ЖЭТФ, 2008, том 134, вып. 5 (11), стр. 1048–1058

ИНДУЦИРОВАННАЯ ШУМОМ СИНХРОНИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ХАОСА В УРАВНЕНИИ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ

А. А. Короновский, П. В. Попов, А. Е. Храмов [*]

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Саратов, Россия

Поступила в редакцию 15 февраля 2008 г.

Изучается синхронизация, индуцированная шумом, в распределенной автоколебательной системе, описываемой уравнениями Гинзбурга – Ландау, находящейся в режиме пространственно-временных хаотических колебаний. Выявлен новый режим синхронного поведения (названный неполной индуцированной шумом синхронизацией), который может возникать только в пространственно-распределенных системах. Проведено аналитическое описание механизма, приводящего к установлению данного режима в распределенной среде под действием распределенного источника шума. Показано хорошее совпадение аналитических и численных результатов.

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Tp

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение явления синхронизации хаотических колебаний в системах различной природы в настоящее время находится в центре внимания исследователей в различных областях естествознания [1–3]. Большинство исследований проводилось в рамках качественной теории динамических систем и нелинейной динамики [3–5], в таких областях, как радиофизика [6, 7], биофизика [8–10], физиология [11–13], теория передачи информации [14–16], теория сложных сетей [17] и т. д. Основные результаты в области исследования синхронизации хаотических автоколебаний в связанных и неавтономных системах получены при анализе систем с малым числом степеней свободы (потоковых системах и отображениях), для которых выделены различные типы синхронного хаотического поведения. Это фазовая синхронизация [18–20], обобщенная синхронизация [21–23], синхронизация с запаздыванием [24], перемежающиеся синхронизация с запаздыванием [25] и обобщенная синхронизация [26, 27], индуцированная шумом синхронизация [28–30], полная синхронизация [31–34], синхронизация временных масштабов [35–37].

Существенно меньше работ, в которых проводится исследование синхронизации хаотических пространственно-временных колебаний в распределенных активных средах. Вместе с тем такие исследования имеют важное теоретическое значение для понимания общих закономерностей взаимодействия сложных нелинейных систем различной природы (химической, физической, биологической и т. д.), так как многие проявления хаотической синхронизации имеют существенные особенности при их анализе в пространственно-непрерывных распределенных средах. В частности, как показано в работах [38, 39], явление обобщенной хаотической синхронизации в распределенных средах, описываемых уравнением Гинзбурга – Ландау, имеет существенно новые черты по сравнению с соответствующими эффектами в сосредоточенных системах [5, 28–30]. Так, было показано, что в распределенной системе может наблюдаться явление частичной обобщенной синхронизации [39], определяемое распределенностью в пространстве связанных систем. В работах [7, 40, 41] была обнаружена сложная нетривиальная пространственная динамика установления режима синхронизации временных масштабов при воздействии внешнего хаотического сигнала в системе связанных электронно-волновых систем с кубичной фазовой нелинейностью в условиях синхронизма электронной и

[*]E-mail: aeh@nonlin.sgu.ru

обратной электромагнитной волн [42]. Одновременно исследование хаотической синхронизации распределенных активных сред имеет важное прикладное значение, определяемое тем, что модели подобных систем часто используются при анализе процессов в связанных системах электронно-волновой и пучково-плазменной природы, лазерных, биологических, физиологических, химических и других системах.

Часто в качестве объектов исследования синхронизации пространственно-распределенных систем выступают такие модели автоколебательных сред, как уравнения Гинзбурга – Ландау [2, 38, 43–46], уравнения Курамото – Сивашинского [47], цепочки и решетки связанных осцилляторов [48] и отображений [2], сети хаотических элементов [17, 49], пучково-плазменные и электронно-волновые системы [50, 51].

Одним из наименее изученных типов хаотической синхронизации динамических систем является индуцированная шумом синхронизация, которая впервые была обнаружена в работе [52]. В настоящее время данный тип синхронного поведения привлекает особое внимание исследователей благодаря тому, что он проявляется на стыке детерминированного и случайного поведения [5, 28–30] и демонстрирует тот факт, что воздействие шумов на ансамбль динамических автоколебательных систем может способствовать установлению идентичного поведения первоначально несогласованных хаотических систем. Это делает выявление механизмов такой синхронизации в различных системах важным для понимания нелинейных эффектов в химических, экологических и живых системах [53–57].

Индуцированной шумом синхронизацией (noise-induced synchronization, NIS) называется режим, когда случайный сигнал, воздействующий на две идентичные по управляющим параметрам хаотические системы $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$, стартующие с различными начальными условиями ($\mathbf{u}(t_0) \neq \mathbf{v}(t_0)$), приводит к синхронизации поведения систем, т. е. системы после завершения некоторого переходного процесса начинают вести себя идентично, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$.

Диагностика наличия NIS может быть проведена непосредственным сравнением состояний $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ динамических систем. Другим методом детектирования NIS является расчет максимального ляпуновского показателя динамической системы [29, 58], находящейся под воздействием источника шума. Максимальный ляпуновский показатель характеризует наличие неустойчивости в автоколебательной системе с внешним источником шума. При установлении режима NIS в системе под действием внешнего шума максимальный ляпуновский показатель становится отрицательным, что приводит к идентичной динамике двух систем: под воздействием одного и того же источника шума исследуемые системы «забывают» свои уникальные начальные условия и переходят в идентичное состояние [5]. Если старший ляпуновский показатель каждой системы положителен, синхронизация отсутствует.

В данной работе проводится детальное исследование NIS в распределенной автоколебательной среде, описываемой уравнением Гинзбурга – Ландау при воздействии на него внешнего распределенного источника шума. Выбор в качестве объектов исследования пространственно-непрерывных распределенных систем, описываемых уравнениями Гинзбурга – Ландау, обусловлен тем, что они в настоящее время могут рассматриваться как эталонные модели для изучения пространственно-временного хаоса и образования структур в различных распределенных средах [43] и часто используются для изучения методов управления хаосом [48] и явления хаотической синхронизации [39, 46, 59] в распределенных системах. Обнаружено принципиально новое явление, связанное с распределенностью автоколебательной системы, на которую воздействует внешний шум, которое мы назвали неполной (incomplete) NIS (INIS). Показано, что в этом случае диагностика NIS в распределенных системах с использованием максимального ляпуновского показателя требует дополнительного детального анализа пространственно-временной динамики неавтономной системы.

