молекулярной диффузией. Сформулирован метод последовательных приближений для дисперсии поля плотности и средней энергии магнитного поля, позволяющий в первом порядке по коэффициентам молекулярной диффузии получить решения, справедливые на всем интервале времени.

PACS: 05.40.-a, 05.45.-a, 46.65.+g, 47.27.-i

1. ВВЕДЕНИЕ

Диффузия таких пассивных полей, как поле плотности примеси (концентрация частиц) и магнитного поля, является одной из важных проблем теории турбулентности в магнитной гидродинамике. Исходными стохастическими уравнениями для поля плотности примеси $\rho(\mathbf{r},t)$ и магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ являются уравнение непрерывности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right)\rho(\mathbf{r},t)=\mu_\rho\Delta\rho(\mathbf{r},t),\qquad \rho(\mathbf{r},0)=\rho_0(\mathbf{r}) \tag{1}$$

и уравнение индукции [1]

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\operatorname{rot}\left[\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\right]+\mu_H\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r},t),$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},0)=\mathbf{H}_0(\mathbf{r}),$$

где μ_ρ и μ_H — молекулярные коэффициенты диффузии соответственно для плотности и магнитного поля. Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right)\mathbf{H}(\mathbf{r},t)= =\left(\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{u}(\mathbf{r},t)+\mu_H\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r},t). \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ — поле турбулентных скоростей, которое мы считаем однородным в пространстве и стационарным во времени, с заданными статистическими свойствами. Поле $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ при этом бездивергентно, т. е. $\operatorname{div}\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=0$.

Нас интересует эволюция во времени из заданных однородных начальных распределений $\rho_0(\mathbf{r})=\rho_0$ и $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})=\mathbf{H}_0$ различных одноточечных статистических характеристик градиента поля плотности $\mathbf{p}(\mathbf{r},t)=\boldsymbol{\nabla}\rho(\mathbf{r},t)$ и магнитного поля. Такими характеристиками, например, являются изотропизация этих полей, их спиральность и диссипация.

Динамические системы (1) и (2) консервативны

[*] E-mail: klyatskin@yandex.ru

и в процессе эволюции в общем случае сохраняются как общая масса примеси $M = \int d\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r},t)$, так и поток магнитного поля $\int d\mathbf{r}\,\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$. Для однородных начальных условий следствием консервативности динамических систем (1) и (2) являются равенства

$$\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle = \rho_0, \quad \langle\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\rangle = \mathbf{H}_0,$$

где через $\langle\ldots\rangle$ обозначено усреднение по ансамблю реализаций случайного поля $\{\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\}$.

В общем случае статистическое среднее, например, для магнитного поля $\int d\mathbf{r}\,\langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r},t))\rangle$ для однородных начальных условий переходит в выражение $\langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r},t))\rangle$, т. е.

$$\int d\mathbf{r}\,\langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r},t))\rangle \Leftrightarrow \langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r},t))\rangle\,,$$

следовательно, величина $\langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r},t))\rangle$ является удельной, приходящейся на единицу объема и, таким образом, интегральной величиной. Так, например, для однородных начальных условий величина $\left\langle\mathbf{H}^2(\mathbf{r},t)\right\rangle$ является средней энергией, приходящейся на единицу объема, в то время как для неоднородных начальных условий эта величина является средней плотностью энергии.

Эффекты молекулярной диффузии рассматриваемых динамических систем не существенны на начальных этапах развития и соответствующие члены в уравнениях (1) и (2) могут быть опущены. Тогда в этих системах происходят такие нестационарные и стохастические явления, как перемешивание, быстрый рост во времени и в некоторых случаях кластеризация в фазовом и физическом пространствах. Кластеризация какого-либо поля (плотности примеси, энергии магнитного поля и т. п.) есть возникновение компактных областей повышенного содержания этого поля, окруженного областями с относительно пониженным содержанием таких полей.

При однородных начальных условиях поле плотности остается постоянным во времени для несжимаемой жидкости (бездивергентное поле скоростей) и, следовательно, его градиент тождественно равен нулю в любой точке пространства. Но в сжимаемых потоках (дивергентное поле скоростей) всегда осуществляется кластеризация поля плотности (см., например, монографии [2–5] и обзорные работы [6–9]). Поэтому, естественно, возникают большие градиенты поля плотности. Характерное время образования кластерной структуры поля плотности определяется равенством $D^p t \sim 1$, где величина D^p связана с потенциальной составляющей спектральной плотности поля скоростей.

Для магнитного поля также при определенных условиях может осуществляться кластеризация его энергии при однородных начальных условиях (см. работу [10]), например, кластеризация всегда осуществляется в случайном акустическом поле (т. е. в потенциальном поле скоростей). Однако, даже в несжимаемом потоке жидкости происходит общая генерация магнитного поля (стохастическое магнитное динамо), появляется сильная изменчивость структуры поля и различные моментные функции как самого магнитного поля, так и его пространственных производных экспоненциально быстро растут во времени. Поэтому в некоторый момент времени диссипация полей, связанная с производными более высокого порядка, быстро усиливается и влияние коэффициентов молекулярной диффузии становится определяющим. Изучению этих вопросов и посвящена данная работа.

Отметим, что в упомянутых выше монографиях и работах для одноточечных характеристик самих полей в отсутствие эффектов молекулярной диффузии были получены уравнения для плотностей вероятностей этих полей. Это позволяет получить условия возможности образования кластерных структур на основе идей статистической топографии. Однако, к сожалению, рассмотрение производных этих полей требует как минимум двухточечных плотностей вероятностей. В принципе, такие уравнения можно получить стандартным путем, используя общую методику для линейных уравнений в частных производных первого порядка. Однако вывод таких уравнений требует очень громоздких вычислений и разобраться в следствиях такого описания очень сложно. Кроме того, такое вероятностное описание не допускает включения в анализ эффектов молекулярной диффузии.

Поэтому для анализа сформулированных проблем остается единственный путь, состоящий в изучении двухточечных корреляционных функций поля плотности

$$R(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t) = \langle\rho(\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{r}_1,t)\rangle$$

и магнитного поля

$$W_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t) = \langle H_i(\mathbf{r},t)H_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle\,,$$

зависящих для однородных начальных условий от разности $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$. Различные корреляции пространственных производных рассматриваемых полей можно получить последовательным дифференцированием этих функций по пространственным переменным. Исходные уравнения при этом должны содержать диссипативные члены.

Однако, прежде чем приступить к выполнению поставленной программы, рассмотрим основные характеристики случайного поля скоростей, которые и будут определять статистические параметры решения задачи.

1.1. О статистических характеристиках случайного поля скоростей

Рассмотрим теперь основные пространственно-временные статистические характеристики гауссова векторного случайного поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ с нулевым средним значением и корреляционным тензором

$$B_{ij}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}_1,t_1) = \langle u_i(\mathbf{r},t)u_j(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle .$$

Случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ предполагается в общем случае дивергентным ($\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r},t) \neq 0$) гауссовым полем, статистически однородным, обладающим сферической симметрией, но не имеющим отражательной симметрии в пространстве, и стационарным во времени с корреляционным и спектральным тензорами ($\tau = t - t_1$)

$$B_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\tau) = \langle u_i(\mathbf{r},t)u_j(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle = \\ = \int d\mathbf{k}\, E_{ij}(\mathbf{k},\tau)e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)},$$

$$E_{ij}(\mathbf{k},\tau) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d\mathbf{r}\, B_{ij}(\mathbf{r},\tau)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

где параметр d — размерность пространства. В силу предполагаемых условий симметрии корреляционный тензор $B_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\tau)$ имеет векторную структуру [11] ($\mathbf{r}-\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}$)

$$B_{ij}(\mathbf{r},\tau) = B_{ij}^{iso}(\mathbf{r},\tau) + C(r,\tau)\varepsilon_{ijk}r_k, \tag{3}$$

где изотропная часть корреляционного тензора

$$B_{ij}^{iso}(\mathbf{r},\tau) = A(r,\tau)r_ir_j + B(r,\tau)\delta_{ij},$$

а ε_{ijk} — псевдотензор, имеющий значение $\varepsilon_{ijk} = 0$, если индексы i, j, k не все различны, и $\varepsilon_{ijk} = 1$ или $\varepsilon_{ijk} = -1$, если индексы i, j, k все различны и расположены в циклическом или антициклическом порядке (см., например, [11]).

