ЖЭТФ, 2009, том 135, вып. 4, стр. 653–666

СЖАТЫЕ СОСТОЯНИЯ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

П. С. Алексеев [a*], *Ф. В. Моросеев* [a,b]

[a] *Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук*
194021, Санкт-Петербург, Россия

[b] *Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*
195251, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 13 августа 2008 г.

Выведено симплектически-ковариантное, более точное по сравнению с ранее известными, квантовомеханическое соотношение неопределенности в многомерном случае. Показано, что квантовомеханическое описание линейной гамильтоновой системы при помощи сжатых состояний полностью эквивалентно ее описанию при помощи функции распределения в фазовом пространстве. Предложен новый подход к рассмотрению квазиклассического случая на основе сжатых состояний. Путем анализа явных формул для сжатых состояний в пределе $\hbar \to 0$ получена квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для многомерного уравнения Шредингера. В одномерном случае исследовано поведение квазиклассического решения вблизи каустики, а также выведен закон изменения его фазы при переходе через каустику. Обсуждаются различные общие свойства и примеры сжатых состояний, указывающие на фундаментальное значение сжатых состояний для построения квантовой механики системы «заряженные частицы и электромагнитное поле» в нерелятивистском случае в дипольном приближении.

PACS: 03.65.-w, 03.65.Sq, 03.65.Ta

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема представления квантовой механики на языке функций в фазовом пространстве рассматриваемой системы давно привлекает к себе большое внимание. Основы этого направления были заложены Вигнером в классической работе [1]. В ней было построено представление для матрицы плотности и остальных квантовомеханических операторов, в котором вычисление средних значений наблюдаемых происходит по формулам, аналогичным формулам классической механики. Представление Вигнера нашло многочисленные применения в различных разделах физики. Например, в работах [2, 3] представление Вигнера для основного состояния трех связанных гармонических осцилляторов было сформулировано релятивистски-инвариантным образом. На основе этого была построена модель сильной связи кварков внутри протона, которая позволила успешно объяснить энергетическую зависимость форм-фактора протона при рассеянии на нем электронов очень высоких энергий.

С другой стороны, особый интерес вызывало исследование некоторых зависящих от времени квантовомеханических состояний линейных систем, общей чертой которых является гауссовский профиль распределения вероятности. Впервые состояния такого типа рассмотрел Шредингер [4]. Он показал, что для одномерного гармонического осциллятора существует зависящая от времени волновая функция, которая имеет гауссовский профиль с не зависящей от времени шириной, а ее центр и длина волны де Бройля меняются со временем в соответствии с уравнением Ньютона. Это и аналогичные состояния в многомерном случае в дальнейшем были названы когерентными и изучались большим числом авторов [5–7]. Особый интерес к когерентным состояниям был связан с их применением в квантовой оптике [8]. Позднее было построено обобщение когерентных состояний, для которых профиль распределения вероятности является гауссовским, но дисперсия распределения и другие параметры состояния, в отличие от когерентных состояний, становятся зависимыми от времени [9]. Такие состояния получили название сжатых состояний, или коррелированных состояний, или гауссонов [9, 10]. Наиболее пристальное внимание обращалось на сжатые состояния, соответствующие чистым квантовомеханическим состояниям. Так, в работе [10] было показа-

[*] E-mail: alekseev_p_s@mail.ru

но, что сжатое состояние является чистым тогда и только тогда, когда его функция Вигнера является многомерной гауссовской функцией с симплектической матрицей. В дальнейшем широко исследовались различные свойства и обобщения сжатых состояний [11–13]. Наряду с упомянутым применением в квантовой оптике сжатые состояния успешно использовались при исследовании затухания в квантовом случае [5, стр. 26–70; 14], как инструмент для описания квантового хаоса [15], а также во многих других вопросах [6, 9].

Настоящая статья посвящена изучению сжатых состояний в квазиклассическом случае. В разд. 2 приводятся необходимые для дальнейших построений сведения о симплектической геометрии и преобразовании Вигнера. В разд. 3 выводится симплектически-ковариантное многомерное соотношение неопределенности измерения координат и импульсов, уточняющее ранее известные многомерные соотношения неопределенности [6, 16–18]. Знак равенства в полученном соотношении неопределенности является необходимым и достаточным условием того, что рассматриваемое состояние является чистым сжатым состоянием с симплектической корреляционной матрицей. Прослеживается связь свойств функции Вигнера и волновой функции сжатого состояния, в частности, обсуждается выбор зависящей от времени фазы волновой функции. В разд. 4 показывается, что сжатые состояния могут быть применены для описания квазиклассического случая не только в линейных, но и в нелинейных гамильтоновых системах. Путем анализа общих формул для функции Вигнера сжатых состояний в пределе $\hbar \to 0$ выводится многомерная квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для уравнения Шредингера [19, 20]. Исследуется поведение решения задачи Коши вблизи каустики и выводится закон изменения фазы волновой функции (приращение индекса Маслова) при переходе через каустику. В разд. 5 и 6 обсуждаются различные общие свойства и примеры сжатых состояний с целью выявить их фундаментальное значение для построения нерелятивистской квантовой механики системы «заряды и электромагнитное поле» в дипольном приближении.

2. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВИГНЕРА

В последние 30 лет был достигнут большой успех в изучении внутренних симметрий классической механики [21]. Было установлено, что гамильтонов формализм может быть построен путем постулирования лишь одного свойства фазового пространства — наличия в нем некоторой антисимметричной билинейной формы, так называемой симплектической формы. Рассмотрим динамическую систему, фазовое пространство которой имеет простейшую структуру $\mathbb{R}^{2n} = \{\xi = (\mathbf{x}, \mathbf{p})\}$. В этом случае симплектическая форма имеет вид

$$[d\xi_1, d\xi_2] = \sum_{i=1}^{n} [(dx_1)_i (dp_2)_i - (dx_2)_i (dp_1)_i] \,. \tag{1}$$

Знак формы $[\,.\,,\,.\,]$ в настоящей статье выбран так, чтобы на координатных ортах $\mathbf{e}_{x_i}$ и $\mathbf{e}_{p_i}$ значение формы было равно единице: $[\mathbf{e}_{x_i}, \mathbf{e}_{p_i}] = 1$. Такое определение знака связано с выбранным способом упорядочения x- и p-компонент вектора ξ. При замене базиса $\{\mathbf{e}_{x_i}, \mathbf{e}_{p_i}\}$ в формуле (1), вообще говоря, появляются все члены вида $a_{ik}\,(d\xi_1)_i (d\xi_2)_k$; базисы, в которых форма $[\,.\,,\,.\,]$ все еще имеет вид (1), называются симплектическими.

По аналогии с операцией эрмитова сопряжения линейного оператора вводится операция симплектического сопряжения линейного оператора: $[\xi, T\eta] = [T^S\xi, \eta]$. В симплектическом базисе операция симплектического сопряжения оператора T выражается через его матрицу следующим образом:

$$\begin{gathered} T = \begin{pmatrix} T_x & T_{xp} \\ T_{px} & T_p \end{pmatrix}, \\ T^S = \begin{pmatrix} T_p^T & -T_{xp}^T \\ -T_{px}^T & T_x^T \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{2}$$

где верхний индекс «T» означает транспонирование матрицы. Далее, можно рассматривать симплектически-симметричные операторы, $T^S = T$, и симплектически-унитарные операторы, $T^S = T^{-1}$. В явном виде эти свойства записываются следующим образом:

$$T_x = T_p^T, \quad T_{xp} = -T_{xp}^T, \quad T_{px} = -T_{px}^T$$

и

$$\begin{gathered} T_x\, T_p^T - T_{xp}\, T_{px}^T = I, \quad T_x\, T_{xp}^T = T_{xp}\, T_x^T, \\ T_{px}\, T_p^T = T_p\, T_{px}^T, \end{gathered} \tag{3}$$

где I — единичная матрица $n \times n$. Из формулы (2) видно, что $(T^T)^S = (T^S)^T$. Отсюда следует, что свойство оператора быть эрмитово (симплектически) симметричным или унитарным сохраняется при его симплектическом (эрмитовом) сопряжении. Собственные числа симплектически-симметричного оператора по крайней мере дважды вырождены. Собственные числа симплектически-унитарного оператора разбиваются на n пар (λ_i, μ_i), таких что $\lambda_i \mu_i = 1$. В дальнейшем будем называть симплектически-унитарные матрицы и операторы просто симплектическими.

Преобразование $T \colon \xi \mapsto \xi'$, называется каноническим, если оно оставляет инвариантной симплектическую форму:

$$[d\xi_1', d\xi_2'] = [d\xi_1, d\xi_2],$$

где $d\xi_{1,2}' = T'(\xi) d\xi_{1,2}$, ξ — любая точка пространства. Из этого соотношения видно, что матрица производной канонического преобразования является симплектической. Очень важным примером канонических преобразований является фазовый поток T_t, $t \in \mathbb{R}$, канонических уравнений Гамильтона. В рамках симплектической геометрии возможно рассмотрение как не зависящих, так и зависящих от времени гамильтонианов. В обоих случаях функция T_t по определению ставит в соответствие начальной точке ξ_0 в момент $t = 0$ ее образ $\xi = T_t(\xi_0)$ в момент t при движении в силу уравнений Гамильтона.

