ЖЭТФ, 2008, том 133, вып. 6, стр. 1169–1182 

# ПОЛУКЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД В ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ СВЕТА ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМИ КВАНТОВЫМИ ТОЧКАМИ

*И. Г. Ланг*, $\boxed{\textit{Л. И. Коровин}}$

*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук*
*194021, Санкт Петербург, Россия*

*С. Т. Павлов* *

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук*
*119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20 июля 2007 г.

Для теоретического описания упругого рассеяния света любыми полупроводниковыми квантовыми точками в условиях размерного квантования предложен полуклассический метод с использованием запаздывающих потенциалов, позволяющий избежать применения граничных условий для электрических и магнитных полей. Получены точные результаты для вектора Умова – Пойнтинга на больших расстояниях от квантовых точек в случае монохроматического и импульсного облучения, а также формулы для дифференциальных сечений рассеяния.

PACS: 78.47.-p, 78.66.-w

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Экситонные возбуждения в размерно-квантованных объектах пониженной размерности — квантовых ямах (КЯ), квантовых проволоках (КП), квантовых точках (КТ) — могут быть исследованы путем измерения упругого рассеяния света этими объектами. Если энергетические уровни экситонов дискретны, то рассеяние резонансно усиливается при совпадении частоты $\omega_l$ возбуждающего света с энергией $\hbar\omega_0$ экситона. Ширина резонансного пика определяется затуханием $\Gamma$ экситона.

В работе [1] было показано, что в процессах отражения света от КЯ величина $\Gamma$ состоит из двух частей, т. е. $\Gamma = \gamma_r + \gamma$, где $\gamma_r(\gamma)$ — радиационное (нерадиационное) затухание экситона. В работе [2] та же концепция была распространена на поглощение света квантовой ямой (см. также обзор [3]). Впервые отражение света от структур с КЯ, КП и КТ было рассмотрено в работе [4].

Существуют два способа теоретически исследовать рассеяние света полупроводниковыми квантовыми объектами — квантовый и полуклассический. Квантовый способ состоит в использовании квантовой теории возмущений. Электрическое поле квантуется, и рассматриваются процессы аннигиляции фотона с рождением экситона и наоборот. В работах [5] квантовый способ использован для вычисления сечений упругого рассеяния света на КТ любой формы, размеров и конфигурации. Квантовая теория возмущений позволяет получить результаты только в низшем порядке по взаимодействию электронов со светом, что исключает возможность учета радиационного затухания $\gamma_r$. Впрочем, нерадиационное затухание $\gamma$ также не появляется в квантовой теории, и резонансный знаменатель имеет вид $(\omega_l-\omega_0)^2+\delta^2$, $\delta \to 0$ вместо точной формулы $(\omega_l-\tilde{\omega}_0)^2+\Gamma^2/4$, где $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 + \Delta\omega$ — энергия экситона, перенормированная дальнодействующим обменным взаимодействием. Преимущество квантовой теории — ее простота.

Полуклассический способ сводится к вычислению классических электрических и магнитных полей, тогда как описание системы электронов в полупроводниковых объектах — квантовое (достаточно упомянуть, что в теории существенны величины $\mathbf{p}_{cv}$, которые являются недиагональными матричными элементами квазиимпульса, соответствующими рождению электронно-дырочных пар). Полукласси-

*E-mail: pavlov@sci.lebedev.ru

ческий способ начинается с вычисления средних по основному состоянию кристалла плотностей тока и заряда[1)], наведенных электрическим полем внутри полупроводникового объекта [6, 7]. Если в выражения для этих плотностей подставить возбуждающее электрическое поле $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$, то мы опять ограничимся низшим порядком по взаимодействию электронов со светом. Точные результаты можно получить, если подставить в эти выражения истинные электрические поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ внутри объектов. Тогда будут учтены все порядки по указанному взаимодействию.

Далее возможно применение двух разновидностей полуклассического метода. Первая разновидность — решение уравнений Максвелла внутри объекта и вне его и дальнейшее использование граничных условий для электрических и магнитных полей на границах объекта. Эта разновидность метода удобна, если коэффициенты преломления $\nu$ внутри объекта и $\nu_1$ вне его различны. Таким образом была решена задача об отражении и поглощении света широкими КЯ (ширина которых может сравниваться с длиной световой волны) [8–10]. В работе [11] подобным образом вычисляются электрические поля, возникающие при резонансном рассеянии света на экситоне в сферической КТ, состоящей из кубического кристалла класса $T_d$ (например, GaAs) и ограниченной бесконечно высоким прямоугольным потенциальным барьером при условии $\nu_1 \neq \nu$. Однако если в случае нормального падения света на поверхность КЯ граничные условия для полей относительно просты, то в случае сферических КТ использование граничных условий приводит к чрезвычайно громоздким вычислениям с использованием сферических функций, а в случае КТ других форм вычисления еще больше усложняются.

Поэтому мы предлагаем вторую разновидность полуклассического способа расчета, которую назовем методом запаздывающих потенциалов и будем использовать в настоящей работе. Суть метода состоит в следующем. Величины средних наведенных плотностей токов и зарядов подставляем в формулы для векторного и скалярного потенциалов. Используя полученные выражения для потенциалов, содержащие истинное электрическое поле внутри объекта, вычисляем электрическое поле внутри объекта и электрическое и магнитное поля вне объекта. Для электрического поля внутри объекта получаем интегральное уравнение, которое в некоторых случаях удается решить. После этого определяем поля вне объекта. Преимущество метода запаздывающих потенциалов состоит в том, что граничные условия не используются.