2. ИССЛЕДУЕМАЯ МОДЕЛЬ

Изучаемая математическая модель представляет собой два идентичных по управляющим параметрам одномерных комплексных уравнения Гинзбурга – Ландау, описывающие комплексные поля $u(x,t)$ и $v(x,t)$, находящиеся под действием единого источника шума $\zeta(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t &= u-(1-i\beta)|u|^2u+(1+i\alpha)u_{xx}+D\zeta(x,t), \\ v_t &= v-(1-i\beta)|v|^2v+(1+i\alpha)v_{xx}+D\zeta(x,t) \end{aligned} \qquad (1)$$

с периодическими граничными условиями

$$u(x,t) = u(x+L,t), \quad v(x,t) = v(x+L,t), \qquad (2)$$

где L — пространственный период системы, α и β — действительные управляющие параметры, D — интенсивность источника шума ($\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$).

Будем использовать источник шума ζ с асимметричной функцией распределения плотности вероятности для действительной ζ_1 и мнимой ζ_2 частей:

$$p(\zeta_{1,2}) = \begin{cases} 2\zeta_{1,2}, & 0 \le \zeta_{1,2} \le 1, \\ 0, & \zeta_{1,2} < 0, \quad \zeta_{1,2} > 1 \end{cases} \tag{3}$$

на единичном интервале $\zeta_{1,2} \in [0,1]$. Моделирование шумового процесса с функцией распределения (3) проводилось с помощью схемы, используемой при генерации шумового процесса с пилообразным распределением [60].

Управляющий параметр β фиксировался равным $\beta = 4$, параметр α менялся в наших исследованиях в пределах $\alpha \in (1,2)$, пространственный период системы был выбран равным $L = 40\pi$. При этих значениях управляющих параметров в автономных распределенных системах наблюдаются режимы пространственно-временного хаоса [43, 61]. Начальные условия для комплексных полей $u(x, t = 0)$ и $v(x, t = 0)$ задавались случайным образом.

Для численного решения уравнения Гинзбурга–Ландау с дополнительным стохастическим слагаемым ζ использовалась следующая стандартная численная схема [62], в рамках которой искомая комплексная величина $u(x,t)$ представляется как комплексное поле в дискретной одномерной решетке с пространственным шагом Δx. Вводя в рассмотрение $x_i = i\Delta x$ $(i = 1,\ldots,N)$, обозначим соответствующее значение $u(x_i,t)$ как $u_i(t)$. Тогда $\zeta_i(t)$ есть случайный процесс, функции распределения плотности вероятности для действительной и мнимой частей которого удовлетворяют выражению (3), а эффективная интенсивность пространственно-временного шума в дискретном пространстве равна $D = \tilde{D}/\Delta x$ [62]. Лапласиан $\partial^2/\partial x^2$ представлялся трехточечной конечно-разностной аппроксимацией [63]. В результате исследуемые стохастические дифференциальные уравнения в частных производных (1) моделируются как дискретная одномерная решетка отображений с помощью одношагового метода Эйлера [62] с шагом во времени Δt. Шаги по времени и координате были соответственно выбраны равными $\Delta t = 0.0002$ и $\Delta x = L/1024$.

3. ИНДУЦИРОВАННАЯ И НЕПОЛНАЯ ИНДУЦИРОВАННАЯ ШУМОМ СИНХРОНИЗАЦИИ В РАСПРЕДЕЛЕННОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрим динамику системы распределенных автоколебательных сред, описываемых уравнением (1) и находящихся в режиме пространственно-временного хаоса, при увеличении интенсивности шума D.

Если интенсивность шума $D = 0$, то системы $u(x,t)$, $v(x,t)$ находятся в режимах пространственно-временного хаоса и их состояния отличаются друг от друга, $u(x,t) \ne v(x,t)$. Это хорошо видно из рис. 1*а*, на котором показана эволюция разности состояний $|u(x,t) - v(x,t)|$ при интенсивности шума $D = 0$. С увеличением интенсивности шума, при превышении величиной D некоторого порога, системы начинают демонстрировать идентичную динамику (которая в каждой из систем остается хаотической во времени и в пространстве), что означает установление режима индуцированной шумом синхронизации в пространственно-распределенной системе (см. рис. 1*б*).

Для обнаружения режима NIS удобно рассматривать усредненную по времени и пространству разность состояний между двумя распределенными системами, находящимися под действием единого источника шума:

$$\varepsilon = \frac{1}{TL} \int\limits_{\tau}^{\tau+T} \int\limits_{0}^{L} |u(x,t) - v(x,t)|\, dx\, dt. \tag{4}$$

Процесс усреднения в численном моделировании начинался после длительного переходного процесса, $\tau = 200$, в течение которого на каждую из систем шум не воздействовал. В режиме NIS средняя разность ε равна нулю, $\varepsilon = 0$, и в каждый момент времени состояния систем v и u (1) полностью совпадают.

Кроме сравнения состояний двух идентичных систем, на которые воздействует один и тот же источник шума, исследовалась также зависимость максимального ляпуновского показателя системы, находящейся под действием шума. Методика расчета максимального ляпуновского показателя для уравнения Гинзбурга–Ландау подробно рассмотрена в работе [39]. Как уже было отмечено выше, в режиме NIS максимальный ляпуновский показатель λ должен принимать отрицательные значения.