Изотропной части корреляционного тензора соответствует пространственный спектральный тензор вида

$$E_{ij}(\mathbf{k},\tau) = E_{ij}^s(\mathbf{k},\tau) + E_{ij}^p(\mathbf{k},\tau),$$

где спектральные составляющие тензора поля скоростей имеют следующую структуру:

$$E_{ij}^s(\mathbf{k},\tau) = E^s(k,\tau)\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}\right),$$

$$E_{ij}^p(\mathbf{k},\tau) = E^p(k,\tau)\frac{k_ik_j}{k^2}.$$

Здесь через $E^s(k,\tau)$ и $E^p(k,\tau)$ обозначены соответственно соленоидальная и потенциальная компоненты спектральной плотности поля скоростей.

Произведение двух псевдотензоров ε уже является тензором и в этом случае имеет место равенство (по повторяющимся индексам предполагается суммирование)

$$\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{mpq} = (d-2)\left(\delta_{ip}\delta_{lq} - \delta_{iq}\delta_{lp}\right). \tag{4}$$

В двумерном случае свертка (4) обращается в нуль. Через этот тензор определяется поле вихря скорости

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t) = \operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}(\mathbf{r},t),$$

а для его корреляционного тензора и спектра можно получить выражения [11]

$$\begin{gathered}\langle\omega_i(\mathbf{r},t)\omega_i(\mathbf{r},t_1)\rangle = -\Delta_\mathbf{r}B_{ll}(\mathbf{0},\tau) = \\ = -\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\Delta_\mathbf{r}\mathbf{u}(\mathbf{r},t_1)\rangle, \\ \Omega_{ii}(\mathbf{k},\tau) = \mathbf{k}^2E_{ii}(\mathbf{k},\tau).\end{gathered} \tag{5}$$

Для двумерного случая (плоскопараллельный поток жидкости) вектор $\omega_i(\mathbf{r},t)$ имеет всего одну компоненту, ортогональную вектору скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$.

В случае отсутствия отражательной симметрии аналогично вычислению дисперсии и спектра поля вихря можно получить и среднее значение спиральности поля скорости:

$$\langle\chi(\mathbf{r},t)\rangle = \langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)\rangle = 6C(0,0).$$

Для плоскопараллельного потока жидкости (двумерный случай) очевидно, что спиральность равна нулю.

Формула (5) справедлива не только для стационарного во времени случайного поля скорости, но и для диссипации нестационарного случайного магнитного поля, определяемой равенством

$$D(t) = \left\langle[\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r},t)]^2\right\rangle = \\ = -\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}^2}\langle\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\mathbf{H}(\mathbf{r}_1,t)\rangle_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}} = \\ = -\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}^2}\langle W_{ii}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t)\rangle_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}} = -\langle W_{ii;jj}(\mathbf{0},t)\rangle, \tag{6}$$

где функция $W_{ik}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t) = H_i(\mathbf{r},t)H_k(\mathbf{r}_1,t)$, а производные этой функции обозначаются дополнительными индексами после знака «;».

Определим теперь функцию $B_{ij}(\mathbf{r})$ как интеграл по времени от корреляционной функции (3), т. е.

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = \int\limits_0^\infty d\tau B_{ij}(\mathbf{r},\tau) = B_{ij}^{iso}(\mathbf{r}) + C(r)\varepsilon_{ijk}r_k, \quad (7)$$

тогда величина $D_0\delta_{ij}/d = B_{ij}(\mathbf{0})$ и, следовательно, величина

$$D_0 = B_{ii}(\mathbf{0}) = \tau_0\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \int d\mathbf{k}\left[(d-1)\,E^s(k) + E^p(k)\right]$$

определяет временной радиус корреляции поля скоростей — τ_0, где $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = B_{ii}(\mathbf{0},0) = \left\langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r},t)\right\rangle$ — его дисперсия и

$$E^s(k) = \int\limits_0^\infty d\tau\, E^s(k,\tau), \quad E^p(k) = \int\limits_0^\infty d\tau\, E^p(k,\tau). \quad (8)$$

Дополнительно будем считать поле $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ дельта-коррелированным во времени случайным полем. Условие применимости такого приближения имеет вид

$$\sigma_{\mathbf{u}}^2\tau_0^2/l_0^2 \ll 1, \quad \tau_0 \ll t, \quad (9)$$

где l_0 — пространственный радиус корреляции поля скоростей. Ясно, что основные (принципиальные) особенности диффузии не зависят от выбора модели среды. Это приближение соответствует аппроксимации корреляционной функции поля скоростей выражением

$$B_{ij}(\mathbf{r},\tau) = 2B_{ij}(\mathbf{r})\delta(\tau). \quad (10)$$

Вычисления, связанные с пространственными производными поля скоростей, для корреляционной функции (7) существенно упрощаются. Так, в этом случае

$$\frac{\partial B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_k} = C(0)\varepsilon_{ijk}, \quad (11)$$

$$-\frac{\partial^2 B_{ij}(0)}{\partial r_k \partial r_l} = \frac{D^s}{d(d+2)}\left[(d+1)\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}\right] + \frac{D^p}{d(d+2)}\left[\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}\right], \quad (12)$$

$$\frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_j} = -2\alpha\left(\varepsilon_{kpj}\delta_{nm} + \varepsilon_{kpm}\delta_{nj} + \varepsilon_{kpn}\delta_{mj}\right) \quad (13)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{r}^2 \partial r_j} = -2\alpha(d+2)\varepsilon_{kpj},$$

где

$$\begin{aligned} D^s &= \int d\mathbf{k}\, k^2 E^s(k) = \\ &= \frac{1}{d-1}\int\limits_0^\infty d\tau\, \langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t+\tau)\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)\rangle, \\ D^p &= \int d\mathbf{k}\, k^2 E^p(k) = \\ &= \int\limits_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r},t+\tau)}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\right\rangle, \\ C(r) &= C(0) - \alpha\mathbf{r}^2, \end{aligned} \quad (14)$$

а $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)$ — вихрь поля скорости.

Отметим, что случай несжимаемой среды соответствует условию $D^p = 0$, а случай слабосжимаемой среды — условию $D^p \ll D^s$.

При усреднении различного рода динамических систем приходится расщеплять корреляции гауссова случайного поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ с функционалами от него. Такими функционалами являются, например, сами решения рассматриваемых динамических систем. Для дельта-коррелированного во времени случайного гауссова поля с корреляционной функцией (10) для расщепления корреляции будем использовать формулу Фурутцу – Новикова (см., например, монографии [2–5]), которая имеет вид

$$\langle u_i(\mathbf{r},t)F[u;\mathbf{r},t]\rangle = \int d\mathbf{R}\; B_{iq}(\mathbf{r}-\mathbf{R})\left\langle \frac{\delta F[u;\mathbf{r},t]}{\delta u_q(\mathbf{R},t-0)}\right\rangle. \quad (15)$$

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАДИЕНТА ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ В СЛУЧАЙНОМ ПОТОКЕ

2.1. Пространственная корреляционная функция поля плотности

Исходя из уравнения (1), прежде всего выпишем стохастическое динамическое уравнение для функции $R(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t) = \rho(\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{r}_1,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}R(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t) = \\ = -\left(\frac{\partial}{\partial r_i}u_i(\mathbf{r},t)+\frac{\partial}{\partial r_{1k}}u_k(\mathbf{r}_1,t)\right)R(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t)+ \\ +\mu_\rho\left(\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}_1^2}\right)R(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t). \quad (16)$$

Усредним уравнение (16) по ансамблю реализаций случайного поля скоростей. Для пространственной корреляционной функции

$$\langle R(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t)\rangle = \langle R(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t)\rangle = \langle\rho(\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{r}_1,t)\rangle$$

с учетом формулы Фурутцу – Новикова (15) получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle R(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t)\rangle = \\ = -\int d\mathbf{R}\left(\frac{\partial}{\partial r_i}B_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{R})+\frac{\partial}{\partial r_{1k}}B_{kj}(\mathbf{r}_1-\mathbf{R})\right)\times \\ \times\left\langle\frac{\delta R(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t)}{\delta u_j(\mathbf{R},t-0)}\right\rangle+2\mu_\rho\langle R_{kk}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t)\rangle, \quad (17)$$

где

$$\langle R_{kk}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t)\rangle = \frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}^2}\langle R(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t)\rangle,$$

т. е. индексами у функции $\langle R(\mathbf{r},t)\rangle$ обозначены пространственные производные. При этом очевидно, что величина $\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\rangle<0$.