Для случая нормального падения света на поверхность КЯ метод запаздывающих потенциалов описан в работе [7] и применен в [12]. Показано, что в случае КЯ обе разновидности полуклассического способа (с использованием граничных условий и без) приводят к одинаковым результатам. В работе [4] использован способ расчета, близкий к методу запаздывающих потенциалов.

Будем рассматривать рассеяние света на КТ любой формы и размеров. Возбуждающее электрическое поле $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ выбираем в форме, позволяющей получать результаты как для монохроматического, так и импульсного облучения.

## 2. ПЛОТНОСТЬ ТОКА В СИСТЕМАХ ПОНИЖЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ

В работах [6, 13] построена квантовая теория электропроводности объектов пониженной размерности. Вычислены средние значения плотностей тока и заряда, наведенных слабым пространственно-неоднородным электромагнитным полем. Показано, что средние значения плотностей тока и заряда содержат два вклада, первый (основной) из которых выражается через электрическое поле, а второй — через первые производные от электрического поля по пространственным координатам. Выведено соответствующее выражение для зависящего от координат тензора электропроводности, справедливое для любых пространственно-неоднородных систем. В работе [13] обсуждаются условия, при соблюдении которых вклад, содержащий производные от электрического поля, может быть отброшен как малый. При нулевой температуре основной вклад в плотность наведенного тока определяется выражением

$$j_\alpha(\mathbf{r}, t) = \langle 0|j_\alpha(\mathbf{r}, t)|0\rangle = \frac{i}{\hbar}\int d^3r' \times$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \langle 0|[j_\alpha(\mathbf{r}, t), \bar{d}_\beta(\mathbf{r}', \mathbf{t}')]|0\rangle E_\beta(\mathbf{r}', \mathbf{t}') + \text{c.c.}, \quad (1)$$

где использованы следующие обозначения [6]: $\langle 0|\ldots|0\rangle$ — среднее значение по основному состоянию системы, $[\ldots, \ldots]$ — коммутатор двух операторов, $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t)$ и $\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$ — операторы плотностей тока и заряда в представлении взаимодействия, $\bar{\mathbf{d}}(\mathbf{r}) = \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \rho_i(\mathbf{r})$, $\bar{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i - \langle 0|\mathbf{r}_i|0\rangle$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — классическое электрическое поле.

[1)] Рассеяние с изменением частоты, например комбинационное, обусловлено флуктуациями плотностей тока и заряда.

Температуру считаем равной нулю. При выводе уравнения (1) предполагалось, что на бесконечно большом расстоянии отсутствуют заряды и токи, а на временах $t \to -\infty$ электромагнитное поле равно нулю, что соответствует адиабатическому включению поля. Подразумевается, что заряженные частицы взаимодействуют между собой и что могут присутствовать внешний потенциал и сильное постоянное магнитное поле помимо слабого электромагнитного.

Далее применяем формулу (1) к рассмотрению полупроводниковых объектов пониженной размерности (КЯ, КП и КТ) в условиях размерного квантования [7]. Полагаем, что частота возбуждающего монохроматического излучения или несущая частота при импульсном возбуждении близка к ширине $\hbar\omega_g$ запрещенной зоны полупроводника. Будем считать, что размеры объекта — ширина КЯ или радиусы проволоки или точки — много больше постоянной решетки $a$. Расстояния, на которых меняется огибающая волновой функции, много больше $a$ и сравнимы с размерами объекта. Тогда применимо приближение эффективной массы для электронов и дырок и выполняется условие размерного квантования. Последнее означает, что энергетический спектр экситонов в КТ дискретен.

При выполнении поставленных выше условий плотность тока (1) принимает вид [7]

$$j_\alpha(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k \times \\ \times \int_0^\infty d\omega\, \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega|\mathbf{r}) E_\beta(\mathbf{k},\omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega) = \int d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \mathbf{E}(\mathbf{r},t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t},$$

а тензор электропроводности

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega|\mathbf{r}) = \frac{ie^2}{\hbar\omega_g m_0}\sum_\eta \Bigg\{ p^*_{cv\eta\alpha} p_{cv\eta\beta} F_\eta(\mathbf{r}) \times \\ \times \int d^3r' \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} F^*_\eta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\omega-\omega_\eta+i\gamma_\eta/2} + \\ + p_{cv\eta\alpha} p^*_{cv\eta\beta} F^*_\eta(\mathbf{r}) \int d^3r' \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} F_\eta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\omega+\omega_\eta+i\gamma_\eta/2} \Bigg\}. \quad (3)$$

Использованы обозначения: $e = -|e|$ и $m_0$ — соответственно заряд и масса свободного электрона, $\mathbf{p}_{cv\eta}$ — межзонный матричный элемент квазиимпульса, соответствующий экситону с индексом $\eta$, $F_\eta(\mathbf{r})$ — медленно меняющаяся волновая функция экситона (огибающая) при $\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_h = \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}_e(\mathbf{r}_h)$ — радиус вектор электрона (дырки), $\hbar\omega_\eta$ и $\gamma_\eta$ — соответственно отсчитанная от энергии основного состояния энергия экситона с набором индексов $\eta$ и нерадиационное затухание экситона. В набор индексов $\eta$ включены обозначения зоны проводимости и валентной зоны полупроводника, к которым принадлежат электрон и дырка (эти обозначения относятся к $\mathbf{p}_{cv\eta}$), а также шесть индексов, характеризующих экситон в приближении эффективных масс (эти шесть индексов относятся к функции $F_\eta(\mathbf{r})$).