На рис. 2 показаны зависимости максимального ляпуновского показателя λ и усредненной разности состояний систем ε от амплитуды шума D для

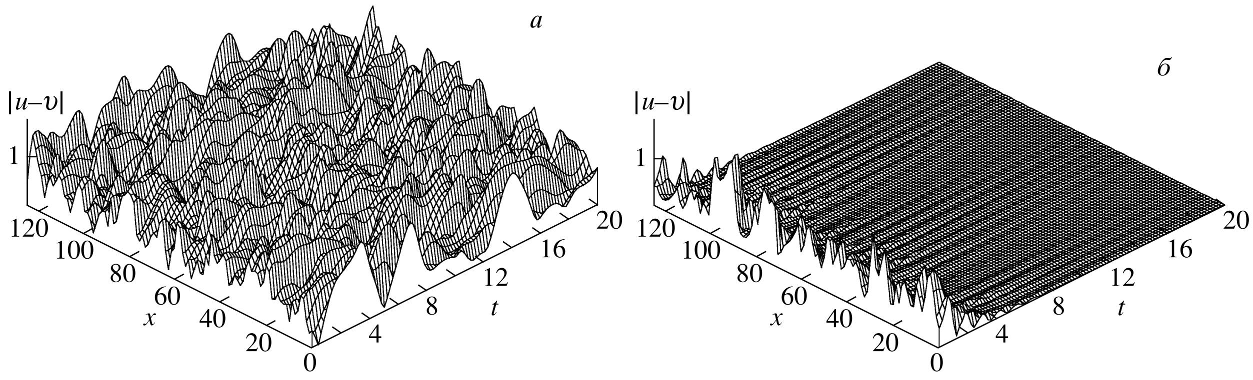

Рис. 1. Эволюция разности состояний систем, $|u(x,t) - v(x,t)|$, описываемых уравнением Гинзбурга – Ландау (1) в случае отсутствия шума (a) и случае шума с интенсивностью $D = 3$ ($б$). Управляющие параметры $\alpha = 2$, $\beta = 4$

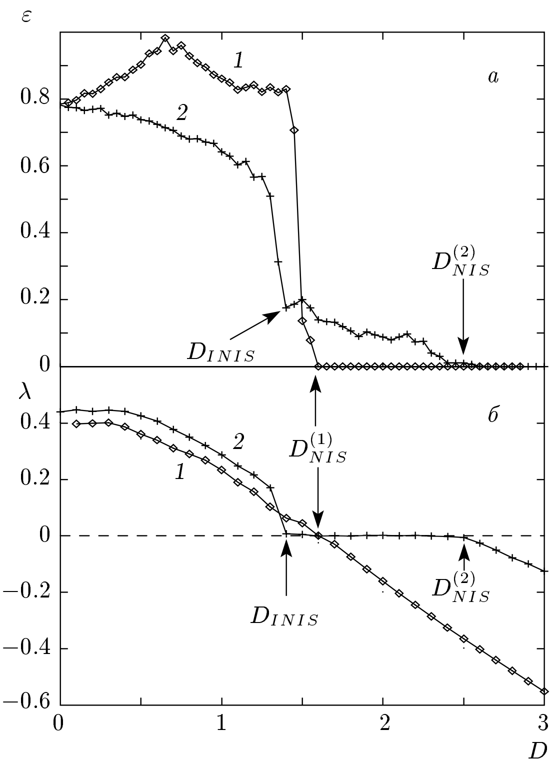

Рис. 2. Зависимости a) усредненной разности состояния систем (4) и $б$) максимального ляпуновского показателя уравнений Гинзбурга – Ландау (1) от интенсивности шума D для различных значений управляющего параметра α. Кривые *1* соответствуют значению $\alpha = 1$, кривые *2* — значению $\alpha = 2$. Значения интенсивности шума, соответствующие возникновению режима NIS, показаны стрелками $D_{NIS}^{(1)}$ и $D_{NIS}^{(2)}$ соответственно для кривых *1* и *2*. Граница INIS показана стрелкой

двух различных значений управляющего параметра α. Видно, что при величине управляющего параметра $\alpha = 1$ (кривые *1* на рис. 2) значение интенсивности шума D, при котором максимальный ляпуновский показатель λ пересекает нулевое значение и становится отрицательным, совпадает с величиной интенсивности шума, когда усредненная разность состояний систем (4) становится равной нулю. В этом случае границей NIS является значение интенсивности шума $D_{NIS} \approx 1.5$ (на рис. 2 данное значение отмечено стрелкой $D_{NIS}^{(1)}$) и ситуация не отличается от случая описанного и подробно исследованного ранее перехода к возникновению NIS в системах с малым числом степеней свободы.

В то же время для большего значения управляющего параметра ($\alpha = 2$) можно наблюдать принципиально другой механизм возникновения режима индуцированной шумом синхронизации (кривые *2* на рис. 2). Для данного значения управляющего параметра характерно следующее: с увеличением интенсивности шума D максимальный ляпуновский показатель уменьшается и при определенном значении ($D_{INIS} \approx 1.53$) становится равным нулю. При этом усредненная разность состояний систем ε не равна нулю (см. рис. 2a, кривая *2*). С дальнейшим увеличением интенсивности шума D величина ε уменьшается и обращается в нуль при интенсивности шума $D = D_{NIS}^{(2)}$, когда ляпуновский показатель становится отрицательным ($D_{NIS}^{(2)} \approx 2.5$), что свидетельствует о возникновении режима индуцированной шумом синхронизации. Таким образом, существует конечный интервал значений параметра интенсивности шума ($D_{INIS}, D_{NIS}^{(2)}$), в котором идентичные системы, находящиеся под действием одного распределенного в пространстве источника шума, ведут себя различно (NIS не наблюдается), но максимальный ляпуновский показатель λ равен нулю.

Подобное поведение разности состояний систем и максимального ляпуновского показателя с увеличением интенсивности шума в системах с конечномерной размерностью фазового пространства не наблюдается. Очевидно, что возникновение подобного режима обусловлено пространственной распределенностью исследуемой системы, и в указанном диапазоне значений параметра интенсивности шума, когда ляпуновский показатель равен нулю, мы имеем дело с другим режимом, являющимся переходным от асинхронного хаотического режима к режиму, соответствующему NIS.