Квантовомеханический оператор $\hat{A}$ в координатном представлении задается своим ядром $A(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$. Преобразование Вигнера W ставит в соответствие ядру $A(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ функцию $A_W(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ по формуле

$$A_W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int A\left(\mathbf{x} + \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{2}, \mathbf{x} - \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{2}\right) \times \times \exp\left(-\frac{i\langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{p}\rangle}{\hbar}\right) d\tilde{\mathbf{x}}, \quad (4)$$

где $\langle .,. \rangle$ означает вещественное скалярное произведение. Преобразование (4) есть композиция двух преобразований: $W = F_{\tilde{\mathbf{x}} \to \mathbf{p}} \circ Q_x$, где Q_x — замена переменных в ядре $A(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ по правилу $(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \mapsto \mapsto (\mathbf{x} = (\mathbf{x}' + \mathbf{x}'')/2, \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}'')$, $F_{\tilde{\mathbf{x}} \to \mathbf{p}}$ — преобразование Фурье по переменной $\tilde{\mathbf{x}}$. Отметим особенность нормировки, состоящую в том, что в преобразовании Фурье $F_{\tilde{\mathbf{x}} \to \mathbf{p}}$ и в формуле (4) содержится множитель $1/(2\pi\hbar)^n$. Квантовое уравнение Лиувилля для матрицы плотности $\hat{\varrho}$ в системе с гамильтонианом $\hat{H}$ в представлении Вигнера называется уравнением Мойала и имеет вид [22]

$$\hbar \frac{\partial \varrho_W(\xi)}{\partial t} + \{H_W, \varrho_W\}_W = 0. \quad (5)$$

Здесь $\varrho_W = W[\hat{\varrho}]$, $H_W = W[\hat{H}]$, $\{A_W, B_W\}_W$ — квантовомеханический коммутатор в представлении Вигнера, который записывается в симплектически-ковариантной форме следующим образом:

$$[A_W, B_W]_W(\xi) = 2\left[\sin\left(\frac{\hbar}{2}\mathfrak{D}(\xi_1, \xi_2)\right)\right] \times \times A_W(\xi_1) B_W(\xi_2)\Big|_{\xi_1 = \xi,\ \xi_2 = \xi}, \quad (6)$$

$$\mathfrak{D}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial}{\partial(x_1)_i}\frac{\partial}{\partial(p_2)_i} + \frac{\partial}{\partial(p_1)_i}\frac{\partial}{\partial(x_2)_i}.$$

Средние значения квантовомеханических величин $A_W = W[\hat{A}]$ с классическим аналогом вида

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = A_x(\mathbf{x}) + A_p(\mathbf{p}), \quad A(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = A_W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \quad (7)$$

вычисляются по формуле, аналогичной формуле классической статистической механики:

$$\bar{A} = \int \varrho_W(\xi)\, A_W(\xi)\, d\xi. \quad (8)$$

Вопрос о смысле формулы (8) для величин более общего, чем (7), вида, содержащих члены типа $(x_i)^n (p_j)^m$, является достаточно нетривиальным и обсуждается в разд. 5. Пока укажем только, что обратное преобразование Вигнера приводит к некоторому закону упорядочения операторов, например $x_i p_j$ переходит в $(\hat{x}_i \hat{p}_j + \hat{p}_j \hat{x}_i)/2$.

3. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ПЕРЕХОД К ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

Робертсоном и Шредингером [9, 23] было показано, что соотношение неопределенности Гейзенберга можно уточнить, учтя корреляцию между координатой и импульсом:

$$\Delta x^2 \Delta p^2 - c_{xp}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (9)$$

Здесь $\Delta x^2, \Delta p^2$ — дисперсии координат и импульсов, $c_{xp} = \mathrm{E}[(\hat{x} - \bar{x})(\hat{p} - \bar{p}) + (\hat{p} - \bar{p})(\hat{x} - \bar{x})]/2$ — коэффициент корреляции координаты и импульса, $\bar{x}$ и $\bar{p}$ — средние значения координаты и импульса, E — операция взятия квантовомеханического среднего. Заметим, что левая часть соотношения (9) представляет собой определитель корреляционной матрицы

$$K = \begin{pmatrix} \Delta x^2 & c_{xp} \\ c_{xp} & \Delta p^2 \end{pmatrix},$$

а в случае знака равенства в (9) матрица K является симплектической с точностью до единиц измерения координат и импульсов.

Обобщение соотношения неопределенности (9) на многомерный случай рассматривалось в ряде работ [6, 16, 18]. Наиболее близкой к нашему подходу нам представляется работа [16]. В ней была проведена диагонализация корреляционной матрицы K канонического набора переменных в некотором состоянии при помощи симплектических поворотов. Затем было указано, что элементы диагонализованной корреляционной матрицы есть дисперсии новых независимых канонических переменных, т. е. для них должны выполняться неравенства $\Delta x_i' \Delta p_i' \geq \hbar/2$. Следствия из этих неравенств для элементов матрицы K при помощи операций взятия следа и возведения матриц в степень были сформулированы инвариантным образом относительно симплектических поворотов. Ниже при помощи введенных в разд. 2 понятий симплектической геометрии построим многомерное симплектически-ковариантное соотношение неопределенности и обсудим его связь с соотношениями из работы [16].

Рассмотрим несимметризованную корреляционную матрицу

$$(K^u)_{ij} = \mathrm{tr}(\hat{\xi}_i \hat{\xi}_j \hat{\varrho}),$$

где $\hat{\varrho}$ — матрица плотности состояния, для которого будет устанавливаться соотношение неопределенности. В книге [6] было показано, что матрица K^u комплексно эрмитова, положительно определена, но не вещественна. Для доказательства положительной определенности матрицы K^u рассматривалась квадратичная форма

$$g(\eta) = \mathrm{tr}(\langle \eta, \hat{\xi} \rangle^\dagger \langle \eta, \hat{\xi} \rangle \hat{\varrho}) = \sum_{i,j=1}^{2n} (K^u)_{ij}\, \eta_j\, \eta_i^*,$$

где

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} [\, (x_1)_i (x_2)_i + (p_1)_i (p_2)_i \,].$$

Следуя этому методу, докажем положительную определенность матрицы $(K^u)^S$. Рассмотрим квадратичную форму

$$h(\eta) = \mathrm{tr}([\eta, \hat{\xi}][\eta, \hat{\xi}]^\dagger \hat{\varrho}).$$

Аналогично форме g, форма h также положительно определена. Прямым вычислением получается, что матрица формы h — это матрица $(K^u)^S$. Таким образом, матрица $(K^u)^S$ положительно определена, хотя, также как и матрица K^u, не вещественна. Симметризованная корреляционная матрица K, $K_{ij} = [(K^u)_{ij} + (K^u)_{ji}]/2$, является вещественной и в силу коммутационных соотношений между операторами координат и импульсов связана с матрицей K^u соотношением

$$K^u = K + \frac{i\hbar}{2} J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Главное отличие нашего подхода от подхода работ [16, 18] состоит в том, что мы будем стремиться получать неравенства не относительно элементов матрицы K, а относительно квадратичного по K выражения. Заметим, что для одномерного случая эти два подхода совпадают: определитель матрицы K в выражении (9) можно рассматривать и как инвариант матрицы K, и как билинейную форму $[\,.\,,\,.\,]$, вычисленную на столбцах матрицы K. Надеясь сформулировать соотношение неопределенности симплектически-ковариантным образом, разумно рассмотреть матрицу $(K^u)^S K^u$. Поскольку матрицы $(K^u)^S$ и K^u положительно определены, по известной теореме линейной алгебры матрица $(K^u)^S K^u$ также положительно определена. Кроме того, из соотношений (2) и (10) видно, что матрица $(K^u)^S K^u$ вещественна. Переходя к симметризованной матрице K, после несложных вычислений с помощью формул (2) и (10) получаем

$$\langle K^S K \eta, \eta \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \langle \eta, \eta \rangle. \tag{11}$$

Это неравенство инвариантно относительно выбора базиса в пространстве переменных ξ, т. е. по сути является свойством оператора K.