При выводе выражений (2) и (3) из формулы (1) использовано представление вторичного квантования, приближение эффективных масс, а также соотношения

$$\mathbf{d}_{cv} = -\frac{ie}{m_0\omega_g}\mathbf{p}_{cv}, \quad (4)$$

где $\mathbf{d}_{cv}$ — межзонный матричный элемент координаты, и

$$\langle|a_{\eta'}(t)a^\dagger_\eta(t')|\rangle = \\ = \delta_{\eta,\eta'} \exp[i\omega_{\eta'}(t'-t) - (\gamma_\eta/2)|t-t'|], \quad (5)$$

где $a^\dagger_\eta(a_\eta)$ — оператор рождения (уничтожения) экситона.

Формулу (2) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \frac{e^2}{\hbar\omega_g m_0^2}\sum_\eta F_\eta(\mathbf{r}) \int d^3r' F^*_\eta(\mathbf{r}') \int_{-\infty}^{t} dt' \times \\ \times \exp\left[-i\omega_\eta(t-t') - (\gamma_\eta/2)(t-t')\right] \times \\ \times \mathbf{p}^*_{cv\eta}(\mathbf{p}_{cv\eta}\cdot\mathbf{E}(r',t')) + \text{c.c.}, \quad (6)$$

из которого следует выполнение принципа причинности (переменная интегрирования $t' \le t$).

Далее снова переходим от временного к частотному представлению в пределах от $-\infty$ до $\infty$, что особенно удобно в случае импульсного возбуждения. Вводим фурье-образ $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\omega)$ электрического поля[2)]:

$$\mathbf{E}(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\omega) + \text{c.c.} \quad (7)$$

Тогда из выражения (6) получим

[2)] Разбиение в соотношении (7) на основной и сопряженный вклады проводим так, чтобы для возбуждающего поля получить выражение (37), см. ниже.

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\frac{ie^2}{2\pi\hbar\omega_g m_0^2}\times \sum_\eta\left\{\mathbf{p}^*_{cv\eta}F_\eta(\mathbf{r})\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}\times \int d^3r'F^*_\eta(\mathbf{r}')(\mathbf{p}_{cv\eta}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}',\omega))+ \mathbf{p}_{cv\eta}F^*_\eta(\mathbf{r})\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}\times \int d^3r'F_\eta(\mathbf{r}')(\mathbf{p}^*_{cv\eta}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}',\omega))\right\}+\text{c.c.}\quad(8)$$

Подчеркнем, что формулы (3), (6) и (8) применимы к любым объектам пониженной размерности — КЯ, КП и КТ.

## 3. ПЛОТНОСТИ ТОКА И ЗАРЯДА В КВАНТОВОЙ ТОЧКЕ

В случае квантовой точки «огибающую» функцию $F(\mathbf{r})$ можно всегда выбрать вещественной, что несколько упрощает выражение для наведенной плотности тока. Из формулы (8) получаем

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\frac{ie^2}{2\pi\hbar\omega_g m_0^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\, e^{-i\omega t}\sum_\eta F_\eta(\mathbf{r})\times \left(\frac{\mathbf{p}^*_{cv\eta}M_\eta}{\omega-\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}+\frac{\mathbf{p}_{cv\eta}\tilde{M}_\eta}{\omega+\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}\right)+\text{c.c.},\quad(9)$$

где

$$\begin{aligned}M_\eta&=\int d^3r\,F_\eta(\mathbf{r})(\mathbf{p}_{cv\eta}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\omega)),\\ \tilde{M}_\eta&=\int d^3r F_\eta(\mathbf{r})(\mathbf{p}^*_{cv\eta}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\omega)).\end{aligned}\quad(10)$$

Среднюю плотность $\rho(\mathbf{r},t)$ наведенного заряда внутри КТ определим из уравнения непрерывности как

$$\rho(\mathbf{r},t)=\frac{e^2}{2\pi\hbar\omega_g m_0^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega}\,e^{-i\omega t}\times \sum_\eta\left[\operatorname{div}(\mathbf{p}^*_{cv\eta}F_\eta(\mathbf{r}))\frac{M_\eta}{\omega-\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}+ \operatorname{div}(\mathbf{p}_{cv\eta}F_\eta(\mathbf{r}))\frac{\tilde{M}_\eta}{\omega+\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}\right]+\text{c.c.}\quad(11)$$

В правых частях формул (9) и (11) фигурирует истинное электрическое поле внутри КТ. Считаем, что при $r\to\infty$ функции $F(\mathbf{r})$ и $dF(\mathbf{r})/d\mathbf{r}$ стремятся к нулю, откуда следует, что плотности тока и заряда при $r\to\infty$ равны нулю.