Детальные исследования динамики системы при интенсивности шума $D \in (D_{INIS}, D_{NIS}^{(2)})$ показали, что в этом режиме, хотя ляпуновский показатель λ равен нулю, а усредненная разность ε принимает отличное от нуля значение, динамика системы имеет свойства, присущие синхронному режиму в смысле NIS. В данном случае полное совпадение состояний систем (а значит, NIS) можно получить путем пространственного сдвига одной из систем, описываемых уравнением Гинзбурга–Ландау, относительно другой на некоторую величину δ. Другими словами, если рассмотреть состояние системы $v = v(x+\delta, t)$, то усредненная разность состояний систем,

$$\Delta(\delta) = \frac{1}{TL} \int\limits_{\tau}^{\tau+T} \int\limits_{0}^{L} |u(x,t) - v(x+\delta,t)|\, dx\, dt, \qquad (5)$$

будет зависеть от δ. Отметим, что для корректного расчета усредненной разности состояний (5) необходимо учитывать длительный переходный процесс, сопровождающий выход системы на устойчивое множество в фазовом пространстве (аттрактор), т. е. необходимо существенно увеличить длительность τ переходного процесса по сравнению с описанным выше случаем (в расчетах мы положили $\tau = 2000$). Результаты такого анализа иллюстрирует рис. 3, на котором показана зависимость усредненной разности состояний систем в зависимости от пространственного сдвига. Видно, что существует такое значение сдвига $\delta = \delta_0$, при котором величина $\Delta(\delta)$ становится равной нулю. При данном сдвиге системы начинают вести себя идентично. Таким образом, можно говорить о режиме, сходном с режимом индуцированной шумом синхронизации. Для других величин пространственного сдвига состояния систем во времени и пространстве различны, но для данного выбора управляющих параметров значение ляпуновского показателя остается равным нулю. Значение

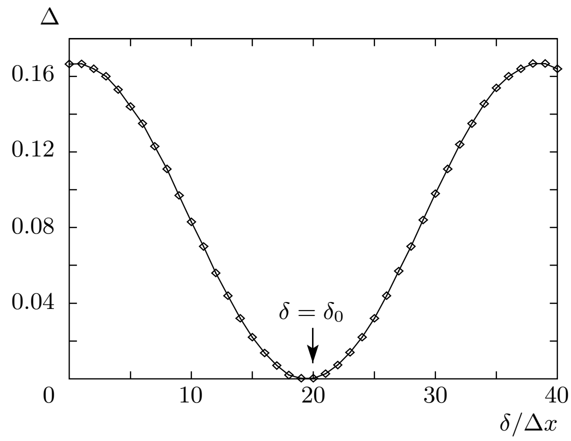

Рис. 3. Зависимости усредненной разности Δ между состояниями систем $u(x,t)$ и $v(x,t)$, описываемых комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау (1), от пространственного сдвига δ для управляющих параметров $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $D = 2$. Шаг по пространству $\Delta x = 40\pi/1024$

пространственного сдвига δ_0 существенно зависит от начальных условий.

Учитывая определенное сходство обнаруженного нового режима распределенной системы при воздействии на него источника шума с явлением NIS, назовем данный режим, возникающий в пространственно-распределенной системе и характеризующийся равенством нулю максимального ляпуновского показателя, режимом неполной NIS (INIS).

4. МЕХАНИЗМЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ИНДУЦИРОВАННОЙ И НЕПОЛНОЙ ИНДУЦИРОВАННОЙ ШУМОМ СИНХРОНИЗАЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрим причины, способствующие появлению NIS и INIS в пространственно-распределенной хаотической системе. Для этого сопоставим режимы NIS и обобщенной синхронизации распределенной активной среды. В литературе хорошо известны механизмы, приводящие к установлению режима обобщенной синхронизации, связанные с подавлением собственной динамики хаотического осциллятора внешним воздействием (см., работы [23, 64]). На примере систем с конечным числом степеней свободы (системы Ресслера, Лоренца, логистические отображения и др.) было показано [30], что в основе возникновения режимов NIS и обобщенной синхронизации лежат одни и те же механизмы. Сценарии возникновения обобщенной синхронизации в распределенных системах сходны с соответствующими сценариями в конечномерных системах [38]. Для их выявления в работе [23] был предложен метод модифицированной системы, основанный на замене неавтономной хаотической системы системой с дополнительной диссипацией (модифицированной системой), обусловленной связью между системами или внешним воздействием. Можно предположить, что механизм возникновения NIS близок к возникновению обобщенной синхронизации, а следовательно, можно рассмотреть возникновение синхронного режима с помощью разновидности метода модифицированной системы.

Следуя работе [30], будем рассматривать динамику модифицированного уравнения Гинзбурга–Ландау с дополнительным слагаемым, соответствующим среднему значению шума $\langle D\xi\rangle$, которое запишется следующим образом:

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = u_m - (1-i\beta)|u_m|^2 u_m + + (1+i\alpha)\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + \langle D\zeta\rangle. \quad (6)$$

Следует отметить, что для исследуемого шума с функцией распределения (3) среднее значение шума равно

$$\langle D\xi\rangle = D\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi p(\xi)\,d\xi = 2D\int\limits_{0}^{1}\xi^2 d\xi = \frac{2D}{3}. \quad (7)$$

Хорошо известно, что уравнение Гинзбурга–Ландау описывает различные типы пространственно-временного поведения (включая режимы бегущих волн, фазовой турбулентности, режимы пространственно-временного хаоса) в зависимости от принадлежности управляющих параметров соответствующим областям на плоскости параметров [65–67]. Уравнение (6) представляет собой модифицированное уравнение Гинзбурга–Ландау с дополнительным детерминированным слагаемым, которое, как показали исследования, оказывает сильное влияние на динамику активной среды. В частности, если значение параметра D достаточно велико, то в системе (6) устанавливается однородное стационарное состояние $u_0 = u_0(x,t) = \mathrm{const}$. В этом случае максимальный ляпуновский показатель отрицателен, что соответствует режиму NIS в системе (6). При уменьшении интенсивности шума D стационарное состояние u_0 теряет устойчивость, что соответствует разрушению NIS в системе (1), находящейся под действием внешнего источника шума.