Для вычисления вариационной производной перепишем уравнение (16), опуская член с молекулярной диффузией, который не зависит явным образом от поля скоростей:

$$\frac{\partial}{\partial t}R(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t) = \\ = -\left(u_i(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial r_i}+u_k(\mathbf{r}_1,t)\frac{\partial}{\partial r_{1k}}\right)R(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t)- \\ -\left(\frac{\partial u_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_i}+\frac{\partial u_k(\mathbf{r}_1,t)}{\partial r_{1k}}\right)R(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t),$$

откуда следует равенство

$$\left\langle\frac{\delta R(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t)}{\delta u_j(\mathbf{R},t-0)}\right\rangle = \\ = -\left(\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R})\frac{\partial}{\partial r_j}+\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{R})\frac{\partial}{\partial r_{1j}}\right)\langle R(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t)\rangle- \\ -\left(\frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R})}{\partial r_j}+\frac{\partial\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{R})}{\partial r_{1j}}\right)\langle R(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t)\rangle. \quad (18)$$

Подставляя теперь выражение (18) в формулу (17) и интегрируя по $\mathbf{R}$, получаем уравнение в частных производных для корреляционной функции поля плотности, которое можно переписать в виде $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1\to\mathbf{r})$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle R(\mathbf{r},t)\rangle = -\left(\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_j\partial r_i}+\frac{\partial^2 B_{ji}(\mathbf{r})}{\partial r_j\partial r_i}\right)\langle R(\mathbf{r},t)\rangle- \\ -\left(\frac{\partial B_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_i}+\frac{\partial B_{ji}(\mathbf{r})}{\partial r_i}\right)\langle R_j(\mathbf{r},t)\rangle- \\ -\left(\frac{\partial B_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_j}+\frac{\partial B_{ji}(\mathbf{r})}{\partial r_j}\right)\langle R_i(\mathbf{r},t)\rangle+ \\ +\left[2B_{ij}(\mathbf{0})-B_{ij}(\mathbf{r})-B_{ji}(\mathbf{r})\right]\langle R_{ji}(\mathbf{r},t)\rangle+ \\ +2\mu_\rho\langle R_{kk}(\mathbf{r},t)\rangle. \quad (19)$$

Отметим, что это уравнение может иметь стационарное решение $\langle R(r)\rangle=\langle R(r,\infty)\rangle$ с краевым условием $\langle R(\infty)\rangle=\rho_0^2$ вида [12, 13]

$$\langle R(r)\rangle = \rho_0^2\exp\left\{\int\limits_r^\infty dr'\frac{\partial D_{ii}(r')/\partial r'}{2\mu+r'_ir'_jD_{ij}(\mathbf{r}')/r'^2}\right\},$$

где

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = 2\left[B_{ij}(0)-B_{ij}(\mathbf{r})\right]$$

— структурная матрица векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$.

Полагая теперь $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ в уравнении (19), с учетом формулы (12) приходим к незамкнутому уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-2D^p\right)\langle R(\mathbf{0},t)\rangle = 2\mu_\rho\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\rangle,$$

$$\langle R(\mathbf{0},0)\rangle = \rho_0^2,$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\langle R(\mathbf{0},t)\rangle}{\rho_0^2} = 2D^p+\frac{2\mu_\rho}{\langle R(\mathbf{0},t)\rangle}\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\rangle \quad (20)$$

при нулевом начальном условии.

Для получения приближенного решения уравнения (20) можно построить приближенную процедуру разложения его правой части в ряд по малому параметру μ_ρ. Для этого пометим величины $\langle R(\mathbf{0},t)\rangle$ и $\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\rangle$ индексом «μ», т. е. перепишем уравнение (20) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_\mu}{\rho_0^2} = 2D^p+\frac{2\mu_\rho}{\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_\mu}\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\rangle_\mu.$$

Далее будем искать правую часть в виде ряда по параметру μ. В первом приближении, соответственно, имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_1}{\rho_0^2} = \\ = 2D^p+\frac{2\mu_\rho}{\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_0}\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\rangle_0, \quad (21)$$

где величины с нулевым индексом соответствуют решению задачи без учета эффекта молекулярной диффузии. Таким образом, решение задачи имеет структуру

$$\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_1 = \rho_0^2 \times \\ \times \exp\left\{2D^p t + \int_0^t d\tau \frac{2\mu_\rho}{\langle R(\mathbf{0},\tau)\rangle_0} \langle R_{kk}(\mathbf{0},\tau)\rangle_0\right\}. \quad (22)$$

Отметим, что предложенный подход в идейном плане близок к методу плавных возмущений С. М. Рытова в статистической радиофизике и введению эйконала в физической оптике.

Забегая вперед, отметим, что из-за экспоненциального увеличения со временем всех моментных функций для рассматриваемых задач решение (22) для малых времен будет экспоненциально расти, затем достигнет максимального значения в момент времени t_{max}, соответствующий нулю правой части уравнения (21), а затем быстро устремится к нулю при $t \to \infty$ в соответствии с физическим смыслом рассматриваемой задачи.

Таким образом, решение на начальном этапе, когда можно пренебречь диссипацией, имеет вид

$$\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_0 = \left\langle \rho^2(\mathbf{r},t)\right\rangle_0 = \rho_0^2 e^{2D^p t} \quad (23)$$

и определяется только потенциальной составляющей спектральной функции поля скоростей.

Отметим, что это же решение, естественно, следует из уравнения для одноточечной плотности вероятностей

$$P(\mathbf{r},t;\rho) = \langle \delta\left(\rho(\mathbf{r},t) - \rho\right)\rangle$$

с однородным начальным условием $P(\mathbf{r},0;\rho) = \delta\left(\rho - \rho_0\right)$, которая является логнормальной, не зависит от пространственной координаты $\mathbf{r}$ и описывается уравнением (см., например, монографии [2–5])

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t;\rho) = D^p \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t;\rho).$$

Анализ именно этого уравнения на основе идей статистической топографии показал, что поле плотности в случайном дивергентном поле скоростей кластеризуется с вероятностью единица.

Из структуры уравнения (19) следует, что спиральность поля скоростей не сказывается на статистике градиента поля плотности, так как во все коэффициенты этого уравнения входит только симметричная матрица $[B_{ij}(\mathbf{r}) + B_{ji}(\mathbf{r})]$. Для такой матрицы все нечетные производные по $\mathbf{r}$ обращаются в нуль при $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ (см. равенство (13)). Нечетные производные по $\mathbf{r}$ функции $\langle R(\mathbf{r},t)\rangle$ при $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ также обращаются в нуль. Учитывая эти обстоятельства сразу же можно сказать, что спиральность градиента плотности примеси равна нулю, так как она связана с величиной

$$\left\langle \frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial r_i} \frac{\partial^2\rho(\mathbf{r},t)}{\partial r_j \partial r_k}\right\rangle = \langle R_{ijk}(\mathbf{0},t)\rangle.$$

2.2. Пространственный корреляционный тензор градиента поля плотности и ее диссипация

Введем вектор градиента поля плотности

$$p_k(\mathbf{r},t) = \frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial r_k},$$

тогда пространственный корреляционный тензор градиента поля плотности

$$P_{kl}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t) = \left\langle \frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial r_k} \frac{\partial\rho(\mathbf{r}_1,t)}{\partial r_{1l}}\right\rangle \equiv -\langle R_{kl}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t)\rangle$$

и дисперсия градиента поля плотности определяется равенством

$$\sigma_{\mathbf{p}}^2(t) = \left\langle \left(\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\right)^2\right\rangle \equiv -\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\rangle. \quad (24)$$

Для нахождения эволюции во времени пространственного корреляционного тензора градиента поля плотности продифференцируем уравнение (19) по r_k. В результате получаем уравнение ($\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\langle R_k(\mathbf{r},t)\rangle_0 = \\
= -\left(\frac{\partial^3 B_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_j \partial r_k} + \frac{\partial^3 B_{ji}(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_j \partial r_k}\right)\langle R(\mathbf{r},t)\rangle_0 - \\
- \left(\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_k} + \frac{\partial^2 B_{ji}(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_k}\right)\langle R_j(\mathbf{r},t)\rangle_0 - \\
- \left(\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_j \partial r_k} + \frac{\partial^2 B_{ji}(\mathbf{r})}{\partial r_j \partial r_k}\right)\langle R_i(\mathbf{r},t)\rangle_0 - \\
- \left(\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_j} + \frac{\partial^2 B_{ji}(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_j}\right)\langle R_k(\mathbf{r},t)\rangle_0 - \\
- \left(\frac{\partial B_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_k} + \frac{\partial B_{ji}(\mathbf{r})}{\partial r_k}\right)\langle R_{ji}(\mathbf{r},t)\rangle_0 - \\
- \left(\frac{\partial B_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_i} + \frac{\partial B_{ji}(\mathbf{r})}{\partial r_i}\right)\langle R_{jk}(\mathbf{r},t)\rangle_0 - \\
- \left(\frac{\partial B_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_j} + \frac{\partial B_{ji}(\mathbf{r})}{\partial r_j}\right)\langle R_{ik}(\mathbf{r},t)\rangle_0 - \\
- \left[2B_{ij}(\mathbf{0}) - B_{ij}(\mathbf{r}) - B_{ji}(\mathbf{r})\right]\langle R_{jik}(\mathbf{r},t)\rangle_0.
\end{aligned}$$

Вектор $\langle R_k(\mathbf{r},t)\rangle_0$ описывает пространственную корреляцию поля плотности и его градиента и при $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ все члены этого уравнения тождественно обращаются в нуль.