Более конкретно, условие (11) можно сформулировать как требование того, что собственные числа матрицы $K^S K$ больше или равны $\hbar^2/4$: $\lambda(K^S K) \geq \hbar^2/4$. Отметим, что величины $\lambda(K^S K)$ можно назвать «симплектическим аналогом» так называемых сингулярных чисел $\lambda(A^T A)$ матрицы A, играющих большую роль в численных методах. Матрица $K^S K$ является симплектически-симметричной, поэтому ее собственные числа попарно совпадают, т. е. мы получаем n неравенств неопределенности, как и следует ожидать из рассмотрения ясной заранее ситуации в случае независимости степеней свободы. В одномерном случае

$$K^S K = \mathrm{diag}(\Delta x^2 \Delta p^2 - c_{xp}^2, \Delta x^2 \Delta p^2 - c_{xp}^2),$$

и мы приходим к неравенству Робертсона–Шредингера (9).

Неравенство (11) после диагонализации матрицы K симплектическим поворотом T: $K = T^T D T$, переходит в полученные в работе [16] неравенства относительно элементов диагонализованной корреляционной матрицы $D = \mathrm{diag}((\Delta x_i')^2, (\Delta p_i')^2)$. Это видно из того, что разложение $K = T^T D T$ приводит к спектральному разложению матрицы $K^S K$:

$$K^S K = T^S D^S D T, \quad T^S = T^{-1}.$$

Однако в работе [16] не было указано, как полученные неравенства для элементов диагонализованной корреляционной матрицы D непосредственно связаны с элементами исходной матрицы K. С другой стороны, сформулированные в работах [16, 17] инвариантные соотношения неопределенности относительно исходной корреляционной матрицы K являются более слабыми, чем неравенство (11).

Тот факт, что состояние $\hat{\varrho}$ минимизирует соотношение неопределенности (11), означает, что $K^S K = \hbar^2/4$, т. е. корреляционная матрица K является симплектической с точностью до единиц измерения координат и импульсов. Заметим, что к равенству $K^S K = \hbar^2/4$ приводит также минимизация соотношений неопределенности из работ [16, 17] более слабых, чем (11).

Нашей дальнейшей целью будет показать, что все конструкции нерелятивистской квантовой механики для системы с квадратичным гамильтонианом можно построить на основе классической гауссовской функции распределения в фазовом пространстве, постулативно потребовав выполнение строгих соотношений неопределенности $K^S K = \hbar^2/4$ для корреляционной матрицы в начальный момент времени. Тем самым мы покажем, что в этом случае функцию Вигнера сжатых состояний можно полностью отождествить с классической функцией распределения. Будет показано, что гауссовской функции распределения с симплектической матрицей соответствует чистое сжатое состояние. Этот результат аналогичен результату работы [10], однако, как нам кажется, наш вывод значительно последовательнее и проще (в [10] рассмотрение основано на использовании сложных конструкций теории групп).

Логическая независимость такого подхода к квантовой механике линейных систем от общепринятого постулирования существования волновой функции, описывающего ее уравнения Шредингера и канонических коммутационных соотношений [24, 25] видна из следующих замечаний. Сам факт существования соотношения неопределенности при движении частицы в одном выбранном направлении был доказан из классических соображений в работах [26]. Постоянная Планка в этом подходе является константой, выражающей фундаментальную связь между единицами расстояния и импульса, аналогично тому, как скорость света дает фундаментальную связь между единицами расстояния и времени. Распространение одномерного соотношения неопределенности на многомерный случай в соответствии с логикой работ [10, 16] является необходимым при рассмотрении перехода от набора независимых координат и импульсов к возникновению корреляции между ними.

Итак, пусть каноническая координата механической системы $\xi = (\mathbf{x}, \mathbf{p})$ является известной не точно, а только с некоторой вероятностью. Именно, ξ является случайным вектором с зависящей от времени плотностью распределения $\varrho(\xi, t)$. В момент $t = 0$ задается начальное распределение ϱ_0, которое эволюционирует под действием уравнения Лиувилля:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \{H, \varrho\} = 0. \qquad (12)$$

Решение уравнения (12) выражается при помощи функции T_t фазового потока уравнений Гамильтона:

$$\varrho(\xi, t) = \varrho_0(\xi_0), \quad \xi_0 = T_t^{-1}(\xi). \qquad (13)$$

В качестве начальных условий будем рассматривать нормальные распределения:

$$\begin{gathered} \varrho_0(\xi) = N \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\langle A\left(\xi - \bar{\xi}_0\right), \xi - \bar{\xi}_0\right\rangle\right\}, \\ A = \begin{pmatrix} A_x & A_{xp} \\ A_{px} & A_p \end{pmatrix}, \end{gathered} \qquad (14)$$

где $N = \sqrt{\det A}/(2\pi)^n$, матрица A предполагается вещественной, симметричной и строго положительно определенной:

$$\begin{gathered} A_x = A_x^T, \quad A_p = A_p^T, \quad A_{xp} = A_{px}^T, \\ \langle A\eta, \eta\rangle > 0, \quad |\eta| > 0. \end{gathered}$$

Напомним, что для распределения (14) математическое ожидание равно $\bar{\xi}_0$, корреляционная матрица дается формулой $K_{\varrho_0} = A^{-1}$. Выбор такого начального условия независимо от известных свойств сжатых состояний можно пояснить следующим образом. В силу центральной предельной теоремы теории вероятностей [27] нормальное распределение случайной величины получается, когда величина измеряется многими независимыми способами с последующим усреднением по этим способам.

Пусть распределение (14), рассматриваемое как функция Вигнера некоторого состояния, минимизирует соотношение неопределенности (11). Так как под действием обратного преобразования Вигнера величина $A(\xi) = x_i p_j$ переходит в оператор $(\hat{x}_i \hat{p}_j + \hat{p}_j \hat{x}_i)/2$, матрица K аналогична матрице K_{ϱ_0}. Как обсуждалось выше, это означает, что

$K^S K = \hbar^2/4$. Рассмотрим детальнее это соотношение. Первое из условий симплектичности (3) с учетом симметричности матрицы K приводит к тому, что

$$K_x K_p - K_{xp}^2 = \frac{\hbar^2}{4} I. \tag{15}$$

Здесь K_x, K_p K_{xp} — блоки матрицы K, аналогичные блокам A_x, A_p и A_{xp} матрицы A. Формула (15) в одномерном случае есть соотношение неопределенности (9), а в многомерном случае аналогична ему в следующем смысле. Левая часть в формуле (15) представляет собой «блочный определитель» матрицы K, если рассматривать ее как матрицу 2×2, состоящую из блоков K_x, K_p и K_{xp}. Второе и третье соотношения (3) для симметричной корреляционной матрицы K имеют вид

$$K_x K_{xp}^T = K_{xp} K_x, \quad K_{px} K_p = K_p K_{px}^T. \tag{16}$$

Рассмотрим действие на распределение ϱ_0 линейных канонических преобразований $\xi' = T\xi$. При этом, как видно из формулы (14), нормальное распределение ϱ_0 переходит в нормальное распределение $\varrho' = \varrho_0 \circ T^{-1}$ с математическим ожиданием $\bar{\xi}' = T\bar{\xi}$ и корреляционной матрицей

$$K' = TKT^T. \tag{17}$$

Из формулы (17) и из свойств симплектических матриц образовывать группу и оставаться симплектическими при транспонировании следует, что матрица K' также является симплектической с точностью до множителя $\hbar^2/4$. Фазовый поток T_t является каноническим преобразованием, поэтому установленные свойства распределения ϱ_0 при канонических заменах переменных T дают ответ на вопрос, что происходит с ϱ_0 при эволюции по формулам (13). Подчеркнем, что зависимость математического ожидания $\mathrm{E}_{\varrho(\xi,t)}\,\xi$ распределения $\varrho(\xi,t)$ от времени определяется эволюцией математического ожидания начального распределения $\bar{\xi}_0 = \mathrm{E}_{\varrho_0}\,\xi$ в силу уравнений движения:

$$\mathrm{E}_{\varrho(\xi,t)}\,\xi = T_t(\bar{\xi}_0) \equiv \bar{\xi}(t).$$

Применим обратное преобразование Вигнера W^{-1} к квадратичному гамильтониану $H(\xi,t)$ и к функции распределения $\varrho(\xi,t)$. Роль матрицы плотности будет играть функция распределения в координатном представлении $\varrho(\mathbf{x}',\mathbf{x}'')$. В силу квадратичности гамильтониана ряд для синуса в формуле (6) обрывается на первом члене, и классическое (12) и квантовое (5) уравнения Лиувилля эквивалентны. Формула математического ожидания (8) для величин вида (7) перейдет в квантовомеханическое выражение $\bar{A} = \mathrm{tr}(\hat{\varrho}\hat{A})$. Таким образом, после применения преобразования W^{-1} к классическим величинам и к функции распределения мы получим набор квантовомеханических правил для вычисления средних значений физических величин во все моменты времени при известном начальном состоянии. Операторы для величин вида (7) будут иметь вид

$$A(\mathbf{x}',\mathbf{x}'') = A_x(\mathbf{x}')\,\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'') + \sum_{(k)=0}^{\infty} \frac{A_{(k)}}{(k)!} \times \\ \times \left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^{|(k)|} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}''}\right)^{(k)} \delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x}''), \tag{18}$$

где (k) — мультииндекс, коэффициенты $A_{(k)}$ соответствуют разложению в ряд Тейлора функции A_p в формуле (7).