Однако, как показывает анализ модифицированной системы (6), потеря устойчивости стационарного состояния в зависимости от управляющих параметров этой системы может происходить по различным сценариям. Для их выявления проведем аналитическое исследование потери устойчивости стационарным состоянием u_0 модифицированной системы. Само стационарное состояние может быть найдено из уравнения, получаемого из (6),

$$u_0 - (1-i\beta)|u_0|^2 u_0 + 2D/3 = 0, \quad (8)$$

которое не допускает аналитического решения, но может быть решено численно с помощью метода Ньютона [68]. Для анализа устойчивости стационарного состояния, определяемого уравнением (8), рассмотрим линеаризованное модифицированное уравнение Гинзбурга–Ландау (6) вблизи стационарного состояния u_0. Пусть $\tilde u = \tilde u_r + i\tilde u_i$ — малое возмущение относительно стационарного состояния $u_0 = u_r + iu_i$:

$$u_m = u_0 + \tilde u.$$

Линеаризовав уравнение (6) и предполагая, что малое возмущение экспоненциально нарастает,

$$\begin{aligned} \tilde u_r(x,t) &= \hat u_r(k)e^{\Lambda t + ikx}, \\ \tilde u_i(x,t) &= \hat u_i(k)e^{\Lambda t + ikx}, \end{aligned} \quad (9)$$

получим дисперсионное соотношение, которое определяет устойчивость стационарного состояния u_0:

$$\begin{vmatrix} 1 - u_i^2 - 3u_r^2 - 2\beta u_i u_r - k^2 - \Lambda & -(\beta u_r^2 + 3\beta u_i^2 + 2u_r u_i - \alpha k^2) \\ \beta u_i^2 - 2u_i u_r + 3\beta u_r^2 - \alpha k^2 & 2\beta u_r u_i - u_r^2 - 3u_i^2 + 1 - k^2 - \Lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

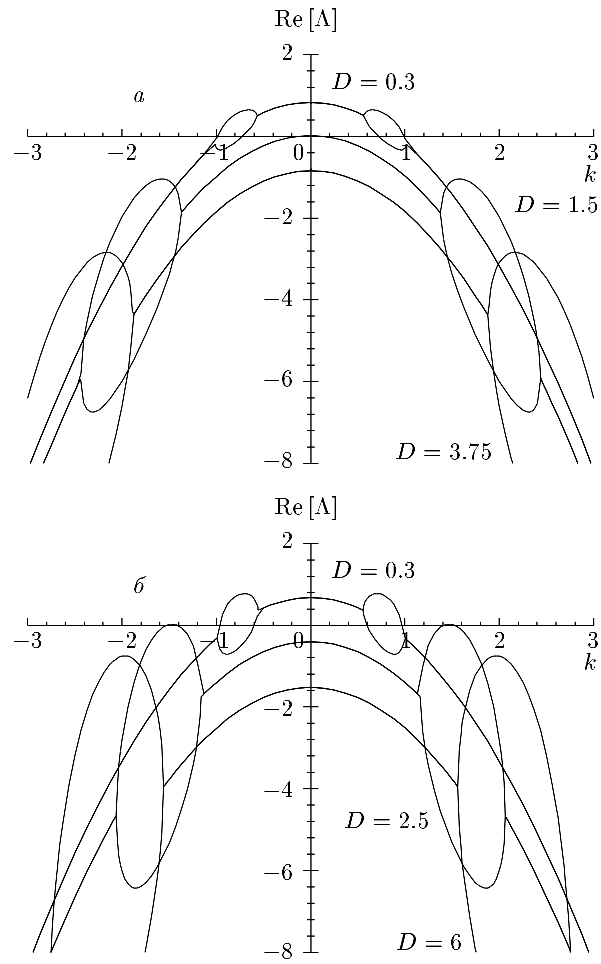

Рис. 4. Зависимости вещественной части собственных значений Λ от волнового числа k для различных значений параметра D для фиксированных значений управляющего параметра $\alpha = 1$ (a) и $\alpha = 2$ ($б$)

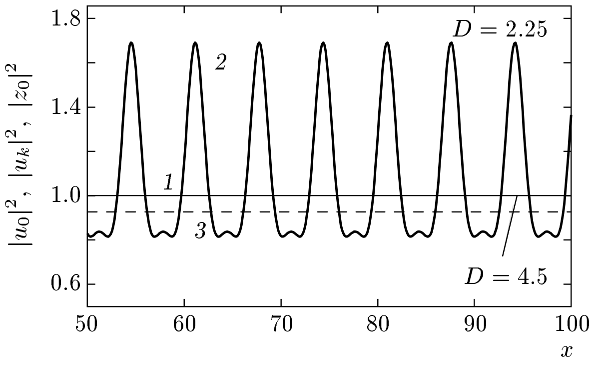

Рис. 5. Профили стационарных состояний $|u_0|^2$ (прямая *1*) и $|u_k(x)|^2$ (кривая *2*), наблюдаемые в системе (6), для различных значений интенсивности шума D и фиксированного значения $\alpha = 2$. Штриховая линия *3* — стационарное состояние $|z_0|^2$, соответствующее уравнению (8) при $D = 2.25$ и являющееся неустойчивым

Очевидно, что стационарное состояние u_0 будет устойчивым, если выполняется неравенство $\mathrm{Re}\,\Lambda(k) < 0$ при любом k.

Зависимости величины $\mathrm{Re}\,\Lambda(k)$ для последовательно уменьшающихся значений интенсивности шума D при фиксированных значениях управляющего параметра $\alpha = 1, 2$ показаны на рис. 4. Видно, что для случая $\alpha = 1$ (рис. 4a) стационарное состояние u_0 теряет устойчивость при $D \approx 1.5$. В этом случае пространственное возмущение с волновым числом $k = 0$ начинает экспоненциально нарастать. В результате стационарное состояние u_0 становится неустойчивым, и в системе, описываемой уравнением (6), возникает режим пространственно-временного хаоса. Максимальный ляпуновский показатель становится положительным как в модифицированном уравнении (6), так и в исходном уравнении Гинзбурга–Ландау (1), а режим NIS в уравнении (1) при этих значениях управляющих параметров не наблюдается.