## 4. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Векторный $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ и скалярный $\varphi(\mathbf{r},t)$ потенциалы (см., например, формулы в книге [14, с. 447]), соответствующие наведенному электромагнитному полю как внутри КТ, так и вне ее, получаем, подставив в эти формулы соотношения (9) и (11):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{ie^2}{2\pi\hbar\omega_g m_0^2 c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\, e^{-i\omega t}\times \sum_\eta\left(\frac{\mathbf{p}^*_{cv\eta}M_\eta}{\omega-\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}+\frac{\mathbf{p}_{cv\eta}\tilde{M}_\eta}{\omega+\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}\right)\times \int d^3r'F_\eta(\mathbf{r}')\frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\text{c.c.},\quad(12)$$

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{e^2}{2\pi\hbar\omega_g m_0^2\nu^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega}e^{-i\omega t}\times \sum_\eta\left(\frac{\mathbf{p}^*_{cv\eta}M_\eta}{\omega-\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}+\frac{\mathbf{p}_{cv\eta}\tilde{M}_\eta}{\omega+\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}\right)\times \int d^3r'\frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{d}{d\mathbf{r}'}F_\eta(\mathbf{r}')+\text{c.c.},\quad(13)$$

где $\nu$ — коэффициент преломления, который мы считаем одинаковым как внутри КТ, так и вне ее, $k=\omega\nu/c$. В правой части выражения (13) от производной по $\mathbf{r}'$ переходим к производной по $\mathbf{r}$. Получаем

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{e^2}{2\pi\hbar\omega_g m_0^2\nu^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega}e^{-i\omega t}\times \sum_\eta\left(\frac{\mathbf{p}^*_{cv\eta}M_\eta}{\omega-\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}+\frac{\mathbf{p}_{cv\eta}\tilde{M}_\eta}{\omega+\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}\right)\times \frac{d}{d\mathbf{r}}\int d^3r'\frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}F_\eta(\mathbf{r}')+\text{c.c.}\quad(14)$$

## 5. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ И МАГНИТНОЕ ПОЛЯ

Наведенные электрическое и магнитное поля определены как

$$\begin{gathered}\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}-\frac{\partial\varphi(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}},\\ \Delta\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},\mathbf{t}).\end{gathered}\quad(15)$$

Вычислим поля $\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ на очень больших расстояниях $r$ от КТ, превышающих прочие величины размерности длины, существенные в задаче. Это означает, что мы определим поля в пределе $r \to \infty$.

Вычислим интеграл

$$J_\eta(\mathbf{r}) = \int d^3r' F_\eta(\mathbf{r}') \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (16)$$

Поскольку в пределе $r \to \infty$

$$\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \approx \exp\left[ikr - ik(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')/r\right],$$

получаем

$$J_\eta(\mathbf{r})|_{r\to\infty} = \frac{e^{ikr}}{r} P_\eta(\mathbf{k}_s), \qquad (17)$$

где мы ввели обозначения

$$\mathbf{k}_s = k\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad P_\eta(\mathbf{k}) = \int d^3r F_\eta(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \qquad (18)$$

причем $\mathbf{k}_s$ — волновой вектор рассеянного света. Также получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} J_\eta(\mathbf{r})\right)_{r\to\infty} = ik\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{e^{ikr}}{r} P_\eta(\mathbf{k}_s). \qquad (19)$$

Используя выражения (17) и (19) и отбрасывая вклады, малые при $r \to \infty$, получаем для полей на больших расстояниях от КТ следующие выражения:

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r},t)|_{r\to\infty} = \frac{e^2}{2\pi\hbar\omega_g m_0^2 c^2 r} \times \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \omega e^{i(kr-\omega t)} \sum_\eta P_\eta(\mathbf{k}_s) \times \times \left\{ \frac{\left[\left(\mathbf{p}^*_{cv\eta}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{p}^*_{cv\eta}\right] M_\eta}{\omega - \omega_\eta + i\gamma_\eta/2} + \right. + \left. \frac{\left[\left(\mathbf{p}_{cv\eta}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{p}_{cv\eta}\right] \tilde{M}_\eta}{\omega + \omega_\eta + i\gamma_\eta/2} \right\} + \text{c.c.}, \qquad (20)$$

$$\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r},t)|_{r\to\infty} = \frac{e^2\nu}{2\pi\hbar\omega_g m_0^2 c^2 r} \times \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \omega e^{i(kr-\omega t)} \sum_\eta P_\eta(\mathbf{k}_s) \times \times \left\{ \frac{\left[\mathbf{p}^*_{cv\eta}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right] M_\eta}{\omega - \omega_\eta + i\gamma_\eta/2} + \frac{\left[\mathbf{p}_{cv\eta}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right] \tilde{M}_\eta}{\omega + \omega_\eta + i\gamma_\eta/2} \right\} + \text{c.c.}, \qquad (21)$$

откуда следует, что при $r \to \infty$ поля $\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ направлены перпендикулярно радиус-вектору $\mathbf{r}$.

## 6. РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ НА КОМПОНЕНТЫ С ПРАВОЙ И ЛЕВОЙ КРУГОВЫМИ ПОЛЯРИЗАЦИЯМИ

Введем векторы круговой поляризации

$$\mathbf{e}_s^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y),$$

где орты $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ перпендикулярны оси $z$, направленной вдоль вектора $\mathbf{r}$. Поля запишем в виде

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{E}(\mathbf{r},t)|_{r\to\infty} &= \mathbf{E}_c(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}_c^*(\mathbf{r},t), \\ \Delta\mathbf{H}(\mathbf{r},t)|_{r\to\infty} &= \mathbf{H}_c(\mathbf{r},t) + \mathbf{H}_c^*(\mathbf{r},t), \end{aligned} \qquad (22)$$