Действие преобразования W^{-1} на функцию распределения ϱ_0 вида (14) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} &\varrho_0(\mathbf{x}',\mathbf{x}'') = \psi(\mathbf{x}')\,\psi^*(\mathbf{x}''), \\ &\psi(\mathbf{y}) = \sqrt{N'}\,e^{-\Theta(\mathbf{y})}, \\ &\Theta(\mathbf{y}) = \frac{1}{4}\langle (A_x - A_{xp}A_p^{-1}A_{xp}^T) \times \\ &\qquad \times (\mathbf{y}-\bar{\mathbf{x}}_0), \mathbf{y}-\bar{\mathbf{x}}_0\rangle + \\ &\quad + \frac{i}{2\hbar}\langle A_{xp}^T(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{x}}_0), A_p^{-1}(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{x}}_0)\rangle - \\ &\qquad - \frac{i}{\hbar}\langle \mathbf{y}-\bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{p}}_0\rangle, \end{aligned} \tag{19}$$

где $N' = N\sqrt{(2\pi)^n/\det A_p}$. Для получения этого результата были существенны использование свойств матрицы A, аналогичных (15) и (16) с заменой $\hbar^2/4$ на $4/\hbar^2$, а также выбор знаменателя $\hbar$ в показателе экспоненты в преобразовании Фурье. Нетривиальный смысл формулы (19) состоит в том, что после действия W^{-1} любая нормальная функция распределения ϱ_0 с симплектической матрицей A распадается на произведение двух функций. Разложение (19) определяет ψ с точностью до фазы.

Так как распределение $\varrho(\xi,t)$ остается нормальным и обладает симплектической корреляционной матрицей во все моменты времени $t > 0$, полученный результат расщепления функции распределения на произведения двух функций от разных переменных остается также справедливым во все моменты времени.

Покажем, что функция $\psi(\mathbf{x},t)$ обладает всеми свойствами зависящей от времени волновой функции. Во-первых, квадрат модуля ψ дает распределение вероятности нахождения частицы в пространстве. Это следует из того, что распределение по координатам $\varrho_x(\mathbf{x}) = \int \varrho(\mathbf{x},\mathbf{p})d\mathbf{p}$ в силу свойств преобразования Фурье равно $\varrho(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}} = 0)$, т. е. функции $\varrho(\mathbf{x}',\mathbf{x}'')$ при равных аргументах: $\varrho(\mathbf{x}',\mathbf{x}') = \psi(\mathbf{x}')\,\psi(\mathbf{x}')^* = |\psi(\mathbf{x}')|^2$.

Во-вторых, для физических величин вида (7) их математическое ожидание будет вычисляться по формуле

$$\bar{A} = \int \psi^*(\mathbf{y}) \left[A_x(\mathbf{y}) + A_p\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\right)\right]\psi(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}. \quad (20)$$

Это следует из соотношения (18), записи формулы (19) в операторном виде $\hat{\varrho} = \psi\,\psi^\dagger$ и свойств следа $\mathrm{tr}(\hat{A}\hat{\varrho}) = \mathrm{tr}[(\hat{A}\psi)\,\psi^\dagger] = \langle \hat{A}\psi,\psi\rangle$. При выводе формулы (20) использовалось интегрирование произведения $\varrho(\mathbf{x}',\mathbf{x}'')A(\mathbf{x}',\mathbf{x}'')$ по частям. На основе формулы (18) можно также преобразовать к переменным $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ выражения вида $B(\mathbf{x}) = \int \varrho(\mathbf{x},\mathbf{p})B_p(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}$. Например, гидродинамически определяемый вектор потока

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int \varrho(\mathbf{x},\mathbf{p})\,\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x},\mathbf{p})\,d\mathbf{p} = \int \varrho(\mathbf{x},\mathbf{p})\{H,\mathbf{x}\}(\mathbf{x},\mathbf{p})\,d\mathbf{p}$$

при переходе к волновой функции для гамильтонианов типа (7) равен

$$\nabla H_p\left[-\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}''}\right)\right] \times \psi(\mathbf{x}')\,\psi^*(\mathbf{x}'')\Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x},\,\mathbf{x}''=\mathbf{x}}. \quad (21)$$

В случае $H_p(\mathbf{p}) = p^2/2m$ получаем хорошо известную формулу

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{i\,\hbar}{2\,m}\left(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi\right).$$

Наконец, подставим в квантовое уравнение Лиувилля матрицу плотности в виде $\hat{\varrho} = \psi\,\psi^\dagger$:

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\psi^\dagger + i\,\hbar\,\psi\,\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^\dagger = (\hat{H}\psi)\psi^\dagger - \psi(\hat{H}\psi)^\dagger.$$

Введя обозначение $\psi_1 = i\hbar\partial\psi/\partial t - \hat{H}\psi$ и умножая это равенство справа на ψ, получаем $\psi_1 = \kappa\psi$, где $\kappa = \kappa[\psi](t) = \psi_1^\dagger\psi$. Последнее означает, что функция ψ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi + \kappa[\psi]\,\psi. \quad (22)$$

Константу κ можно исключить, перейдя от функции $\psi(\mathbf{x},t)$ к функции

$$\psi'(\mathbf{x},t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int \kappa(t)\,dt\right)\psi(\mathbf{x},t). \quad (23)$$

Отметим, что исходное уравнение (22) до исключения константы κ представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение.

Для проверки полученных результатов было показано, что общие формулы (19) и (23) содержат в себе когерентное состояние Шредингера для одномерного гармонического осциллятора [4, 28]:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\pi^{1/4}\,a^{1/2}} \times \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\,a^2} + \frac{i\,x\,\bar{p}}{\hbar} - \frac{i\,\bar{x}\,\bar{p}}{2\,\hbar} - \frac{i\,\omega\,t}{2}\right]. \quad (24)$$

Здесь $a = \sqrt{\hbar/m\omega}$ — осцилляторная длина; $\bar{x} = \bar{x}(t)$, $\bar{p} = \bar{p}(t)$ — некоторая траектория осциллятора. Наиболее нетривиальным аспектом получения формулы (24) из формул (19) и (23) является правильное воспроизведение не зависящей от координаты фазы $-i\,\bar{x}\,\bar{p}/2\,\hbar - i\,\omega\,t/2$.

В соответствии с изложенной схемой можно было бы совершить аналогичным образом переход к переменным $\mathbf{p}'$, $\mathbf{p}''$, т. е. совершить обратное преобразование Вигнера к импульсному пространству: $W_p^{-1} = Q_p^{-1} \circ F^{-1}_{\mathbf{x}\to\tilde{\mathbf{p}}}$, где $F^{-1}_{\mathbf{x}\to\tilde{\mathbf{p}}}$ — обратное преобразование Фурье по переменной $\mathbf{x}$, Q_p^{-1} — операция симметризации переменных: $(\mathbf{p},\tilde{\mathbf{p}}) \mapsto (\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}/2\,,\ \mathbf{p}'' = \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}/2\,)$. Было проверено, что последовательное применение преобразований $W \equiv W_x$, а затем W_p^{-1} к ядрам квантовомеханических операторов $A(\mathbf{x}',\mathbf{x}'')$ полностью согласуется с известным способом перехода при помощи преобразования Фурье от координатного представления к импульсному.

4. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Начнем с кажущегося нам разумным определения квазиклассического случая квантовой механики в рамках развиваемого подхода. Полностью классическое описание соответствует тому, что распределение $\varrho(\xi,t)$ является дельта-функцией с центром на классической траектории $\bar{\xi}(t)$ движения частицы (см., например, книгу [29]). Из интуитивных соображений хотелось бы, чтобы квазиклассической была такая ситуация: значения физических величин более-менее четко определены, для вычисления их эволюции приближенно справедливы формулы классической механики, но, тем не менее, теория приближенно также дает их квантовомеханическую неопределенность. Рассмотрим динамику, вообще говоря, нелинейной гамильтоновой системы на промежутке времени $[t_1 = 0, t_2]$, в начальный момент времени находящейся в некотором сжатом состоянии ϱ_0 с матрицей A^0. Для описания эволюции системы с классической или квантовой точки зрения необходимо решать соответственно классическое (12) или квантовое (5) уравнения Лиувилля и использовать формулу (8) для вычисления средних значений. Назовем ситуацию квазиклассической, когда эти две точки зрения приближенно совпадают: во-первых, эволюция матрицы плотности рассматриваемой системы приближенно описывается при помощи функции распределения и классического уравнения Лиувилля; во-вторых, в случае выполнения первого условия необходимо также, чтобы на площадке под местом, где функция распределения существенно отлична от нуля, все другие важные в задаче функции менялись бы слабо.