Продифференцируем теперь это уравнение по r_l и положим $\mathbf{r}=\mathbf{0}$. В результате получаем уравнение

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle R_{kl}(\mathbf{0},t)\rangle_0 &= -2\frac{\partial^4 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_i\partial r_j\partial r_k\partial r_l}\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_0 - \\ &- 2\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_i\partial r_k}\langle R_{jl}(\mathbf{0},t)\rangle_0 - 2\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_i\partial r_l}\langle R_{jk}(\mathbf{0},t)\rangle_0 - \\ &- 2\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_k\partial r_l}\langle R_{ji}(\mathbf{0},t)\rangle_0 - 2\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_i\partial r_j}\langle R_{kl}(\mathbf{0},t)\rangle_0 - \\ &- 2\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_j\partial r_k}\langle R_{il}(\mathbf{0},t)\rangle_0 - 2\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_j\partial r_l}\langle R_{ik}(\mathbf{0},t)\rangle_0,\end{aligned}$$

которое с учетом равенства (12) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle R_{kl}(\mathbf{0},t)\rangle_0 &= -2\frac{\partial^4 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_i\partial r_j\partial r_k\partial r_l}\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_0 + \\ &+ 2\frac{(4+d)\,D^p}{d}\langle R_{kl}(\mathbf{0},t)\rangle_0 + \\ &+ 2\frac{D^s}{d(d+2)}\left[(d+1)\delta_{kl}\langle R_{ii}(\mathbf{0},t)\rangle_0 - 2\langle R_{kl}(\mathbf{0},t)\rangle_0\right] + \\ &+ 2\frac{D^p}{d(d+2)}\left[\delta_{kl}\langle R_{ii}(\mathbf{0},t)\rangle_0 + 2\langle R_{kl}(\mathbf{0},t)\rangle_0\right].\end{aligned}$$

Учтем, что источник генерации поля градиента

$$\begin{aligned}2\frac{\partial^4 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_i\partial r_j\partial r_k\partial r_l} &= \\ &= -\frac{2}{d}\int\limits_0^\infty d\tau\left\langle\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\Delta\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r},t-\tau)}{\partial\mathbf{r}}\right\rangle\delta_{kl} = \\ &= \frac{1}{d}D_\rho^{(4)}\delta_{kl},\quad D_\rho^{(4)}>0,\end{aligned}$$

является изотропным, тогда тензор $\langle R_{kl}(\mathbf{0},t)\rangle$ также изотропен, т. е.

$$\langle R_{kl}(\mathbf{0},t)\rangle_0 = \frac{1}{d}\langle R_{ii}(\mathbf{0},t)\rangle_0\,\delta_{kl}.$$

Следовательно, для величины дисперсии градиента поля плотности (24) получаем уравнение

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\rangle_0 &= -D_\rho^{(4)}\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_0 + \\ &+ 2\frac{D^s(d-1)+(d+5)\,D^p}{d}\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\rangle_0,\end{aligned}\qquad(25)$$

где второй момент поля плотности $\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_0$ описывается равенством (23).

Решение уравнения (25) имеет вид

$$\sigma^2_{\mathbf{p}}(t) = \frac{D_\rho^{(4)}\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_0}{A}\left[e^{At}-1\right],\qquad(26)$$

где параметр

$$A = 2\frac{D^s(d-1)+5D^p}{d}.$$

Отметим, что хотя это решение и генерируется потенциальной составляющей спектральной плотности случайного поля скоростей, в случае слабой сжимаемости ($D^p \ll D^s$) инкремент нарастания экспоненциального роста решения во времени совпадает с инкрементом дисперсии градиента поля плотности в несжимаемом потоке жидкости с неоднородным начальным распределением плотности, так как в этом случае параметр

$$A = 2\frac{D^s(d-1)}{d}$$

(см., например, монографии [2–5]).

Вернемся теперь к выражению (22), которое с помощью формулы (26) можно переписать в окончательном виде как

$$\begin{aligned}&\left\langle\rho^2(t)\right\rangle_1 = \\ &= \rho_0^2\exp\left\{2D^pt - 2\frac{\mu_\rho D_\rho^{(4)}}{A^2}\left[e^{At}-1-At\right]\right\}.\end{aligned}\qquad(27)$$

Это решение имеет максимум при

$$At_{max} \approx \ln\frac{AD^p}{\mu_\rho D_\rho^{(4)}},$$

при этом величина $\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_1$ достигает значения

$$\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_{1max} \approx \rho_0^2\left(\frac{AD^p}{\mu_\rho D_\rho^{(4)}}\right)^{2D^p/A}\exp\left\{-\frac{2D^p}{A}\right\},$$

а условием возможности пренебрежения эффектом действия молекулярной диффузии является условие

$$t \ll t_{max}.$$

При $t\to\infty$ функция $\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_1$ очень быстро стремится к нулю.

В заключение этого раздела покажем, что предложенный метод описания динамики статистических характеристик во времени с учетом молекулярной диффузии справедлив и в более общих случаях, например, для описания динамики дисперсии градиента плотности (24). Чтобы описать эту динамику, необходимо дополнить уравнение (25) членом с молекулярной диффузией и вместо индекса «0» написать индекс «μ». В результате мы переходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\right\rangle_\mu = -D_\rho^{(4)}\left\langle R(\mathbf{0},t)\right\rangle_\mu + \\ + B\left\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\right\rangle_\mu + 2\mu_\rho\left\langle R_{kkll}(\mathbf{0},t)\right\rangle_\mu,$$

где коэффициент

$$B = 2\frac{D^s(d-1)+(d+5)\,D^p}{d}.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\right\rangle_\mu = -D_\rho^{(4)}\left\langle R(\mathbf{0},t)\right\rangle_\mu + \\ + \left[B + 2\mu_\rho\frac{\left\langle R_{kkll}(\mathbf{0},t)\right\rangle_\mu}{\left\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\right\rangle_\mu}\right]\left\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\right\rangle_\mu.$$

Тогда его решение имеет вид

$$\left\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\right\rangle_\mu = -D_\rho^{(4)}\int\limits_0^t dt_2\left\langle R(\mathbf{0},t_2)\right\rangle_\mu \times \\ \times\exp\left\{\int\limits_{t_2}^t dt_1\left[B + 2\mu_\rho\frac{\left\langle R_{kkll}(\mathbf{0},t_1)\right\rangle_\mu}{\left\langle R_{kk}(\mathbf{0},t_1\right\rangle_\mu}\right]\right\}$$

и в первом приближении по коэффициенту молекулярной диффузии получаем выражение

$$\left\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\right\rangle_1 = -D_\rho^{(4)}\int\limits_0^t dt_2\left\langle R(\mathbf{0},t_2)\right\rangle_1 \times \\ \times\exp\left\{\int\limits_{t_2}^t dt_1\left[B + 2\mu_\rho\frac{\left\langle R_{kkll}(\mathbf{0},t_1)\right\rangle_0}{\left\langle R_{kk}(\mathbf{0},t_1\right\rangle_0}\right]\right\},$$

где величина $\left\langle R(\mathbf{0},t)\right\rangle_1$ описывается равенством (27), а для величины $\left\langle R_{kkll}(\mathbf{0},t)\right\rangle_0$ следует стандартным образом написать уравнение без учета молекулярной диффузии.

3. ОДНОТОЧЕЧНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЯХ СКОРОСТЕЙ

В общем случае дивергентного случайного поля скоростей, как упоминалось выше, можно вычислить такие одноточечные статистические характеристики магнитного поля и его энергии, как плотности вероятностей [10]. В принципе, эту методику можно использовать и для вычисления различных величин, связанных с пространственными производными магнитного поля без учета молекулярной диффузии. Однако соответствующие уравнения будут очень громоздкими и из них невозможно будет получить какие-либо следствия.