При $\alpha = 2$ (рис. 4$б$) однородное стационарное состояние u_0 теряет устойчивость при $D \approx 2.5$ и пространственная мода с волновым числом $k = \pm 0.5$ становится неустойчивой по другому сценарию, нежели в случае $\alpha = 1$, рассмотренном выше. При $\alpha = 2$, после того как однородное состояние u_0 теряет устойчивость, в модифицированном уравнении Гинзбурга–Ландау возникает устойчивое периодическое пространственное состояние $u_k(x) = u_k(x + l)$ (где $l = 2\pi/k$ в силу периодических граничных условий), стационарное по времени. Примеры профилей такого стационарного во времени состояния, но периодического в пространстве приведены на рис. 5. Очевидно, что для подобного стационарного состояния максимальный ляпуновский показатель равен нулю. В последнем случае очевидно, что в исходной системе, находящейся под действием шума $D\zeta(x,t)$ со средним значением $\langle D\zeta \rangle$, возникает стационарная во времени и периодическая по пространству структура $u_k(x)$, возмущаемая шумом. Поэтому пространственно-временная динамика состояния $u_k(x)$, выглядящая как сложное непериодическое движение, характеризуется старшим ляпуновским показателем также равным нулю. Поскольку две идентичные системы, $u(x,t)$ и $v(x,t)$, находящиеся под действием общего источника шума, эволюционируют с различных начальных условий $u(x, 0)$ и $v(x, 0)$, периодические в пространстве структуры не идентичны друг другу, $u_k(x) \neq v_k(x)$, но, благодаря трансляционной симметрии системы с периодическими граничными условиями, существует некоторый сдвиг δ_0 в пространстве, зависящий от начальных условий $u(x, 0)$ и $v(x, 0)$, так что $u_k(x) = v_k(x + \delta_0)$. Поэтому в интервале $D_{INIS} < D < D_{NIS}^{(2)}$ значений интенсивности шума в уравнениях Гинзбурга – Ландау (1) под действием общего источника шума наблюдается режим, характеризующийся нулевым максимальным ляпуновским показателем, в то время как состояния систем неидентичны. Если одну из систем сдвинуть по пространству относительно другой на соответствующий сдвиг δ_0, который зависит от начальных условий и для которого выполняется соотношение $u_k(x) = v_k(x+\delta_0)$, то системы, находящиеся под действием шума, начнут вести себя идентично.

Результаты аналитического исследования показали очень хорошее соответствие значений интенсивности шума D, соответствующих потере устойчивости стационарным однородным состоянием u_0 (см. рис. 4*б*), и интенсивности шума D_{INIS}, когда максимальный ляпуновский показатель становится равным нулю (см. рис. 2*б*).

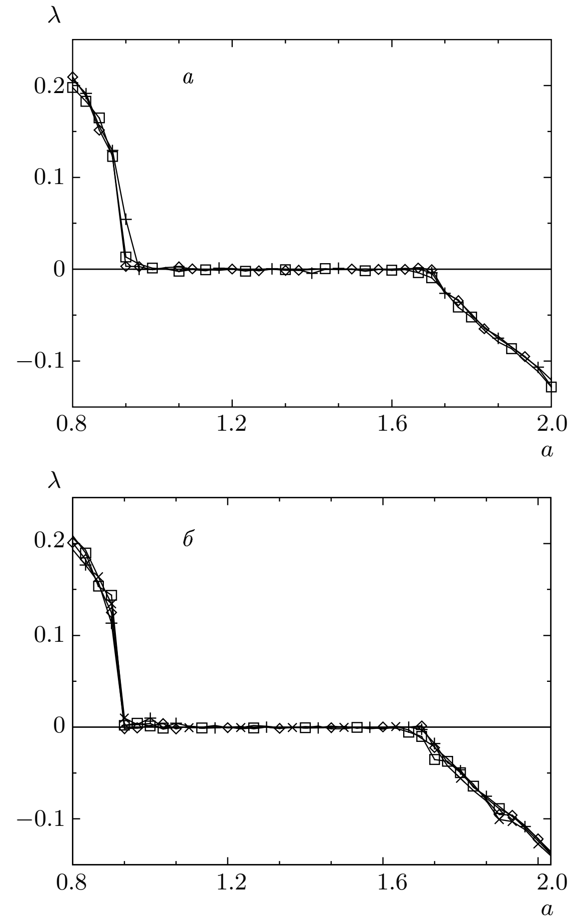

Рис. 6. Зависимости максимального ляпуновского показателя λ от параметра a, рассчитанного для шума *а*) с гауссовым распределением (11) и *б*) с равномерной функцией распределения для различных значений дисперсии шума: *а* — $\sigma = 0.1$ (◇), 0.2 (+), 0.5 (□); *б* — $\sigma = 0.5$ (◇), 1.0 (+), 1.5 (□), 2.0 (×). Видно наличие диапазона, в котором $\lambda = 0$. Управляющие параметры уравнения Гинзбурга – Ландау $\alpha = 2$, $\beta = 4$

5. РЕЖИМ НЕПОЛНОЙ ИНДУЦИРОВАННОЙ ШУМОМ СИНХРОНИЗАЦИИ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ШУМА

Для иллюстрации того факта, что возникновение NIS в распределенной автоколебательной системе определяется средним значением шумового сигнала, воздействующего на систему, рассмотрим, как влияют на установление синхронизации характеристики шума в системе, описываемой уравнением (1). Одним из традиционно используемых при исследовании стохастических дифференциальных уравнений типов шума является нормальный шум, характеризуемый гауссовой функцией распределения плотности вероятности. Поэтому важно рассмотреть динамику комплексного уравнения Гинзбурга – Ландау (1) под действием шума ζ с гауссовой функцией распределения действительной ζ_1 и мнимой ζ_2 частей случайной величины

$$p(\zeta_{1,2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\xi - a)^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (11)$$

В отличие от рассмотренного выше примера с пилообразной функцией распределения шума, для которой невозможно отделить влияние среднего значения и дисперсии шума друг от друга, использование гауссовой функции распределения позволяет это легко сделать. Величина интенсивности шума была зафиксирована равной $D = 1$. В этом случае среднее значение случайного процесса определяется выбором параметра a, тогда как интенсивность шума определяется дисперсией σ. Случайный процесс с требуемой функцией распределения (11) реализовывался с помощью алгоритма, подробно описанного в [68].