Выразим количественно сформулированные условия. Пусть в области D вокруг траектории $\bar{\xi}(t)$, где найденная из классического уравнения Лиувилля функция распределения $\varrho(\xi, t)$ существенно отлична от нуля, фазовый поток T_t для каждого момента времени можно приближенно считать аффинным преобразованием (композицией сдвига и линейного преобразования):

$$T_t(\bar{\xi}_0 + d\xi_0) = \bar{\xi}(t) + T_t'(\bar{\xi}_0) d\xi_0 + \ldots \tag{25}$$

В качестве D можно, например, рассматривать трубку траекторий

$$D = \bigcup_{\xi_0 \in E_\mu,\, t \in [t_1, t_2]} (\, T_t(\xi_0),\, t\,),$$

где E_μ — эллипсоид-множество уровня начального распределения ϱ_0, вне которого ϱ_0 меньше заданного малого числа μ. Отсюда следует, что это же верно и для $\varrho(\xi, t)$ во всей области D. В такой ситуации фазовый поток T_t в области D удовлетворяет линейному уравнению движения с некоторым зависящим от времени квадратичным гамильтонианом

$$H(\bar{\xi} + d\xi) = H(\bar{\xi}) + H'(\bar{\xi})\, d\xi + \frac{1}{2} H''(\bar{\xi})\, (d\xi, d\xi), \quad \bar{\xi} = \bar{\xi}(t) \tag{26}$$

с точностью до отброшенных в формуле (25) членов. С другой стороны, из малости в области D всех старших членов в гамильтониане по сравнению с членами в выражении (26) следует приближенная линейность фазового потока. Доказательство этого положения основано на теореме из теории обыкновенных дифференциальных уравнений о непрерывной зависимости решения $T_t(\xi_0)$ от гамильтониана и его производных.

Введем обозначения

$$T(t) = [T_t'(\bar{\xi}_0)]^{-1}, \quad A(t) = T^T(t) A^0\, T(t).$$

Подставим формулы (14), (25) и (26) в уравнение Лиувилля (5) и перейдем в базис, где матрица $A(t)$ диагональна. Соотношения неопределенности в форме $\Delta x' \Delta p' = \hbar/2$ и малость старших членов в разложениях (25) и (26) приведут к тому, что в области D каждый последующий член ряда для синуса в формуле (6) будет много меньше предыдущего. Иными словами, квантовое уравнение Лиувилля приближенно, с точностью до отбрасываемых в (26) членов выше второго порядка, совпадает в области D с классическим уравнением Лиувилля. Следовательно, в области D функция распределения $\varrho(\xi, t)$ в соответствии с результатами разд. 3 с точностью до отброшенных в (26) членов будет функцией Вигнера, представимой в виде (19). Соответствующая волновая функция $\psi(\mathbf{x}, t)$ будет с той же точностью в области $D_x \equiv \mathrm{Proj}_x D$ удовлетворять уравнению Шредингера (22). Таким образом, первая часть определения квазиклассичности состоит в том, что в области существенного отличия от нуля функции распределения фазовый поток приближенно является аффинным преобразованием. Напомним, что для нелинейных систем приближенная линейность фазового потока заведомо нарушается за достаточно большой промежуток времени; будет происходить размытие квазиклассического волнового пакета, соответствующего начальному сжатому состоянию [19].

Второе сформулированное условие квазиклассичности количественно можно выразить в виде неравенства

$$|\langle \nabla A(\bar{\xi})\,,\, d\xi \rangle| \ll |A(\bar{\xi})|, \tag{27}$$

где вектор $d\xi$ лежит в эллипсоиде $E_{\varrho(\xi,t)} \subset D$.

В итоге получаем следующий результат. В квазиклассическом случае в смысле сформулированного определения волновая функция приближенно описывается классической функцией распределения $\varrho(\xi, t)$. Квантовомеханическое среднее величины A приблизительно имеет смысл классического среднего значения с неопределенностью и поправкой, вычисляемыми на основе ϱ. Заметим, что квантовомеханическое среднее вектора ξ в этом приближении в точности равно классическому среднему $\bar{\xi}(t)$.

Характерным примером неквазиклассического движения в смысле нашего определения является движение состояния, в начальный момент времени имеющего вид (14) с центром в точке неустойчивого равновесия. При этом размеры области $T_t(E_\mu)$ будут расти со временем, быстро приводя в нелинейном случае к невозможности использовать линейную аппроксимацию для фазового потока T_t, а в линейном случае к катастрофическому росту неопределенности координат и импульсов.

Для выполнимости универсального, но сложно проверяемого условия линейности фазового потока или квадратичности гамильтониана можно потребовать выполнение более жесткого, но более простого следующего условия. Приближенная квадратичность гамильтониана в области D означает, что на траектории $\bar{\xi}(t)$ дифференциал гамильтониана каждого порядка при векторе $\bar{\xi}(t) + d\xi$ в области D мал по сравнению с дифференциалами первых двух порядков. Для этого достаточно, чтобы частная производная гамильтониана каждого порядка по каждому набору переменных в области D менялась бы слабо по сравнению со своей величиной. Иными словами, чтобы было выполнено условие (27) для всех производных гамильтониана $H(\xi)$. Например, для производных первого порядка гамильтониана вида (7) имеем условия

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_j \left| \frac{\partial^2 H(\bar{\xi})}{\partial x_i\, \partial x_j} \right| &\ll \left| \frac{\partial H(\bar{\xi})}{\partial x_i} \right|, \\ \Delta p \sum_j \left| \frac{\partial^2 H(\bar{\xi})}{\partial p_i\, \partial p_j} \right| &\ll \left| \frac{\partial H(\bar{\xi})}{\partial p_i} \right|. \end{aligned} \tag{28}$$

Здесь Δx и Δp — максимальные размеры области D по осям x_i и p_i. Для квадратичных гамильтонианов, для гамильтонианов вида

$$H(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N) = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i>j} I_{ij} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^\sigma$$

и еще для ряда типов гамильтонианов выполнение неравенств (28) приводит к выполнению неравенства (27) для всех старших производных гамильтониана H. Недостаток определения (28) состоит в том, что при его использовании из рассмотрения выпадают точки остановки.

Условия (28) имеют смысл малого изменения силы и скорости в области существенного отличия от нуля функции распределения. Для квадратичного гамильтониана вида (7) формула (28) переписывается в виде

$$\Delta x \ll |\bar{x}_i|, \quad \Delta p \ll |\bar{p}_i|. \tag{29}$$

В этих формулах мы предполагали, что точка минимума гамильтониана $H(\xi)$ находится в начале координат. Требования (29) означают, что система находится вдали от положения равновесия по каждой из координат: на расстояниях, много больших соответствующих неопределенностей. В случае, если гамильтониан линеен по переменной $\mathbf{x}$ или вообще от нее не зависит, первое из условий (28) выполнено всегда. В случае, если потенциальная энергия есть произвольная функция с характерными масштабами l_i по каждой из координат, величину $|\bar{x}_i|$ в (29) нужно заменить на l_i. После перехода в координатное представление при помощи преобразования W^{-1} (см. разд. 3) условие $\Delta x \ll |\bar{x}_i|$ или $\Delta x \ll |l_i|$ в целом сохраняет свой смысл. Второе же из условий (29) с учетом следующего из (15) неравенства $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ приводит к условиям

$$(\lambda_{DB})_i \equiv \frac{\hbar}{|\bar{p}_i|} \ll \Delta x. \tag{30}$$

Подчеркнем, что эти условия являются не достаточными, а только необходимыми для выполнения неравенства $|p_i| \gg \Delta p$. Особенно ярко различие условий (29) и (30) проявляется для сильносжатых и сильнокоррелированных состояний, когда $\Delta x \Delta p \gg \hbar/2$. Итак, для квазиклассичности в терминах координатного представления необходимо, чтобы $(\lambda_{DB})_i \ll \Delta x \ll |\bar{x}_i|, l_i$.

Исследуем связь полученных в разд. 3 формул для сжатых состояний в квазиклассическом случае в смысле введенного выше определения с формулой квазиклассической асимптотики зависящего от времени решения уравнения Шредингера [19, 20]. Пусть в момент времени $t = 0$ имеется сжатое состояние и на промежутке времени $[0, t_2]$ выполнена первая часть сформулированного условия квазиклассичности. Как было показано, соответствующая волновая функция в каждый момент времени в окрестности D_x траектории $\bar{\mathbf{x}}(t)$ будет приближенно иметь вид (19) с матрицей $A(t)$ и удовлетворять уравнению Шредингера с точностью до отброшенных в (26) членов. Будем для простоты считать, что в начальный момент времени корреляции между координатами и импульсами отсутствуют, $A^0 = \mathrm{diag}(A_x^0, A_p^0)$.