после чего разложим их по поляризациям:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_c(\mathbf{r},t) &= E^+(\mathbf{r},t)\mathbf{e}_s^+ + E^-(\mathbf{r},t)\mathbf{e}_s^-, \\ \mathbf{H}_c(\mathbf{r},t) &= H^+(\mathbf{r},t)\mathbf{e}_s^+ + H^-(\mathbf{r},t)\mathbf{e}_s^-. \end{aligned} \qquad (23)$$

Умножая обе части равенств (23) последовательно на $\mathbf{e}_s^+$ и $\mathbf{e}_s^-$, находим, что

$$E^\pm(\mathbf{r},t) = -\frac{e^2}{2\pi\hbar\omega_g m_0^2 c^2 r} \times \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \omega e^{i(kr-\omega t)} Q(\mathbf{k}_s,\omega,\mathbf{e}_s^\pm), \qquad (24)$$

$$H^\pm(\mathbf{r},t) = \mp i\nu E^\pm(\mathbf{r},t), \qquad (25)$$

где

$$Q(\mathbf{k}_s,\omega,\mathbf{e}_s) = \sum_\eta P_\eta(\mathbf{k}_s) \times \times \left\{ \frac{(\mathbf{p}_{cv\eta}\cdot\mathbf{e}_s)^* M_\eta}{\omega - \omega_\eta + i\gamma_\eta/2} + \frac{(\mathbf{p}_{cv\eta}\cdot\mathbf{e}_s^*)\tilde{M}_\eta}{\omega + \omega_\eta + i\gamma_\eta/2} \right\}. \qquad (26)$$

## 7. ВЕКТОР УМОВА–ПОЙНТИНГА

Вектор Умова–Пойнтинга [14, с. 431] равен

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t)|_{r\to\infty} = \frac{c}{4\pi}\{\mathbf{E}_c(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}_c^*(\mathbf{r},t) + + \mathbf{E}_c^*(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}_c(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}_c(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}_c(\mathbf{r},t) + + \mathbf{E}_c^*(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}_c^*(\mathbf{r},t)\}. \qquad (27)$$

Два первых члена из правой части выражения (27) дают основной вклад в вектор Умова–Пойнтинга, усредненный по времени[3]. Ограничиваясь этим вкладом, имеем

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t)|_{r\to\infty} = \sum_{\mu} \mathbf{S}(\mathbf{r},t,\mathbf{e}_s), \tag{28}$$

где суммирование ведется по круговым поляризациям рассеянного света,

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t,\mathbf{e}_s)|_{r\to\infty} = \frac{\nu}{(2\pi)^3}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{\mathbf{r}}{\omega_g^2 m_0^4 c r^3} \times \\ \times \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \omega e^{i(kr-\omega t)} Q(\mathbf{k}_s,\omega,\mathbf{e}_s)\right|^2. \tag{29}$$

Раскрывая квадрат модуля в правой части, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega\omega' e^{i(k-k')r - i(\omega-\omega')t} Q(\mathbf{k}_s,\omega,\mathbf{e}_s) \times \\ \times Q^*(\mathbf{k}'_s,\omega',\mathbf{e}_s), \tag{30}$$

где $k' = \omega'\nu/c$, $\mathbf{k}'_s = k'\mathbf{r}/r$.

Возбуждающее поле определяется как

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r},t) = E_0 \mathbf{e}_l \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\, D_0(\omega) + \text{c.c.}, \tag{31}$$

где $\mathbf{e}_l$ — вектор поляризации, $\mathbf{k}$ — вектор, модуль которого равен $\omega\nu/c$, а направление определяется направлением распространения возбуждающего света. Множитель $D_0(\omega)$ описывает форму возбуждающего импульса. Для случая монохроматического возбуждения

$$D_0(\omega) = \delta(\omega - \omega_l), \tag{32}$$

а для случая импульсного облучения частота «размыта» около величины $\omega_l$ на некоторый интервал $\Delta\omega$, обратно пропорциональный длительности $\Delta t$ импульса. В любом случае несущая частота $\omega_l$ «выпадает» из выражения (30) из-за множителя $\exp[-i(\omega-\omega')t]$ под интегралом. Вклад двух последних членов из правой части соотношения (27) содержит под интегралом $\exp[-i(\omega+\omega')t]$, что делает этот вклад быстро осциллирующим во времени и близким к нулю при усреднении по времени.

[3] Здесь имеется в виду усреднение по сравнительно малому отрезку времени, превышающему период $T_l = 2\pi/\omega_l$, где $\omega_l$ — частота света при монохроматическом облучении или несущая частота при импульсном облучении.

## 8. СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ

В случае монохроматического облучения, когда выполняется условие (32), удобно ввести понятие сечения рассеяния на КТ. Дифференциальное сечение рассеяния определяется как отношение модуля потока рассеянной энергии в интервал $do_s$ телесного угла к модулю потока падающей энергии на единицу площади в единицу времени, который в случае монохроматического облучения равен

$$|\mathbf{S}_0| = \frac{c\nu}{2\pi} E_0^2. \tag{33}$$

Используя соотношения (28) и (29), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{do_s} &= \sum_{\mu} \frac{d\sigma_\mu}{do_s}, \\ \frac{d\sigma_\mu}{do_s} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{1}{\omega_g^2 m_0^4 c^2 E_0^2} \times \\ &\times \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \omega e^{i(kr-\omega t)} Q(\mathbf{k}_s,\omega,\mathbf{e}_s)\right|^2. \end{aligned} \tag{34}$$