Были рассмотрены зависимости максимального ляпуновского показателя λ от среднего значения шума a функции распределения (11) для различных значений дисперсии σ. Результаты исследований приведены на рис. 6*а*, где показаны зависимости максимального ляпуновского показателя $\lambda(a)$ от величины среднего значения шума для различных дисперсий распределения. Как следует из проведенных численных исследований, режим INIS реализуется в диапазоне $a \in [1.0, 1.7]$ (так же, как в случае, рассмотренном в разд. 3) для любого значения дисперсии шума σ. Таким образом, дисперсия шума σ, а значит, и интенсивность шума, не оказывают существенного влияния на механизмы возникновения режимов NIS и INIS.

Рассмотрев пространственно-временную динамику двух комплексных уравнений Гинзбурга–Ландау (1), находящихся под воздействием общего источника шума с функцией распределения (11), мы обнаружили, что в диапазоне $a \in [1.0, 1.7]$ состояния систем не совпадают друг с другом, т. е. режим NIS отсутствует. Тем не менее, как и раньше, существует сдвиг δ_0 (который определяется начальными условиями) такой, что состояния систем в сдвинутых по пространству точках совпадают, $u(x,t) = v(x+\delta,t)$, что свидетельствует о наличии режима INIS.

Для сравнения результатов, полученных при использовании шумового источника с гауссовой функцией распределения, с результатами, описанными в разд. 4 и 5 для шума с асимметричной функцией распределения, необходимо принять во внимание, что в разд. 4 в качестве среднего значения шума использовалось среднее значение $2D/3$ (см. соотношение (7)). Поэтому если мы выберем то же самое значение в качестве среднего для шума с гауссовым распределением плотности вероятности путем подстановки $a = 2D/3$, то получим, что режим INIS наблюдается в диапазоне $D \in [1.5, 2.5]$, что хорошо соотносится с результатами, полученными при аналитическом рассмотрении в разд. 4.

Аналогичные результаты были получены для шума с равномерной функцией распределения со средним значением a и шириной распределения (дисперсией) σ (рис. 6*б*): существует диапазон значений среднего шума a, где максимальный ляпуновский показатель принимает нулевое значение и реализуется режим INIS.

Таким образом, основываясь на проведенных исследованиях, можно сделать вывод, что возникновение режима INIS обусловлено, во-первых, наличием дополнительной трансляционной степени свободы и, во-вторых, определяется средним значением шумового сигнала, воздействующего на систему, в то время как дисперсия сигнала практически не играет роли в установлении режима INIS.

6. ВЫВОДЫ

В работе было впервые исследовано явление индуцированной шумом синхронизации (NIS) в распределенной автоколебательной системе на примере уравнения Гинзбурга–Ландау. Обнаружено возникновение нового типа синхронного поведения динамических систем под воздействием шума — неполной индуцированной шумом синхронизации (INIS), — возникновение которого возможно только в пространственно-распределенных системах с трансляционной симметрией. Режим INIS отличается от всех известных типов синхронного поведения активных сред, демонстрирующих пространственно-временной хаос. Этот режим может наблюдаться в широком диапазоне интенсивностей внешнего шумового сигнала, в котором максимальный ляпуновский показатель принимает значение, равное нулю, и состояния двух идентичных распределенных систем под воздействием общего источника шума неидентичны, но в то же время существует свидетельство синхронности колебаний: если состояние одной из систем сдвинуть относительно другой на некоторую величину, то поведение систем станет идентичным и в них будет наблюдаться NIS. Было дано теоретическое описание подобного поведения пространственно-распределенных систем, хорошо коррелирующее с численными результатами. Было рассмотрено влияние типа источника шума на установление режима INIS и показано, что существенную роль в возникновении данного типа синхронного поведения играет среднее значение шума, тогда как интенсивность шумового сигнала практически не играет роли.

Полученные результаты по возникновению режима INIS на примере комплексных уравнений Гинзбурга–Ландау, находящихся под действием общего источника шума, имеющего ненулевое среднее, позволяют предположить, что подобное поведение будет реализовываться в широком круге подобных активных сред. Поскольку влияние шумового источника может приводить к образованию структур [69–71], ожидается, что INIS может наблюдаться и для систем под воздействием шума с нулевым средним значением для других типов пространственно-временных структур (например, для бегущих волн).

Работа выполнена при финансовой поддержке Президентской программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-355.2008.2) и молодых докторов наук (проект МД-1884.2007.2), РФФИ (гранты №№ 07-02-00044, 08-02-00102), а также фонда «Династия».

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление*, Техносфера, Москва (2003).

2. S. Boccaletti, J. Kurths, G. V. Osipov et al., Phys. Rep. **366**, 1 (2002).

3. В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова и др., *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах*, Институт компьютерных исследований, Москва–Ижевск (2003).

4. V. Astakhov, M. Hasler, T. Kapitaniak et al., Phys. Rev. E **58**, 5620 (1998).

5. D. S. Goldobin and A. S. Pikovsky, Phys. Rev. E **71**, 045201 (2005).

6. Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов, *Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков*, т. 1, Физматлит, Москва (2003).

7. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, P. V. Popov, and I. S. Rempen, Chaos **15**, 013705 (2005).

8. P. A. Tass, T. Fieseler, J. Dammers et al., Phys. Rev. Lett. **90**, 088101 (2003).

9. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths et al., in *Handbook of Biological Physics*, Elsevier Sci. Publ., Amsterdam (2001), p. 279.

10. P. A. Tass, M. G. Rosenblum, J. Weule et al., Phys. Rev. Lett. **81**, 3291 (1998).

11. R. Q. Quiroga, A. Kraskov, T. Kreuz, and P. Grassberger, Phys. Rev. E **65**, 041903 (2002).

12. M. D. Prokhorov, V. I. Ponomarenko, V. I. Gridnev et al., Phys. Rev. E **68**, 041913 (2003).

13. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, V. I. Ponomarenko, and M. D. Prokhorov, Phys. Rev. E **73**, 026208 (2006).