При анализе различных моментных функций мы уже можем учитывать коэффициент молекулярной диффузии. Однако в общем случае дивергентного поля скоростей все уравнения будут чрезвычайно громоздкими. Поэтому при дальнейшем анализе статистических характеристик пространственных производных магнитного поля мы ограничимся бездивергентным полем скоростей ($\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = 0$), т. е. турбулентный поток жидкости будет считаться несжимаемым. Учет сжимаемости лишь меняет коэффициенты этого уравнения, но не основную тенденцию поведения моментных функций.

3.1. Уравнение для пространственной корреляционной функции

Перепишем векторное уравнение (2) в координатном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}H_i(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial r_k}u_k(\mathbf{r},t)H_i(\mathbf{r},t) + \\ + \frac{\partial u_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}H_k(\mathbf{r},t) + \mu_H\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}^2}H_i(\mathbf{r},t),$$

и введем функцию

$$W_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1;t) = H_i(\mathbf{r},t)H_j(\mathbf{r}_1,t),$$

для которой получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}W_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1;t) = \\ = \left\{-\left(\frac{\partial}{\partial r_k}u_k(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial r_{1k}}u_k(\mathbf{r}_1,t)\right)\delta_{in}\delta_{jm} + \right. \\ \left. + \frac{\partial u_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_n}\delta_{jm} + \frac{\partial u_j(\mathbf{r}_1,t)}{\partial r_{1m}}\delta_{in}\right\}W_{nm}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1;t) + \\ + \mu_H\left[\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}^2} + \frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}_1^2}\right]W_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1;t). \quad (28)$$

Это уравнение можно переписать в силу соленоидальности поля скоростей в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{nm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; t) = \\ = \left\{ -\left(u_k(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_k} + u_k(\mathbf{r}_1, t) \frac{\partial}{\partial r_{1k}} \right) \delta_{ns} \delta_{mt} + \right. \\ \left. + \frac{\partial u_n(\mathbf{r}, t)}{\partial r_s} \delta_{mt} + \frac{\partial u_m(\mathbf{r}_1, t)}{\partial r_{1t}} \delta_{ns} \right\} W_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; t) + \\ + \mu_H \left[\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_1^2} \right] W_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; t). \quad (29)$$

Уравнение (28) удобно для непосредственного усреднения, а уравнение (29) — для вычисления вариационной производной.

Считаем далее, как и ранее, поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ гауссовым однородным (но, вообще говоря, не изотропным) и стационарным дельта-коррелированным полем во времени с корреляционной функцией (10) и для расщепления корреляции воспользуемся формулой Фурутцу – Новикова (15). Тогда, усредняя уравнение (28) по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и используя выражение для вариационной производной

$$\left\langle \frac{\delta W_{nm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; t)}{\delta u_q(\mathbf{R}, t-0)} \right\rangle = \\ = \left\{ -\left(\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \frac{\partial}{\partial r_q} + \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}) \frac{\partial}{\partial r_{1q}} \right) \delta_{ns} \delta_{mt} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})}{\partial r_s} \delta_{nq} \delta_{mt} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R})}{\partial r_{1t}} \delta_{mq} \delta_{ns} \right\} \times \\ \times \langle W_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; t) \rangle,$$

вытекающее из уравнения (29), получаем уравнение в частных производных ($\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W_{ij}(\mathbf{r}; t) \rangle = -2 \frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_k \partial r_m} \langle W_{km}(\mathbf{r}; t) \rangle - \\ - 2 \left[\frac{\partial B_{ik}(\mathbf{0})}{\partial r_s} - \frac{\partial B_{ik}(\mathbf{r})}{\partial r_s} \right] \frac{\partial}{\partial r_k} \langle W_{sj}(\mathbf{r}; t) \rangle - \\ - 2 \left[\frac{\partial B_{kj}(\mathbf{0})}{\partial r_s} - \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r})}{\partial r_s} \right] \frac{\partial}{\partial r_k} \langle W_{is}(\mathbf{r}; t) \rangle + \\ + \left[2B_{kq}(\mathbf{0}) - B_{kq}(\mathbf{r}) - B_{qk}(\mathbf{r}) \right] \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial r_q \partial r_k} \langle W_{ij}(\mathbf{r}; t) \rangle + 2\mu_H \langle W_{ij;ss}(\mathbf{r}; t) \rangle, \quad (30)$$

где через $\langle W_{ij;ss}(\mathbf{r}; t) \rangle$ обозначен диссипативный тензор:

$$\langle W_{ij;ss}(\mathbf{r}; t) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \langle W_{ij}(\mathbf{r}; t) \rangle.$$

3.1.1. Одноточечная корреляция магнитного поля и его средняя энергия

Получим теперь уравнение для одноточечной корреляции, полагая в уравнении (30) $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W_{ij}(t) \rangle = -2 \frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_k \partial r_m} \langle W_{km}(t) \rangle + \\ + 2\mu_H \langle W_{ij;ss}(\mathbf{0}; t) \rangle.$$

Учитывая теперь соленоидальную часть равенства (12) ($D^p = 0$), приходим к незамкнутому уравнению для корреляции вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W_{ij}(t) \rangle = \frac{2(d+1)D^s}{d(d+2)} \delta_{ij} \langle E(t) \rangle - \\ - \frac{4D^s}{d(d+2)} \langle W_{ij}(t) \rangle + 2\mu_H \langle W_{ij;ss}(\mathbf{0}; t) \rangle, \quad (31)$$

где $\langle E(t) \rangle = \langle \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ — средняя энергия магнитного поля. Полагая в уравнении (31) $i = j$, получаем уравнение для средней энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle E(t) \rangle = \frac{2(d-1)D^s}{d} \langle E(t) \rangle - 2\mu_H D(t),$$

где величина $D(t)$, определяемая по формуле (6), описывает диссипацию средней энергии. Так же, как и в случае анализа статистических характеристик поля плотности, пометим все величины символом μ и перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\langle E(t) \rangle_\mu}{E_0} = \frac{2(d-1)D^s}{d} - \frac{2\mu_H}{\langle E(t) \rangle_\mu} D_\mu(t).$$

Далее будем искать правую часть этого уравнения в виде ряда по параметру μ. В первом приближении имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\langle E(t) \rangle_1}{E_0} = \frac{2(d-1)D^s}{d} - \frac{2\mu_H}{\langle E(t) \rangle_0} D_0(t),$$

где величины с нулевым индексом соответствуют решению задачи без эффекта молекулярной диффузии. Таким образом, решение задачи в первом приближении имеет структуру

$$\langle E(t) \rangle_1 = E_0 \times \\ \times \exp \left\{ \frac{2(d-1)D^s t}{d} - \int_0^t d\tau \frac{2\mu_H}{\langle E(\tau) \rangle_0} D_0(\tau) \right\}. \quad (32)$$

Решение задачи на начальном этапе эволюции, когда можно пренебречь диссипацией, экспоненциально возрастает:

$$\langle E(t) \rangle_0 = E_0 \exp \left\{ \frac{2(d-1)}{d} D^s t \right\}, \quad (33)$$

а уравнение для корреляции (31) в отсутствие молекулярной диффузии переходит в уравнение с заданным источником, решение которого имеет вид

$$\frac{\langle W_{ij}(t)\rangle_0}{\langle E(t)\rangle_0} = \frac{1}{d}\delta_{ij} + \left(\frac{W_{ij}(0)}{E_0} - \frac{1}{d}\delta_{ij}\right) \times \\ \times \exp\left\{-2\left(\frac{d+1}{d+2}\right) D^s t\right\}, \quad (34)$$

т. е. происходит быстрая изотропизация магнитного поля в несжимаемом турбулентном потоке жидкости.

Отметим, что в работе [10] было получено уравнение для одноточечной плотности вероятностей магнитного поля в общем случае сжимаемого случайного потока:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{r},t;\mathbf{H}) = \left\{D_1\frac{\partial}{\partial H_l}\frac{\partial}{\partial H_k}H_l H_k + \right. \\ \left. + D_2\frac{\partial}{\partial H_l}\frac{\partial}{\partial H_l}H_k^2\right\} P(\mathbf{r},t;\mathbf{H}), \quad (35)$$

где коэффициенты диффузии

$$D_1 = \frac{\left(d^2-2\right)D^p - 2D^s}{d(d+2)}, \quad D_2 = \frac{(d+1)D^s + D^p}{d(d+2)}.$$

Получим теперь одноточечную корреляцию в этом случае. Умножая уравнение (35) на H_i и H_j, и интегрируя по $\mathbf{H}$, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle W_{ij}(t)\rangle_0 = 2D_1\langle W_{ij}(t)\rangle_0 + 2D_2\delta_{ij}\langle E(t)\rangle_0,$$

откуда следует уравнение для средней энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle E(t)\rangle_0 = 2\frac{d-1}{d}\left(D^s + D^p\right)\langle E(t)\rangle_0,$$

т. е. выражение

$$\langle E(t)\rangle_0 = E_0\exp\left\{2\frac{d-1}{d}\left(D^s+D^p\right)t\right\}. \quad (36)$$

Тогда решение для функции корреляции легко находится и принимает вид

$$\frac{\langle W_{ij}(t)\rangle_0}{\langle E(t)\rangle_0} = \frac{1}{d}\delta_{ij} + \left(\frac{W_{ij}(0)}{E_0} - \frac{1}{d}\delta_{ij}\right) \times \\ \times \exp\left\{-2\frac{(d+1)D^s + D^p}{d+2}t\right\}.$$

Таким образом, наличие сжимаемости случайного потока не только увеличивает рост средней энергии, но и ускоряет изотропизацию магнитного поля.