В случае монохроматического облучения в выражении для $Q(\mathbf{k}_s,\omega,\mathbf{e}_s)$ всегда присутствует множитель $\delta(\omega-\omega_l)$. Это означает, что можно записать

$$Q(\mathbf{k}_s,\omega,\mathbf{e}_s) = \xi(\mathbf{k}_s,\omega_l,\mathbf{e}_s)\delta(\omega-\omega_l), \tag{35}$$

и тогда выражение (34) преобразуется к виду

$$\frac{d\sigma_\mu}{do_s} = \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{\omega_l^2}{\omega_g^2 m_0^4 c^2 E_0^2} \left|\xi(\mathbf{k}_s,\omega_l,\mathbf{e}_s)\right|^2, \tag{36}$$

и зависимость от расстояния $r$ и времени $t$ исчезает. В формуле (35) и ниже, где речь пойдет о монохроматическом возбуждении, используется обозначение $\mathbf{k}_s = k_l\mathbf{r}/r$, где $k_l = \omega_l\nu/c$.

## 9. НИЗШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПО ВЗАИМОДЕЙСТВИЮ ЭЛЕКТРОНОВ СО СВЕТОМ

В низшем приближении истинное электрическое поле внутри КТ, входящее в выражения для величин $M_\eta(\omega)$ и $\tilde{M}_\eta(\omega)$, заменяется возбуждающим полем. Согласно выражению (31), фурье-образ поля имеет вид

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_0(\mathbf{r},\omega) = 2\pi \mathbf{e}_l E_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} D_0(\omega). \tag{37}$$

Тогда

$$\begin{aligned} M_{\eta 0} &= 2\pi E_0 D_0(\omega) P_\eta^*(\mathbf{k})(\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{p}_{cv\eta}), \\ \tilde{M}_{\eta 0} &= 2\pi E_0 D_0(\omega) P_\eta^*(\mathbf{k})(\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{p}^*_{cv\eta}), \end{aligned} \tag{38}$$

$$Q_0 = 2\pi E_0 D_0(\omega) \sum_\eta P_\eta(\mathbf{k}_s) P_\eta^*(\mathbf{k}) \times \\ \times \left\{ \frac{(\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{p}_{cv\eta})^* (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{p}_{cv\eta})}{\omega - \omega_\eta + i\gamma_\eta/2} + \right. \\ \left. + \frac{(\mathbf{e}_s^* \cdot \mathbf{p}_{cv\eta})(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{p}_{cv\eta}^*)}{\omega + \omega_\eta + i\gamma_\eta/2} \right\}. \quad (39)$$

Подставляя (39) в выражения (24), (25) и (29), получаем результаты для электрического и магнитного полей и для вектора Умова–Пойнтинга в пределе $r \to \infty$.

В случае монохроматического облучения для дифференциального сечения получаем

$$\frac{d\sigma_{\mu 0}}{do_s} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{\omega_l^2}{\omega_g^2 m_0^4 c^2} \times \\ \times \left| \sum_\eta P_\eta(\mathbf{k}_s) P_\eta^*(\mathbf{k}_l) (\mathbf{v}_\eta \cdot \mathbf{e}_s^*) \right|^2, \quad (40)$$

где

$$|\mathbf{k}_s| = |\mathbf{k}_l| = \frac{\omega_l \nu}{c}, \\ \mathbf{v}_\eta = \frac{\mathbf{p}_{cv\eta}^* (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{p}_{cv\eta})}{\omega_l - \omega_\eta + i\gamma_\eta/2} + \frac{\mathbf{p}_{cv\eta} (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{p}_{cv\eta}^*)}{\omega_l + \omega_\eta + i\gamma_\eta/2}. \quad (41)$$

## 10. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОЛУКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ С РЕЗУЛЬТАТАМИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ [5]

В формуле (41) отбросим нерезонансный член, содержащий $(\omega + \omega_\eta + i\gamma_\eta/2)^{-1}$. Получаем

$$\frac{d\sigma_{\mu 0}}{do_s} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{\omega_l^2}{\omega_g^2 m_0^4 c^2} \times \\ \times \left| \sum_\eta \frac{P_\eta(\mathbf{k}_s) P_\eta^*(\mathbf{k}_l) (\mathbf{p}_{cv\eta} \cdot \mathbf{e}_l)(\mathbf{p}_{cv\eta} \cdot \mathbf{e}_s)^*}{\omega_l - \omega_\eta + i\gamma_\eta/2} \right|^2. \quad (42)$$

Этот результат очень близок к результатам квантовой теории (см. формулу (15) из работы [5]), только множитель $(\omega_l/\omega_g)^4$ заменен на $(\omega_l/\omega_g)^2$, что несущественно в условиях резонанса, и величина $(\omega - \omega_\eta + i\delta)^{-1}$ заменена на $(\omega - \omega_\eta + i\gamma_\eta/2)^{-1}$. Очевидно, что полуклассический метод дает более точные результаты даже в низшем приближении по взаимодействию электронов со светом, так как позволяет включить в теорию нерадиационное затухание $\gamma_\eta$ (которое обусловливает поглощение света квантовой точкой). Кроме того, полуклассический метод позволяет рассмотреть рассеяние и поглощение света в случае импульсного облучения. Из соотношения (42) следует, что если длина световой волны превышает размеры КТ и

$$P_\eta(\mathbf{k}_l) \approx P_\eta(\mathbf{k}_s) \approx P_\eta(0),$$

то поляризация и угловое распределение рассеянного света зависят только от векторов $\mathbf{p}_{cv\eta}$, соответствующих экситону, в резонансе с которым находится возбуждающий свет.