В книге [20] квазиклассическое решение строилось как асимптотическое решение уравнения Шредингера на конечном отрезке времени при $\hbar \to 0$. Константа $\hbar$ входила как в уравнение Шредингера, так и в начальное условие

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) \exp\left[iS_0(\mathbf{x})/\hbar\right], \tag{31}$$

где функция $\varphi_0(\mathbf{x})$ считалась финитной и не зависящей от $\hbar$. В нашем случае сжатых состояний $\varphi_0(\mathbf{x})$ — гауссовская функция с матрицей A_x^0, $S_0(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{p}}_0\rangle$. Такая асимптотическая формулировка задачи при выполнении условий квазиклассичности в смысле (25) или (28) соответствует также и тому, что в начальный момент времени неопределенность импульса частицы стремится к нулю при фиксированной неопределенности координаты: $\Delta p \sim \hbar/\Delta x$. В последующие моменты времени неопределенность импульса вырастет, однако состояние окажется сильно сжатым: $\Delta x \Delta p \gg \hbar/2$. Более конкретно, соотношение $\hbar \to 0$ приводит к тому, что во всех выражениях, где стоит сумма вида $A_x^0 M_x + A_p^0 M_p$ (M_x и M_p — любые не зависящие от $\hbar$ матрицы подходящей размерности), первый ее член $A_x^0 M_x$ всегда много меньше второго $A_p^0 M_p$.

На основе выполненного сопоставления постановки задачи в [20] с развитым подходом ниже проводится вывод формулы, аналогичной формулам (0.17) и (0.34) квазиклассического решения в книге [20]. Основной частью доказательства является преобразование формулы (19) путем разложения на блоки матриц $T(t)$ и A^0 с учетом соотношения $\|A_x^0\, M_x\| \ll \|A_p^0\, M_p\|$ и свойств симплектических матриц (3). С точностью до членов порядка $1/\hbar$ и 1 при $\hbar \to 0$ было получено

$$\begin{gathered} \psi(\mathbf{x},t) = \sqrt{N'(t)}\, e^{-\Theta'}, \\ \Theta' = \frac{1}{4}\left\langle [T_p^{-1} A_x^0 (T_p^{-1})^T](\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})\,,\, \mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}\right\rangle + \\ + \frac{i}{2\hbar}\langle T_{px}^T (T_p^{-1})^T (\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}\rangle - \frac{i}{\hbar}\langle \mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}\rangle. \end{gathered} \tag{32}$$

Здесь T_x, T_p, T_{px} — блоки матрицы $T(t)$.

Исследуем структуру полученного решения (32). Введем сокращенные обозначения

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}, \quad \delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0,$$

$$M_x = [T_t'(\bar{\xi}_0)]_{xx}, \quad M_{px} = [T_t'(\bar{\xi}_0)]_{px}.$$

В соответствии с определением симплектической матрицы, $T^{-1} = T^S$, получаем, что $M_x = T_p^T$, $M_{px} = -T_{px}^T$. Имеем, что $(T_p^T)^{-1}\,\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{x}_0$ есть прообраз точки $\delta\mathbf{x}$ при преобразовании M_x. Из формулы для пучка траекторий (лагранжевой поверхности) с начальным импульсом $\bar{\mathbf{p}}_0$,

$$\begin{pmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \delta\mathbf{p} \end{pmatrix} = T_t'(\bar{\xi}_0) \begin{pmatrix} \delta\mathbf{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

видно, что преобразование M_x соответствует переходу от начальных координат $\delta\mathbf{x}_0$ к конечным координатам $\delta\mathbf{x}$ в момент времени t при фиксированном нулевом начальном отклонении импульса $\delta\mathbf{p}_0 = 0$ от его среднего значения $\bar{\mathbf{p}}_0$. Это отображение в рамках линейного приближения аналогично отображению, фигурировавшему в книге [20] как движение вдоль пучка траекторий при построении канонического оператора и квазиклассического решения. Там оно входило в решения (0.17) и (0.34) как замена переменных в амплитуде: $\varphi(\mathbf{x},t) = \varphi_0(\bar{\mathbf{x}}_0 + M_x^{-1}\delta\mathbf{x})$.

Рассмотрим функцию

$$\tilde{S}(\mathbf{x},t) = \langle \mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}\rangle - \frac{1}{2}\langle T_p^{-1} T_{px}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}\rangle\,.$$

Очевидно, что $\nabla\tilde{S} = \bar{\mathbf{p}}(t)$ при $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(t)$, а $\bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}_t(\bar{\mathbf{x}}(t), t)$, где $\mathbf{p}_t(\mathbf{x},t)$ — функция геодезического наклона. Иными словами, первая производная функции $\tilde{S}$ совпадает в точке $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(t)$ с первой производной действия S, построенного путем решения уравнения Гамильтона – Якоби с начальным условием $S|_{t=0} = S_0$. Было показано также, что и вторая производная функции $\tilde{S}$ совпадает в точке $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(t)$ со второй производной действия S. Для этого использовалось, что в окрестности траектории $\bar{\mathbf{x}}(t)$ геодезический наклон для линеаризованного фазового потока имеет вид $\mathbf{p}_t(\mathbf{x},t) = \bar{\mathbf{p}}(t) + M_{xp}\, M_x^{-1}\delta\mathbf{x}$ (см. формулу (33)). Таким образом, для точек в области D_x функция $\tilde{S}$ совпадает с действием $S(\mathbf{x},t)$ с точностью до константы, зависящей от времени, и величин второго порядка по Δx. Это соответствует квадратичной аппроксимации функции Гамильтона в уравнении Гамильтона – Якоби (напомним, что в линейных системах действие квадратично). Отличие S от $\tilde{S}$ на зависящую от времени константу связано с тем, что в уравнении Шредингера (22) была опущена зависящая от времени константа $\kappa(t)$.

Наконец, с точностью до членов первого порядка по $\hbar$ нормировочная константа у волновой функции (32) равна

$$\begin{aligned} N''(t) &= \sqrt{N'(t)} = \\ &= (2\pi)^{-n/4}\left(\det A_x^0\right)^{1/4}\left[J_{M_x}(t)\right]^{-1/2}, \end{aligned}$$

где J_{M_x} — якобиан преобразования M_x. Полученное выражение в рамках рассматриваемого приближения линейности фазового потока соответствует нормировочному множителю квазиклассического решения в [20]. Заметим, что не имеющий физического смысла экспоненциально затухающий или возрастающий множитель у волновой функции в формулах (0.32) и (0.34) [20] за счет члена вида $\hat{x}_i\hat{p}_i$ в гамильтониане связан с неэрмитовостью рассматриваемых в [20] гамильтонианов. Это видно из более подробного анализа с учетом зависимости гамильтониана от $\hbar$ как от параметра [20, § 10]. Более того, из формул (10.3) и (10.10) [20] видно, что для рассматриваемых нами гамильтонианов с членами типа $(\hat{x}_i\hat{p}_i + \hat{p}_i\hat{x}_i)/2$ экспоненциальное затухание исчезает.

Итак, мы получили, что функция ψ в формуле (32) по форме совпадает с анзацем квазиклассического решения вида (31) — формулой, где параметр $\hbar$ содержится в знаменателе фазы. Амплитуда φ и фаза $\tilde{S}$ решения (32) совпадают в области D_x с аналогичными объектами формулы (0.17) (или (0.34)) квазиклассического решения в книге [20] с точностью до отображенных в (25) и (26) членов. Это означает, что выражение (32) представляет собой асимптотическое решение в двух первых порядках по $\hbar$ для приближенного уравнения Шредингера, соответствующего квадратичной аппроксимации гамильтониана (26) вблизи траектории $\bar{\xi}(t) = (\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{p}}(t))$. Таким образом, показано, что квазиклассические сжатые состояния в смысле нашего определения при $\hbar \to 0$ с нужной точностью переходят в решение, полученное в [20].

Преимуществом предлагаемого подхода по сравнению с рассмотрением асимптотического поведения волновых функций при $\hbar \to 0$ с начальным условием вида (31) является наглядность и использование критериев, не содержащих предельного перехода по размерному параметру. В отличие от другого общепринятого определения $\partial\lambda_{DB}/\partial x \ll 1$, предложенное определение является симметричным относительно координатного и импульсного представлений и не исключает из рассмотрения точки остановки, где нарушаются неравенства (28). Например, для одномерного осциллятора с массой m и потенциалом $U(x) = kx^4$ вблизи точки остановки типа $(x_0, 0)$ имеем $\lambda_{DB} = \infty$, но при условиях $x_0 \gg \Delta x$ и $kx_0^4 \gg \hbar^2/m\Delta x^2$ движение частицы по сути остается классическим, т. е. хорошо описывается в рамках классической механики без учета соотношения неопределенности. Наконец, без дополнительных, не симплектически-ковариантных построений типа канонического оператора в квазиклассический случай включаются окрестности каустик — точек, где якобиан $J_{M_x}(t)$ обращается в нуль. Появление каустик является главным затруднением построения квазиклассических решений [20]. Нам кажется, что по сравнению с предлагаемым в [20] методом асимптотики эталонных интегралов рассмотрение движения вблизи каустики при помощи сжатых состояний было бы более наглядным и конструктивным.