3.2. О спиральности магнитного поля

Далее мы пренебрегаем молекулярной диффузией и не будем писать нулевой индекс. Получим теперь уравнение для величины

$$\langle W_{kp;j}(\mathbf{r};t)\rangle = \frac{\partial}{\partial r_j}\langle W_{kp}(\mathbf{r};t)\rangle = \\ = \left\langle\frac{\partial H_k(\mathbf{r},t)}{\partial r_j}H_p(\mathbf{r}_1,t)\right\rangle,$$

для того чтобы вычислить спиральность магнитного поля

$$H(t) = \varepsilon_{ijk}\langle W_{ki;j}(\mathbf{0};t)\rangle = \langle\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}\rangle.$$

Перепишем уравнение (30) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle W_{kp}(\mathbf{r};t)\rangle = -2\frac{\partial^2 B_{kp}(\mathbf{r})}{\partial r_n\partial r_m}\langle W_{nm}(\mathbf{r};t)\rangle - \\ - 2\left[\frac{\partial B_{kn}(\mathbf{0})}{\partial r_s} - \frac{\partial B_{kn}(\mathbf{r})}{\partial r_s}\right]\frac{\partial}{\partial r_n}\langle W_{sp}(\mathbf{r};t)\rangle - \\ - 2\left[\frac{\partial B_{np}(\mathbf{0})}{\partial r_s} - \frac{\partial B_{np}(\mathbf{r})}{\partial r_s}\right]\frac{\partial}{\partial r_n}\langle W_{ks}(\mathbf{r};t)\rangle - \\ + \left[2B_{nq}(\mathbf{0}) - B_{nq}(\mathbf{r}) - B_{qn}(\mathbf{r})\right]\frac{\partial^2}{\partial r_q\partial r_n}\langle W_{kp}(\mathbf{r};t)\rangle.$$

Дифференцируя его по r_j, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle W_{kp;j}(\mathbf{r};t)\rangle = -2\frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{r})}{\partial r_n\partial r_m\partial r_j}\langle W_{nm}(\mathbf{r};t)\rangle - \\ - 2\frac{\partial^2 B_{kp}(\mathbf{r})}{\partial r_n\partial r_m}\langle W_{nm;j}(\mathbf{r};t)\rangle + \\ + 2\frac{\partial^2 B_{kn}(\mathbf{r})}{\partial r_m\partial r_j}\langle W_{mp;n}(\mathbf{r};t)\rangle - \\ - 2\left[\frac{\partial B_{kn}(\mathbf{0})}{\partial r_m} - \frac{\partial B_{kn}(\mathbf{r})}{\partial r_m}\right]\frac{\partial}{\partial r_n}\langle W_{mp;j}(\mathbf{r};t)\rangle + \\ + 2\frac{\partial^2 B_{np}(\mathbf{r})}{\partial r_m\partial r_j}\langle W_{km;n}(\mathbf{r};t)\rangle - \\ - 2\left[\frac{\partial B_{np}(\mathbf{0})}{\partial r_m} - \frac{\partial B_{np}(\mathbf{r})}{\partial r_m}\right]\frac{\partial}{\partial r_n}\langle W_{km;j}(\mathbf{r};t)\rangle - \\ - \left[\frac{\partial B_{nq}(\mathbf{r})}{\partial r_j} + \frac{\partial B_{qn}(\mathbf{r})}{\partial r_j}\right]\frac{\partial^2}{\partial r_q\partial r_n}\langle W_{kp}(\mathbf{r};t)\rangle + \\ + \left[2B_{nq}(\mathbf{0}) - B_{nq}(\mathbf{r}) - B_{qn}(\mathbf{r})\right]\frac{\partial^2}{\partial r_q\partial r_n} \times \\ \times \langle W_{kp;j}(\mathbf{r};t)\rangle. \quad (37)$$

Полагая теперь $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, переходим к уравнению для одноточечной корреляции:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle W_{kp;j}(\mathbf{0};t)\right\rangle = -2\frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_j}\left\langle W_{nm}(\mathbf{0};t)\right\rangle - -2\frac{\partial^2 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m}\left\langle W_{nm;j}(\mathbf{0};t)\right\rangle + 2\frac{\partial^2 B_{kn}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_j}\left\langle W_{mp;n}(\mathbf{0};t)\right\rangle + + 2\frac{\partial^2 B_{np}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_j}\left\langle W_{km;n}(\mathbf{0};t)\right\rangle .$$

Учитывая равенство (12) для соленоидальной части корреляционной функции, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle W_{kp;j}(\mathbf{0};t)\right\rangle = -2\frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_j}\left\langle W_{nm}(\mathbf{0};t)\right\rangle + + 4\frac{D^s}{d(d+2)}\left\langle W_{kp;j}(\mathbf{0};t)\right\rangle - 2\frac{(d+1)D^s}{d(d+2)} \times \times \left[\left\langle W_{jp;k}(\mathbf{0};t)\right\rangle + \left\langle W_{kj;p}(\mathbf{0};t)\right\rangle\right].$$

Теперь надо написать уравнение для функции $\langle W_{jp;k}(\mathbf{0};t)\rangle + \langle W_{kj;p}(\mathbf{0};t)\rangle$, которое имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left\langle W_{jp;k}(\mathbf{0};t)\right\rangle + \left\langle W_{kj;p}(\mathbf{0};t)\right\rangle\right] = = -2\left[\frac{\partial^3 B_{jp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_k} + \frac{\partial^3 B_{kj}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_p}\right]\left\langle W_{nm}(\mathbf{0};t)\right\rangle + + \frac{2(d+3)D^s}{d(d+2)}\left[\left\langle W_{jp;k}(\mathbf{0};t)\right\rangle + \left\langle W_{kj;p}(\mathbf{0};t)\right\rangle\right] - - 4\frac{(d+1)D^s}{d(d+2)}\left\langle W_{kp;j}(\mathbf{0};t)\right\rangle .$$

Таким образом, мы приходим к системе уравнений для функций $\langle W_{kp;j}(\mathbf{0};t)\rangle$ и $[\langle W_{jp;k}(\mathbf{0};t)\rangle + \langle W_{kj;p}(\mathbf{0};t)\rangle]$ с нулевыми начальными условиями или к уравнению второго порядка

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2(d+5)D^s}{d(d+2)}\frac{\partial}{\partial t} - 8\frac{(d-1)}{d^2(d+2)}\left[D^s\right]^2\right) \times \times \left\langle W_{kp;j}(\mathbf{0};t)\right\rangle = -2\frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_j} \times \times \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2(d+3)D^s}{d(d+2)}\right)\left\langle W_{nm}(\mathbf{0};t)\right\rangle + + \frac{4(d+1)D^s}{d(d+2)}\left(\frac{\partial^3 B_{jp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_k} + \frac{\partial^3 B_{kj}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_p}\right) \times \times \left\langle W_{nm}(\mathbf{0};t)\right\rangle \tag{38}$$

с источником в правой части, связанным с отсутствием отражательной симметрии.