Далее перейдем к построению точной полуклассической теории, учитывающей все порядки по взаимодействию электронов со светом.

## 11. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВНУТРИ КТ

Для точного вычисления электрического и магнитного полей и вектора Умова–Пойнтинга при $r \to \infty$, а также для вычисления сечения рассеяния, необходимо вычислить величины $M_\eta$ и $\tilde{M}_\eta$, определенные в (10) и входящие в правую часть выражения (26), т. е. подставить в (10) фурье-компоненты истинного электрического поля внутри КТ. Уравнение для этих фурье-компонент $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ получим следующим образом.

Запишем истинное поле внутри КТ в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}, \quad (43)$$

где $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ — возбуждающее электрическое поле, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — векторный (12) и скалярный (13) потенциалы, соответствующие вторичному излучению КТ. Для фурье-компоненты $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ поля (43) получаем выражение

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 2\pi \mathbf{e}_l E_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} D_0(\omega) - \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\omega}{\omega_g m_0^2 c} \times \\ \times \sum_\eta \left\{ \frac{M_\eta \left[\mathbf{p}_{cv\eta}^* + \frac{1}{k^2}\left(\mathbf{p}_{cv\eta}^* \cdot \frac{d}{d\mathbf{r}}\right)\frac{d}{d\mathbf{r}}\right]}{\omega - \omega_\eta + i\gamma_\eta/2} + \right. \\ \left. + \frac{\tilde{M}_\eta \left[\mathbf{p}_{cv\eta} + \frac{1}{k^2}\left(\mathbf{p}_{cv\eta} \cdot \frac{d}{d\mathbf{r}}\right)\frac{d}{d\mathbf{r}}\right]}{\omega + \omega_\eta + i\gamma_\eta/2} \right\} \Phi_\eta(\mathbf{r}), \quad (44)$$

где

$$\Phi_\eta(\mathbf{r}) = \int d^3 r' F_\eta(\mathbf{r}') \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (45)$$

Таким образом, мы получили интегральное уравнение для фурье-компоненты $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ истинного электрического поля внутри КТ.

## 12. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ $M_\eta$ И $\tilde{M}_\eta$

Умножаем уравнение (44) на $F_{\eta'}(\mathbf{r})\mathbf{p}_{cv\eta'}$ и интегрируем по $\mathbf{r}$, затем проделываем ту же операцию, используя $F_{\eta'}(\mathbf{r})\mathbf{p}^*_{cv\eta'}$. Получаем следующую систему уравнений для коэффициентов $M_\eta$ и $\tilde{M}_\eta$:

$$\begin{gathered} M_{\eta'} = 2\pi E_0 D_0(\omega)(\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{p}_{cv\eta'})P^*_{\eta'}(\mathbf{k}) - \\ - \frac{e^2}{\hbar c}\frac{\omega}{\omega_g m_0^2 c}\times \\ \times\sum_\eta\left\{\frac{M_\eta R_{\eta\eta'}}{\omega-\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}+\frac{\tilde{M}_\eta S_{\eta\eta'}}{\omega+\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}\right\}, \\ \tilde{M}_{\eta'} = 2\pi E_0 D_0(\omega)(\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{p}^*_{cv\eta'})P^*_{\eta'}(\mathbf{k}) - \\ - \frac{e^2}{\hbar c}\frac{\omega}{\omega_g m_0^2 c}\times \\ \times\sum_\eta\left\{\frac{M_\eta \tilde{S}_{\eta\eta'}}{\omega-\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}+\frac{\tilde{M}_\eta \tilde{R}_{\eta\eta'}}{\omega+\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}\right\}, \end{gathered} \tag{46}$$

где тильда над буквой означает, как и в выражении (10), замену вектора $\mathbf{p}_{cv\eta}$ на $\mathbf{p}^*_{cv\eta}$ и наоборот, а

$$\begin{gathered} R_{\eta\eta'} = (\mathbf{p}^*_{cv\eta}\cdot\mathbf{p}_{cv\eta'})\int d^3r F_{\eta'}(\mathbf{r})\Phi_\eta(\mathbf{r}) + \\ + \frac{1}{k^2}\int d^3r F_{\eta'}(\mathbf{r})\left(\mathbf{p}_{cv\eta'}\cdot\frac{d}{d\mathbf{r}}\right)\times \\ \times\left(\mathbf{p}^*_{cv\eta}\cdot\frac{d}{d\mathbf{r}}\right)\Phi_\eta(\mathbf{r}), \\ S_{\eta\eta'} = (\mathbf{p}_{cv\eta}\cdot\mathbf{p}_{cv\eta'})\int d^3r F_{\eta'}(\mathbf{r})\Phi_\eta(\mathbf{r}) + \\ + \frac{1}{k^2}\int d^3r F_{\eta'}(\mathbf{r})\left(\mathbf{p}_{cv\eta'}\cdot\frac{d}{d\mathbf{r}}\right)\times \\ \times\left(\mathbf{p}_{cv\eta}\cdot\frac{d}{d\mathbf{r}}\right)\Phi_\eta(\mathbf{r}). \end{gathered} \tag{47}$$