Для иллюстрации справедливости последнего замечания рассмотрим поведение квазиклассической волновой функции сжатого состояния в одномерном случае вблизи каустики, где якобиан J_{M_x} имеет простой нуль: $J_{M_x}(t_c) = 0$, $J'_{M_x}(t_c) \neq 0$. Будем рассматривать такую же постановку задачи, как и при выводе формулы (32): начальное условие в виде (31) с $A_{xp} = 0$ и предельный переход при $\hbar \to 0$. В приближении линейного фазового потока переход через каустику для всех траекторий пучка (33) происходит одновременно (вместе с траекторией $\bar{\xi}(t)$). Вдали от точки t_c образования каустики справедливо решение (32), в одномерном случае имеющее вид

$$\psi(x,t) = N'' \exp\left(-\frac{\alpha}{4s^2}\delta x^2 - \frac{ir}{2\hbar s}\delta x^2 + \frac{i}{\hbar}\bar{p}\delta x\right). \quad (34)$$

Здесь

$$T(t) \equiv [T'_t(\bar{\xi}_0)]^{-1} = \begin{pmatrix} o & q \\ r & s \end{pmatrix}, \qquad A^0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 4/\hbar^2\alpha \end{pmatrix}. \quad (35)$$

На каустике обращается в нуль величина $s(t)$ — якобиан преобразования M_x в одномерном случае. При $s \to 0$ функция ψ резко сужается, $|\psi|^2(x)$ стремится к дельта-функции. Вместо формулы (34) вблизи t_c для построения квазиклассического решения необходимо рассмотреть точное решение (19). В одномерном случае для сжатого состояния с матрицей A^0 вида (35) волновая функция будет иметь вид

$$\begin{gathered} \psi(x,t) = \\ = N'' \exp\left(-R\delta x^2 - iP\delta x^2/\hbar + i\bar{p}\,\delta x/\hbar\right), \\ R = \frac{\alpha}{4[s^2 + (\hbar^2/4)\,\alpha^2 q^2]}, \\ P = \frac{rs + (\hbar^2/4)\alpha^2 oq}{2[s^2 + (\hbar^2/4)\alpha^2 q^2]}. \end{gathered} \quad (36)$$

Заметим, что в этих обозначениях $N'' = \sqrt[4]{2R/\pi}$.

Из формул (36) следует, что при подходе центральной траектории $\bar{x}(t)$ к каустике имеем следующую картину. При $t = t_c$ квадратичные по δx осцилляции меняют частоту по сравнению с частотой в регулярной точке траектории. Их скорость определяется множителем P, меняющимся при подходе к каустике от $r/2s$ до $o/2q$. Полуширина волнового пакета $\Delta x = 1/\sqrt{R}$ при подходе к каустике также меняется от значения $2s/\sqrt{\alpha}$ вдали от $t = t_c$ до значения $\hbar q\sqrt{\alpha}$ при $t = t_c$. В случае, если, следуя [20], рассматривать предельный переход $\hbar \to 0$, то изменение полуширины Δx от $2s/\sqrt{\alpha}$ до $\hbar q\sqrt{\alpha}$ соответствует резкому росту абсолютной величины волновой функции вблизи каустики. В квазиклассическом случае в смысле предлагаемого нами определения величины $2s/\sqrt{\alpha}$ при $t \neq t_c$ и $\hbar q\sqrt{\alpha}$ при $t = t_c$ могут быть одного порядка и резкого роста интенсивности на каустике не происходит. Из выражений (36) видно, что при $\hbar \to 0$ резким также является скачок частоты квадратичных осцилляций. Так как $s'(t_c) \neq 0$, величина $s(t) \approx s'(t_c)(t - t_c)$ при $t \to t_c$ и зависимость квадрата обратной полуширины $R(t)$ волновой функции от времени t при $\hbar \to 0$ вблизи каустики имеет лоренцевский вид.

Покажем также, как в рамках развиваемого подхода у квазиклассического решения (32) возникает скачок фазы при переходе пучка траекторий (33) через каустику. Очевидно, что функция ψ в формулах (19) и (32) не содержит скачка фазы при переходе через каустику любого типа; скачок возникает только с учетом поправки к фазе по формуле (23). Для простоты будем рассматривать одномерный случай, простую каустику и гамильтониан вида

$$\frac{p^2}{2m} + V(x).$$

Следуя [20] и логике вывода (32), разумно ожидать возникновения скачка фазы при предельном переходе $\hbar \to 0$. Поэтому с помощью формул (36) рассмотрим динамику дополнительного фазового множителя $\kappa[\psi](t)$ в формуле (23) в пределе $\hbar \to 0$ вблизи каустики $t = t_c$ и вычислим приращение индекса Маслова траектории $\bar{x}(t)$. Было показано, что подынтегральное выражение $\kappa(t)/\hbar$ в (23) имеет три члена, приводящих к дельтаобразным особенностям лоренцевского типа с центром в точке $t = t_c$:

$$-\frac{\hbar R(t)}{2m}, \quad \frac{\dot{P}(t)}{4R(t)\hbar}, \quad -\frac{P^2(t)}{2m\hbar R(t)}.$$

Вычисления дают, что в пределе $\hbar \to 0$ сумма этих трех членов стремится к величине $-(\pi/2)\delta(t - t_c)$. Это доказывает изменение фазы на $-\pi/2$ при переходе через каустику.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрим обсуждавшуюся в [5, 14] систему большого числа слабосвязанных осцилляторов с целью модельно рассмотреть излучение в рамках концепции сжатых состояний. Пусть имеется один «большой» гармонический осциллятор ($i = 0$) с массой M и частотой Ω и много «маленьких» осцилляторов ($i = 1, \ldots, N$) с массами m и более-менее непрерывно распределенными частотами ω_i. Пусть также между большим осциллятором и каждым маленьким существует слабая связь $h_i x_i X$, где $h_i \ll M\Omega^2, m\omega_i^2$. Таким образом, гамильтониан задачи имеет вид

$$H(\xi) = \frac{P^2}{2M} + \frac{M\Omega^2}{2}X^2 + \\ + \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\,\omega_i^2}{2}x_i^2 + h_i\,x_i\,X\right].$$

Пусть в начальный момент времени все маленькие осцилляторы покоились, большой осциллятор был отклонен от равновесия до точки X_0. Будем считать, что он находился в квазиклассическом когерентном состоянии Шредингера: $X_0 \gg a_0$, где $a_0 = \sqrt{\hbar/M\Omega}$. Не останавливаясь на подробностях анализа динамики этой системы, приведем результаты. С наибольшей интенсивностью будет происходить возбуждение маленьких осцилляторов с частотами ω_i вблизи Ω с точностью до $\varepsilon = h_i/\Omega\sqrt{mM}$. Это соответствует высвечиванию линии с энергией $\hbar\Omega$ и шириной $\hbar\varepsilon = \hbar h_i/\Omega\sqrt{mM}$. Золотое правило Ферми и классический расчет одновременно приводят к закону движения возбуждаемых осцилляторов вблизи момента времени $t = 0$:

$$x_i(t) = -\frac{h_i X_0}{2m_i\Omega}\,t\sin(\Omega\,t).$$

Заметим, что полная аналогия классического и квантового описаний этой системы (в частности, расчет времени жизни состояния большого осциллятора, величины излучаемой им энергии) видна из того, что уравнения Гейзенберга для поиска зависимости от времени операторов $\hat{X}$ и $\hat{x}_i$ в этой задаче полностью совпадают с классическими.

Укажем на возможность рассмотрения адиабатического приближения в рамках развиваемого подхода. Рассмотрим систему из двух осцилляторов с массами M_1 и M_2 и частотами Ω_1 и Ω_2, слабо взаимодействующих со множеством осцилляторов с массой m и более-менее непрерывно распределенными частотами ω_i. Гамильтониан можно выбрать в виде

$$H(\xi) = \frac{P_1^2}{2\,M_1} + \frac{P_2^2}{2\,M_2} + \frac{M_1\Omega_1^2}{2}X_1^2 + \frac{M_2\Omega_2^2}{2}X_2^2 + \\ + \sum_{i=0}^{N}\left[\frac{p_i^2}{2\,m} + \frac{m\omega_i^2}{2}x_i^2 + x_i\,(\,h_{i,1}\,X_1 + h_{i,2}\,X_2\,)\right],$$

где $h_{i,j} \ll M_j\Omega_j^2$, $m\omega_i^2$. В случае, если среди маленьких осцилляторов достаточно много быстрых,

$\omega_i \gg \Omega$, то, усреднив по движению быстрых осцилляторов, методом самосогласованного поля можно ввести энергию $U(X_1, X_2)$ всех маленьких осцилляторов при фиксированном положении больших и рассматривать взаимодействие двух больших осцилляторов за счет энергии «поля» быстрых осцилляторов. При этом условия квазиклассичности, вообще говоря, могут не выполняться, т. е. описание системы двух больших осцилляторов на основе волновой функции не сводится к описанию на основе функции распределения.