Введем разложение функции $C(r)$ в корреляционной функции поля скоростей (14): $C(r) = C(0) - -\alpha\mathbf{r}^2 + \ldots$, и воспользуемся равенством (13). Решать уравнение (38) будем, учитывая экспоненциальный рост одноточечной корреляционной функции магнитного поля (33) и (34)

$$\left\langle W_{nm}(\mathbf{0};t)\right\rangle = \frac{1}{d}\delta_{nm}\left\langle E(t)\right\rangle_0 .$$

В этом случае уравнение (38) упрощается и принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2(d+5)D^s}{d(d+2)}\frac{\partial}{\partial t} - 8\frac{(d-1)}{d^2(d+2)}\left[D^s\right]^2\right) \times \times \left\langle W_{kp;j}(\mathbf{0};t)\right\rangle = 8\alpha D^s\frac{(d+3)(d-1)}{d}\varepsilon_{kpj}\left\langle E(t)\right\rangle_0 .$$

Это уравнение можно переписать как

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{4D^s}{d}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2(d-1)D^s}{d(d+2)}\right)\left\langle W_{kp;j}(\mathbf{0};t)\right\rangle = = 8\alpha D^s\frac{(d+3)(d-1)}{d}\varepsilon_{kpj}\left\langle E(t)\right\rangle_0 . \tag{39}$$

Уравнение (39) имеет два характеристических показателя – положительный, соответствующий растущей экспоненте, и отрицательный, соответствующий затухающему решению. Растущее во времени решение уравнения (39) ищем в виде

$$\left\langle W_{kp;j}(\mathbf{0};t)\right\rangle = U(t)\exp\left\{\frac{4D^s}{d}t\right\}.$$

Тогда уравнение для $U(t)$ упрощается и принимает вид «укороченного» уравнения

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = 4\alpha\varepsilon_{kpj}\frac{(d+2)(d-1)(d+3)}{3\,(d+1)} \times \times E_0\exp\left\{\frac{2(d-3)D^s}{d}t\right\}.$$

Зная, что в двумерном случае спиральность равна нулю, в трехмерном случае имеем

$$U(t) = 20\alpha\varepsilon_{kpj}E_0 t.$$

Следовательно, основное экспоненциально растущее решение принимает вид

$$\left\langle W_{kp;j}(\mathbf{0};t)\right\rangle = U(t)\exp\left\{\frac{4D^s}{3}t\right\} = = 20\alpha\varepsilon_{kpj}\left\langle E(t)\right\rangle_0 t. \tag{40}$$

В силу равенства (4) (в трехмерном случае $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = 6$) для спиральности магнитного поля получаем окончательное выражение

$$H_0(t) = 120\alpha\left\langle E(t)\right\rangle_0 t. \tag{41}$$

3.3. О диссипации магнитного поля

Диссипация магнитного поля определяется выражением (6) и для ее получения необходимо вывести уравнение для величины

$$\langle W_{kp;js}(\mathbf{0};t)\rangle = \frac{\partial}{\partial r_s}\langle W_{kp;j}(\mathbf{0};t)\rangle = = \left\langle \frac{\partial H_k(\mathbf{r},t)}{\partial r_s \partial r_j} H_p(\mathbf{r}_1,t)\right\rangle_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}.$$

Дифференцируя уравнение (37) по r_s и полагая $\mathbf{r}=0$, получаем уравнение для одноточечной корреляции

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\langle W_{kp;js}(\mathbf{0};t)\rangle &= -2\frac{\partial^4 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_j \partial r_s}\langle W_{nm}(\mathbf{0};t)\rangle - \\
&- 2\frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_j}\langle W_{nm;s}(\mathbf{0};t)\rangle - \\
&- 2\frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_s}\langle W_{nm;j}(\mathbf{0};t)\rangle + \\
&+ 2\frac{\partial^3 B_{kn}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_j \partial r_s}\langle W_{mp;n}(\mathbf{0};t)\rangle + \\
&+ 2\frac{\partial^3 B_{np}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_j \partial r_s}\langle W_{km;n}(\mathbf{0};t)\rangle - \\
&- 2\frac{\partial^2 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m}\langle W_{nm;js}(\mathbf{0};t)\rangle + \\
&+ 2\frac{\partial^2 B_{kn}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_j}\langle W_{mp;ns}(\mathbf{0};t)\rangle + \\
&+ 2\frac{\partial^2 B_{kn}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_s}\langle W_{mp;jn}(\mathbf{0};t)\rangle + \\
&+ 2\frac{\partial^2 B_{np}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_j}\langle W_{km;ns}(\mathbf{0};t)\rangle + \\
&+ 2\frac{\partial^2 B_{np}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_s}\langle W_{km;jn}(\mathbf{0};t)\rangle - \\
&- 2\frac{\partial^2 B_{qn}(\mathbf{0})}{\partial r_j \partial r_s}\langle W_{kp;qn}(\mathbf{0};t)\rangle .
\end{aligned}$$

Свернем все функции по индексам $k=p$ и $j=s$ и учтем формулу (12) для несжимаемого потока жидкости. В результате приходим к уравнению вида

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\langle W_{kk;ss}(\mathbf{0};t)\rangle &= \\
&= -2\frac{\partial^4 B_{kk}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_s \partial r_s}\langle W_{nm}(\mathbf{0};t)\rangle - \\
&- 4\frac{\partial^3 B_{kk}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_s}\langle W_{nm;s}(\mathbf{0};t)\rangle + \\
&+ 2\frac{\partial^3 B_{kn}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_s \partial r_s}\langle W_{mk;n}(\mathbf{0};t)\rangle + \\
&+ 2\frac{\partial^3 B_{nk}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_s \partial r_s}\langle W_{km;n}(\mathbf{0};t)\rangle + \\
&+ \frac{4\,(d+1)\,D^s}{d+2}\langle W_{mm;ss}(\mathbf{0};t)\rangle .
\end{aligned}$$

Теперь ограничимся источниками возбуждения, экспоненциально растущими во времени,

$$\begin{aligned}
&-2\frac{\partial^4 B_{kk}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_s \partial r_s}\langle W_{nm}(\mathbf{0};t)\rangle_0 = \\
&= -2\frac{\partial^4 B_{kk}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_n \partial r_s \partial r_s}\langle E(t)\rangle_0 = \\
&= -2\int\limits_0^\infty d\tau\,\langle[\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t+\tau)]\,[\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)]\rangle\,\langle E(t)\rangle_0 = \\
&= -2D_H^{(4)}\langle E(t)\rangle_0 ,
\end{aligned}$$

где $D_H^{(4)} = \int d\mathbf{k}\,\mathbf{k}^4 E^s(k)$.

Рассмотрим теперь члены, связанные со спиральностью, отличные от нуля только в трехмерном случае. Учитывая формулы (40) и (4), получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{4\,(d+1)\,D^s}{d+2}\right)\langle W_{kk;ss}(\mathbf{0};t)\rangle = = -2D_H^{(4)}\langle E(t)\rangle_0 - 4800(d-2)\alpha^2\langle E(t)\rangle_0\, t,$$

которое можно переписать, согласно формуле (6), для диссипации $D_0(t)$ в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right) D_0(t) = = \left[2D_H^{(4)} + 4800(d-2)\alpha^2\frac{\partial}{\partial g}\right] E_0 e^{gt}. \quad (42)$$

Здесь параметры

$$A = \frac{4\,(d+1)\,D^s}{d+2}, \quad g = \frac{2(d-1)}{d}D^s$$

и мы включили в уравнение коэффициент $d-2$, подчеркивающий, что соответствующий член в уравнении исчезает в двумерном случае.

Интегрируя уравнение (42), получаем выражение для диссипации:

$$D_0(t) = 2D_H^{(4)} \langle E(t) \rangle_0 \frac{1}{A-g} \left[e^{(A-g)t} - 1 \right] + \\ + 4800(d-2)\alpha^2 \langle E(t) \rangle_0 \frac{1}{(A-g)^2} \times \\ \times \left[e^{(A-g)t} - 1 - (A-g)\, t \right],$$

где положительный параметр

$$A - g = \frac{2\left(d^2 + d + 2\right) D^s}{d(d+2)}.$$

Оставляя теперь только растущие экспоненты, получаем окончательное выражение для эволюции диссипации во времени:

$$D_0(t) \approx \left[2D_H^{(4)} + \frac{4800(d-2)\alpha^2}{A-g} \right] \times \\ \times \frac{\langle E(t) \rangle_0}{A-g} e^{(A-g)t}. \quad (43)$$

В трехмерном случае $d = 3$ и, следовательно,

$$D_0^{(3)}(t) \approx \left[2D_H^{(4)} + 2571 \frac{\alpha^2}{D^s} \right] \frac{15 \langle E(t) \rangle_0}{28 D^s} \times \\ \times \exp\left\{ \frac{28}{15} D^s t \right\}. \quad (44)$$

Из структуры трехмерного решения видно, что диссипация магнитного поля для больших времен определяется спиральностью поля скоростей, а при ее отсутствии — средней энергией магнитного поля (33).

В двумерном же случае $d = 2$ и спиральность отсутствует, следовательно

$$D_0^{(2)}(t) \approx \frac{D_H^{(4)}}{D^s} \langle E(t) \rangle_0 e^{D^s t}. \quad (45)$$

В этом случае диссипация энергии определяется только самой энергией магнитного поля.

Из формул (44) и (45) видно, что диссипация растет во времени значительно быстрее, чем средняя энергия.