14. L. M. Pecora, T. L. Carroll, G. A. Jonson, and D. J. Mar, Chaos **7**, 520 (1997).

15. А. С. Дмитриев, А. И. Панас, *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи*, Физматлит, Москва (2002).

16. N. F. Rulkov, M. A. Vorontsov, and L. Illing, Phys. Rev. Lett. **89**, 277905 (2002).

17. S. Boccaletti, V. Latora, V. Moreno et al., Phys. Rep. **424**, 175 (2006).

18. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, Phys. Rev. Lett. **76**, 1804 (1996).

19. A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, and J. Kurths, Int. J. Bifurcation and Chaos **10**, 2291 (2000).

20. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, and M. K. Kurovskaya, Phys. Rev. E **75**, 036205 (2007).

21. N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. Abarbanel, Phys. Rev. E **51**, 980 (1995).

22. K. Pyragas, Phys. Rev. E **54**, R4508 (1996).

23. A. E. Hramov and A. A. Koronovskii, Phys. Rev. E **71**, 067201 (2005).

24. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, Phys. Rev. Lett. **78**, 4193 (1997).

25. S. Boccaletti and D. L. Valladares, Phys. Rev. E **62**, 7497 (2000).

26. A. E. Hramov and A. A. Koronovskii, Europhys. Lett. **70**, 169 (2005).

27. А. А. Рухадзе, Л. А. Богданкевич, УФН **103**, 609 (1971).

28. A. Martian and J. R. Banavar, Phys. Rev. Lett. **72**, 1451 (1994).

29. R. Toral, C. R. Mirasso, E. Hernández-Garsia, and O. Piro, Chaos **11**, 665 (2001).

30. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, and O. I. Moskalenko, Phys. Lett. **354 A**, 423 (2006).

31. L. M. Pecora and T. L. Carroll, Phys. Rev. Lett. **64**, 821 (1990).

32. L. M. Pecora and T. L. Carroll, Phys. Rev. A **44**, 2374 (1991).

33. K. Murali and M. Lakshmanan, Phys. Rev. E **49**, 4882 (1994).

34. K. Murali and M. Lakshmanan, Phys. Rev. E **48**, R1624 (1993).

35. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, and O. I. Moskalenko, Phys. Rev. E **71**, 056204 (2005).

36. А. Е. Храмов, А. А. Короновский, Ю. И. Левин, ЖЭТФ **127**, 886 (2005).

37. A. E. Hramov and A. A. Koronovskii, Physica D **206**, 252 (2005).

38. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, and P. V. Popov, Phys. Rev. E **72**, 037201 (2005).

39. А. А. Короновский, П. В. Попов, А. Е. Храмов, ЖЭТФ **130**, 748 (2006).

40. А. А. Короновский, П. В. Попов, А. Е. Храмов, ЖТФ **75**(4), 1 (2005).

41. В. А. Бунина, А. А. Короновский, П. В. Попов, А. Е. Храмов, Изв. РАН, сер. физ. **69**, 1727 (2005).

42. Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов, *Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков*, т. 2, Физматлит, Москва (2004).

43. I. S. Aranson and L. Kramer, Rev. Mod. Phys. **74**, 99 (2002).

44. S. Boccaletti, J. Bragard, F. T. Arecchi, and H. Mancini, Phys. Rev. Lett. **83**, 536 (1999).

45. J. Bragard and S. Boccaletti, Phys. Rev. E **62**, 6346 (2000).

46. C. T. Zhou, Chaos **16**, 013124 (2006).

47. Z. Tasev, L. Kocarev, L. Junge, and U. Parlitz, Int. J. Bifurcation and Chaos **10**, 869 (2000).

48. S. Boccaletti, J. Bragard, and F. T. Arecchi, Phys. Rev. E **59**, 6574 (1999).

49. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, and S. Boccaletti, Int. J. Bifurcation and Chaos **18**, 258 (2008).

50. Д. И. Трубецков, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Изв. вузов, Радиофизика XLVII, 343 (2004).

51. R. A. Filatov, A. E. Hramov, and A. A. Koronovskii, Phys. Lett. **358 A**, 301 (2006).

52. S. Fahy and D. R. Hamann, Phys. Rev. Lett. **69**, 761 (1992).

53. G. Malescio, Phys. Rev. E **53**, 6551 (1996).

54. M. N. Lorenzo and V. Pérez-Muñuzuri, Phys. Rev. E **60**, 2779 (1999).

55. C. T. Zhou, J. Kurths, and E. Allaria, Phys. Rev. E **67**, 066220 (2003).

56. A. Neiman and D. F. Russell, Phys. Rev. Lett. **88**, 138103 (2002).

57. C. Yue-Hua, W. Zhi-Yuan, and Y. Jun-Zhong, Chinese Phys. Lett. **24**, 46 (2007).

58. K. Pyragas, Phys. Rev. E **56**, 5183 (1997).

59. L. Junge and U. Parlitz, Phys. Rev. E **61**, 3736 (2000).

60. D. Sweet, H. E. Nusse, and J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **86**, 2261 (2001).

61. L. Kocarev, Z. Tasev, and U. Parlitz, Phys. Rev. Lett. **79**, 51 (1997).

62. J. García-Ojalvo and J. M. Sancho, *Noise in Spatially Extended Systems*, Springer, New York (1999).

63. П. Роуч, *Вычислительная гидродинамика*, Мир, Москва (1980).

64. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, and O. I. Moskalenko, Europhys. Lett. **72**, 901 (2005).

65. P. Coullet and K. Emilsson, Physica D **61**, 119 (1992).

66. P. Glendinning and M. R. E. Proctor, Int. J. Bifurcation and Chaos **3**, 1447 (1993).

67. H. Chate, A. S. Pikovsky, and O. Rudzick, Physica D **131**, 17 (1999).

68. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. T. Flannery, *Numerical Recipes*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997).

69. J. García-Ojalvo, A. Hernández-Machado, and J. M. Sancho, Phys. Rev. Lett. **71**, 1542 (1993).

70. *Chemical Waves and Patterns*, ed. by R. Kapral and K. Showalter, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1995).

71. T. Sakurai, E. Mihaliuk, F. V. Chirilla, and K. Showalter, Science **296**, 2009 (2002).