Обсудим также, как возникают «нечистые» состояния линейных систем в рамках развиваемого подхода сжатых состояний. Пусть имеется линейная система, состоящая из двух частей, описываемых переменными ξ_1 и ξ_2. После усреднения функции распределения $\varrho(\xi_1, \xi_2)$ сжатого состояния всей системы по ξ_2 оставшаяся функция распределения $\varrho(\xi_1)$ будет все еще описывать статистические свойства величин, относящихся к первой половине системы, иметь гауссовский профиль, но не будет обладать симплектической корреляционной матрицей. Переменные ξ_2 могут, в частности, описывать термостат или измерительный прибор [25, 30, 31]. Таким образом введенная функция $\varrho(\xi_1)$ соответствует матрице плотности части системы, описываемой переменной ξ_1 [28, 30]. При выполнении обратного преобразования Вигнера по переменной ξ_1 все утверждения разд. 3 о переходе функции распределения в матрицу плотности останутся в силе из-за квадратичности гамильтониана за исключением вывода формулы (19), который существенно опирается на симплектичность матрицы A распределения $\varrho(\xi)$.

Наконец обсудим, как связаны полученные результаты с выбором закона упорядочения операторов. В работах [32] было показано, что закон упорядочения некоммутирующих операторов $\hat{x}$ и $\hat{p}$ в каждом построенном на их основе операторе $G(\hat{x}, \hat{p})$ однозначным образом связывается с отображением операторной функции $G(\hat{x}, \hat{p})$ на вещественнозначную функцию $F(x, p)$. Частным случаем отображений этого класса является преобразование Вигнера. Соответствующий ему закон упорядочения операторов легко получается из формулы (4), он приведен в работах [12].

Представление Вигнера является исключительным в классе рассмотренных в работах [32] отображений в том смысле, что переход от описания линейной системы с помощью гауссовских функций распределения к описанию с помощью волновых функций с необходимостью осуществляется преобразованием Вигнера. Приведем кажущееся нам наиболее простым доказательство этого утверждения. Если линейная система описывается функцией совместного распределения координат и импульсов, то волновая функция однозначно определяется из функции распределения (без предположения, что они связаны преобразованием Вигнера в соответствии с изложенным в разд. 3). Действительно, волновая функция восстанавливается с точностью до зависящей от времени фазы из плотности распределения $\varrho_x(\mathbf{x})$ и плотности потока вероятности $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ (если считать формулу (21) правильной), а они, в свою очередь, однозначно определяются из функции совместного распределения. Связь между уже однозначно определенными гауссовскими волновыми функциями и гауссовскими функциями совместного распределения задается преобразованием Вигнера. Это однозначно определяет обратное преобразование Вигнера как закон перехода для всех величин $F(x, p) \mapsto G(\hat{x}, \hat{p})$, так как гауссианы вида (14) и (19) образуют полный набор функций.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, отметим, что работа преследовала три цели. Первая состояла в выводе симплектически-ковариантного многомерного соотношения неопределенности, вторая — в исследовании сжатых состояний в квазиклассическом случае, третья — в указании на возможность полностью обоснованного построения квантовой механики линейных гамильтоновых систем на основе сжатых состояний и постулирования соотношения неопределенности для корреляционной матрицы.

Остановимся несколько подробнее на последней цели работы. Было указано на теоретико-вероятностный смысл гауссовского профиля сжатых состояний. В связи с тем, что построение сжатых состояний стартует с классической механики, дается точная интерпретация волновой функции и операторов, которые первоначально были введены на основе аналогии с классической механикой [33, 34] и оптикой [34]. При этом оказывается принципиальным учет симплектической геометрии фазового пространства.

Заметим, что в нерелятивистском случае гамильтониан заряженных частиц и электромагнитного поля, по крайней мере в дипольном приближении ($\Delta x \ll \lambda_{field}$), является квадратичным. Условие дипольности $\Delta x \ll \lambda_{field}$ является условием квазиклассичности в смысле основного определения из разд. 4. Рассмотренные в разд. 5 примеры движения связанных осцилляторов представляли собой модель излучения и модель получения закона Кулона. Эти примеры указывают на возможность построения квантовой механики системы «заряженные частицы и электромагнитное поле» в дипольном приближении на основе сжатых состояний.

Мы глубоко благодарим семинар сектора Теоретической астрофизики Физико-технического института и лично Д. П. Барсукова, Д. А. Варшаловича, А. А. Даниленко, А. П. Дмитриева, Д. А. Зюзина, В. Ю. Качоровского, А. Н. Поддубного, Е. М. Собко, П. С. Штернина, И. Н. Яссиевич за обсуждения и советы в ходе работы над статьей. Также мы очень благодарны А. П. Алексеевой, Д. А. Варшаловичу, Д. С. Свинкину, И. Н. Яссиевич за чтение рукописи и предложенные замечания по ее улучшению. Один из нас (П. С. А.) благодарит фонд Династия за финансовую поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).

2. Y. S. Kim and E. P. Wigner, Phys. Rev. A **38**, 1159 (1988).

3. Y. S. Kim and E. P. Wigner, Phys. Rev. A **39**, 2829 (1989).

4. E. Schrödinger, Naturwissensch. **14**, 664 (1926).

5. *Когерентные состояния в квантовой теории*, под ред. В. И. Манько, Мир, Москва (1972).

6. В. В. Додонов, В. И. Манько, *Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем*, Труды ФИАН, т. 183, Наука, Москва (1987).

7. В. Г. Багров, Б. Ф. Самсонов, ЖЭТФ **109**, 1105 (1996).

8. R. J. Glauber, *One Hundred Years of Light Quanta*, Nobel lecture (2005).

9. V. V. Dodonov, M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, and A. Vourdas, J. Russian Laser Research **28**, 404 (2007).

10. R. Simon, E. C. G. Sudarshan, and N. Mukunda, Phys. Rev. A **37**, 3028 (1988).

11. V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, and V. I. Man'ko, Phys. Rev. A **50**, 813 (1994).

12. D. Han, Y. S. Kim, and M. E. Noz, Phys. Rev. A **37**, 807 (1988); **40**, 902 (1989).

13. Leehwa Yeh, Phys. Rev. A **47**, 3587 (1993); В. А. Миронов, ЖЭТФ **123**, 32 (2003).

14. Р. Ж. Глаубер, В. И. Манько, ЖЭТФ **87**, 790 (1984).

15. К. Н. Алексеев, Д. С. Приймак, ЖЭТФ **113**, 111 (1998).

16. E. C. G. Sudarshan, C. B. Chiu, and G. Bhamathi, Phys. Rev. A **52**, 43 (1995).

17. D. A. Trifonov, J. Phys. A **30**, 5941 (1998).

18. Н. В. Карелин, А. М. Лазарук, ТМФ **117**, 427 (1998); M. U. Karelin and A. M. Lazaruk, J. Phys. A **33**, 6807 (2000); D. A. Trifonov and S. G. Donev, J. Phys. A **31**, 8041 (1998).

19. В. Паули, *Общие принципы волновой механики*, Гостехиздат, Москва – Ленинград (1947).

20. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Мир, Москва (1976).

21. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, Москва (1989); А. Т. Фоменко, *Симплектическая геометрия*, Изд-во Моск. ун-та, Москва (1988); В. И. Арнольд, А. Б. Ривенталь, *Симплектическая геометрия*, Изд-во Регулярная и хаотическая динамика, Ижевск (2000).

22. J. E. Moyal, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45**, 99 (1949).

23. Э. Шредингер, *Избранные труды по квантовой механике, Наука*, Москва (1976).

24. Г. Вейль, *Теория групп и квантовая механика*, Наука, Москва (1986).

25. И. фон Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Наука, Москва (1964).

26. N. Bohr, Naturwissensch. **16**, 245 (1928); L. Landau and R. Peierls, Zs. Phys. **69**, 56 (1931).

27. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, Москва (1961).

28. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989).

29. Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский, *Лекции по квантовой механике для студентов-математиков*, Изд-во Ленингр. ун-та, Ленинград (1980).

30. L. D. Landau, Zs. Phys. **45**, 430 (1927).

31. Д. И. Блохинцев, УФН **122**, 745 (1977).

32. G. S. Agarwal and E. Wolf, Phys. Rev. D **2**, 2161, 2187 (1970).

33. M. Born, W. Heisenberg, and P. Jordan, Zs. Phys. **35**, 557 (1926).

34. E. Schrödinger, Phys. Rev. **28**, 1049 (1926).