Вернемся теперь к первоначальной задаче о расчете динамики средней энергии с учетом ее диссипации. Подставляя выражение (43) в формулу (32) и выполняя интегрирование по времени, получаем решение задачи в виде

$$\langle E(t) \rangle_1 = E_0 \exp\left\{ \frac{2(d-1)D^s}{d} t - \right. \\ - 4\mu_H \left[D_H^{(4)} + \frac{2400(d-2)\alpha^2}{A-g} \right] \times \\ \left. \times \frac{1}{(A-g)^2} \left[e^{(A-g)t} - 1 \right] \right\},$$

откуда видно, что средняя энергия затухает очень быстро при $t \to \infty$. При этом средняя энергия достигает максимального значения в момент времени

$$D^s t_{max} \approx \frac{1}{A-g} \times \\ \times \ln \frac{(d-1)(A-g)^2 D^s}{2d\mu_H \left[D_H^{(4)} (A-g) + 2400(d-2)\alpha^2 \right]}.$$

В трехмерном случае имеем

$$D^s t_{max} = -\frac{15}{28} \ln \mu_H \left[\frac{1.6 D_H^{(4)}}{[D^s]^2} + \frac{2066 a^2}{[D^s]^3} \right] \sim \\ \sim \begin{cases} \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{\sigma^2 \tau_0}{\mu_H} - 3.8 & \text{при наличии спиральности,} \\ \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{\sigma^2 \tau_0}{2\mu_H} & \text{при отсутствии спиральности,} \end{cases}$$

т. е. при наличии спиральности средняя энергия достигает своего максимума значительно быстрее, чем в случае ее отсутствия.

В двумерном же случае плоскопараллельного потока жидкости имеем

$$D^s t_{max} = \frac{1}{2} \ln \frac{[D^s]^2}{2\mu_H D_H^{(4)}} \sim \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma^2 \tau_0}{2\mu_H}.$$

Условием возможности пренебрежения эффектом, вызванным молекулярной диффузией, является, очевидно, условие

$$t \ll t_{max}.$$

Напомним также, что во всех расчетах мы пользовались приближением дельта-коррелированности во времени случайного поля скоростей, условием применимости которого является условие (9).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели решение ряда задач о динамике статистических характеристик пассивных векторных полей в случайном поле скоростей, таких как поле градиента плотности и магнитного поля, в простейшей постановке задачи (с однородными начальными условиями), с минимумом определяющих параметров, связанных только со статистическими характеристиками однородного поля скоростей, дельта-коррелированного во времени. В этом случае все изучаемые поля являются также однородными в пространстве, но нестационарными во времени случайными полями. При этом статистические средние типа

$$F_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t)=\langle f_i(\mathbf{r},t)f_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle$$

зависят по пространственным координатам только от разности $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1}F_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t)=-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}F_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t),$$

т. е. при $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1$ для независящей от $\mathbf{r}$ величины

$$\left\langle f_i(\mathbf{r},t)\frac{\partial f_j(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\right\rangle$$

имеем тождество

$$\left\langle f_i(\mathbf{r},t)\frac{\partial f_j(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\right\rangle=-\left\langle f_j(\mathbf{r},t)\frac{\partial f_i(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\right\rangle, \qquad (46)$$

которым мы широко пользовались в работе при выводе всех уравнений. Это существенно упростило анализ как самой динамической системы, так и полученных результатов, потому что существенное большинство членов при $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1$ равно нулю, что означает отсутствие адвекции статистических характеристик в рассматриваемых задачах. Именно это и позволило решить рассмотренные задачи с большой полнотой и без громоздких вычислений.

При наличии неоднородных начальных условий решения всех задач уже не обладают свойством пространственной однородности и уравнения имеют очень громоздкий вид. Полученные выше решения, однако, несут определенную информацию и для этого случая. В самом деле, свойством (46) обладает также и интеграл (интегрирование по частям)

$$\int d\mathbf{r}\, f_i(\mathbf{r},t)\frac{\partial f_j(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}=-\int d\mathbf{r}\, f_j(\mathbf{r},t)\frac{\partial f_i(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}.$$

Поэтому ясно, что для поля плотности в случае неоднородных начальных условий при отсутствии молекулярной диффузии вместо (23) будем иметь решение вида

$$\int d\mathbf{r}\,\left\langle\rho^2(\mathbf{r},t)\right\rangle_0=\int d\mathbf{r}\,\rho_0^2(\mathbf{r})e^{2D^p t}, \qquad (47)$$

а вместо формулы (26) получим выражение

$$\int d\mathbf{r}\,\left\langle(\boldsymbol{\nabla}\rho(\mathbf{r},t))^2\right\rangle_0=\int d\mathbf{r}\,(\boldsymbol{\nabla}\rho_0(\mathbf{r}))^2 e^{Bt}+ \\ +\frac{D_\rho^{(4)}}{A}\int d\mathbf{r}\,\left\langle\rho^2(\mathbf{r},t)\right\rangle_0\left[e^{At}-1\right], \qquad (48)$$

где параметр

$$B=2\frac{D^s(d-1)+(d+5D^p)}{d}.$$

Аналогичным образом для средней энергии магнитного поля в случае неоднородных начальных условий при отсутствии молекулярной диффузии получим выражение

$$\int d\mathbf{r}\,\langle E(\mathbf{r},t)\rangle_0= \\ =\int d\mathbf{r}\,E_0(\mathbf{r})\exp\left\{2\frac{d-1}{d}\left(D^s+D^p\right)t\right\}$$

вместо формулы (36).

Таким образом, можно утверждать, что полученные в работе соотношения и связи между различными величинами с точки зрения неоднородных задач являются интегральными и служат, образно говоря, тем «скелетом», на фоне которого происходит динамика сложных стохастических движений. При этом все члены, которые оказались равными нулю в нашем рассмотрении, в случае неоднородных задач имеют дивергентный («потоковый») вид.

Также легко написать и аналоги выражений (22) и (32) для дисперсии поля плотности и средней энергии магнитного поля с учетом их диссипации в случае неоднородных задач. Так, например, можно получить вместо решения (22) выражение на всем интервале времени:

$$\int d\mathbf{r}\,\left\langle\rho^2(\mathbf{r},t)\right\rangle_1=\int d\mathbf{r}\,\rho_0^2(\mathbf{r})\,\times \\ \times\exp\left\{2D^p t-2\mu_\rho\int\limits_0^t d\tau\frac{\int d\mathbf{r}\,\left\langle(\boldsymbol{\nabla}\rho(\mathbf{r},\tau))^2\right\rangle_0}{\int d\mathbf{r}\,\left\langle\rho^2(\mathbf{r},\tau)\right\rangle_0}\right\},$$

где функции, входящие в правую часть этого равенства, описываются формулами (47) и (48).

Работа выполнена в 27-ом рейсе НИС «Академик Иоффе» и автор признателен Е. Г. Морозову и всем участникам научной экспедиции за создание благоприятных условий для выполнения этой работы. Выражаю признательность также О. Г. Чхетиани за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 07-05-0006, 07-05-92210-НЦНИЛ) и Программы ГК № 3/ГФ/Н-08.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика*, т. VIII, Наука, Москва (1982).
2. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения глазами физика. Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения*, Физматлит, Москва (2001) [V. I. Klyatskin, *Stochastic Equations through the Eye of the Physicist: Basic Concepts, Exact Results and Asymptotic Approximations*, Elsevier, Amsterdam (2005)].
3. В. И. Кляцкин, *Динамика стохастических систем*, Физматлит, Москва (2002) [V. I. Klyatskin, *Dynamics of Stochastic Systems*, Elsevier, Amsterdam (2005)].
4. В. И. Кляцкин, *Диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках*, Физматлит, Москва (2005).
5. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике*, Физматлит, Москва (2008).
6. В. И. Кляцкин, К. В. Кошель, УФН **170**, 771 (2000).
7. В. И. Кляцкин, УФН **173**, 689 (2003).
8. В. И. Кляцкин, УФН **178**, 419 (2008).
9. В. И. Кляцкин, УФН **179**, 547 (2009).
10. В. И. Кляцкин, О. Г. Чхетиани, ЖЭТФ **136**, 400 (2009).
11. Дж. Бэтчелор, *Теория однородной турбулентности*, Изд-во иностр. лит., Москва (1955) [G. K. Batchelor, *Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge Univ. Press, London (1953)].
12. E. Balkovsky, G. Falkovich, and A. Fouxon, http://arxiv.org/abs/chao-dyn/9912027.
13. E. Balkovsky, G. Falkovich, and A. Fouxon, Phys. Rev. Lett. **86**, 2790 (2001).