## 13. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ $\Phi(\mathbf{r})$

Для дальнейших вычислений удобно функцию $\Phi(\mathbf{r})$ из соотношения (45) разложить в интеграл Фурье:

$$\begin{gathered} \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q\, P(\mathbf{q}) f_k(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \\ f_k(\mathbf{q}) = \int d^3r\, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\frac{e^{ikr}}{r}. \end{gathered} \tag{48}$$

Интегрируя по $\mathbf{r}$, получаем

$$\begin{gathered} f_k(\mathbf{q}) = f_k(q) = \frac{2\pi}{q}\times \\ \times\left\{\frac{P}{q-k}+\frac{P}{q+k}+i\pi\delta(q-k)-i\pi\delta(q+k)\right\}, \end{gathered} \tag{49}$$

где

$$\frac{P}{a-b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-b+i\delta}+\frac{1}{a-b-i\delta}\right), \quad \delta\to+0.$$

Последний член в правой части уравнения (49) можно отбросить. Получаем

$$\begin{gathered} \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}P(\mathbf{q})\times \\ \times\left\{4\pi\frac{P}{q^2-k^2}+\frac{2i\pi^2}{k}\delta(q-k)\right\}. \end{gathered} \tag{50}$$

## 14. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДЕННОГО УРОВНЯ

Рассмотрим экситонный уровень, $n$-кратно вырожденный. Без учета взаимодействия электронов со светом имеем

$$\omega_\eta = \omega_0, \tag{51}$$

а также

$$\begin{gathered} \gamma_\eta = \gamma, \quad F_\eta(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}), \\ P_\eta(\mathbf{k}) = P(\mathbf{k}), \quad \Phi_\eta(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}). \end{gathered} \tag{52}$$

От индекса $\eta$, принимающего $n$ значений, зависят только векторы $\mathbf{p}_{cv\eta}$. Ограничиваясь только этим уровнем (предполагая, что частота возбуждающего света находится в резонансе с $\omega_0$), из системы (46) с учетом соотношения (50) получаем $2n$ алгебраических уравнений для $2n$ неизвестных $M_\eta$ и $\tilde{M}_\eta$:

$$\begin{gathered} M_{\eta'} = 2\pi E_0 D_0(\omega)(\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{p}_{cv\eta'})P^*(\mathbf{k}) + \\ + \sum_\eta\left\{\frac{M_\eta\Omega(\mathbf{p}^*_{cv\eta},\mathbf{p}_{cv\eta'})}{\omega-\omega_0+i\gamma/2} + \right. \\ \left. + \frac{\tilde{M}_\eta\Omega(\mathbf{p}_{cv\eta},\mathbf{p}_{cv\eta'})}{\omega+\omega_0+i\gamma/2}\right\}, \\ \tilde{M}_{\eta'} = 2\pi E_0 D_0(\omega)(\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{p}^*_{cv\eta'})P^*(\mathbf{k}) + \\ + \sum_\eta\left\{\frac{M_\eta\Omega(\mathbf{p}^*_{cv\eta},\mathbf{p}^*_{cv\eta'})}{\omega-\omega_0+i\gamma/2} + \right. \\ \left. + \frac{\tilde{M}_\eta\Omega(\mathbf{p}_{cv\eta},\mathbf{p}^*_{cv\eta'})}{\omega+\omega_0+i\gamma/2}\right\}, \end{gathered} \tag{53}$$

где

$$\Omega(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)=\Omega(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1)= \\ =\Delta\omega(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)-i\gamma_r(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)/2, \quad (54)$$

$$\Delta\omega(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)=\frac{e^2}{2\pi^2\hbar c}\frac{\omega}{\omega_g m_0^2 ck^2}\int d^3q|P(\mathbf{q})|^2\times \\ \times\left\{\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2+[(\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}_1)(\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}_2)-q^2(\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2)]\times\right. \\ \left.\times\frac{P}{k^2-q^2}\right\}, \quad (55)$$

$$\gamma_r(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)=\frac{e^2}{2\pi\hbar c}\frac{\omega}{\omega_g m_0^2 ck}\times \\ \times\int do_{\mathbf{k}}|P(\mathbf{k})|^2\{k^2(\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2)-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_1)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_2)\}. \quad (56)$$

Решив систему уравнений (53), в принципе можно определить электрические и магнитные поля (и вектор Умова–Пойнтинга) на больших расстояниях от КТ любой конфигурации и размеров при монохроматическом и импульсном облучении.

## 15. СЛУЧАЙ ЭКСИТОНА $\Gamma_6\times\Gamma_7$ В КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ КЛАССА СИММЕТРИИ $T_d$

В качестве примера рассмотрим экситон, образованный электроном из дважды вырожденной зоны $\Gamma_6$ проводимости и дыркой из дважды вырожденной валентной зоны $\Gamma_7$, отщепленной спин-орбитальным взаимодействием. Согласно обозначениям из [15, с. 73], волновые функции электронов имеют структуру

$$\Psi_{c1}=iS\uparrow, \quad \Psi_{c2}=iS\downarrow, \quad (57)$$

а волновые функции дырок —

$$\Psi_{h1}=\frac{1}{\sqrt3}(X-iY)\uparrow-\frac{1}{\sqrt3}Z\downarrow, \\ \Psi_{h2}=\frac{1}{\sqrt3}(X+iY)\downarrow+\frac{1}{\sqrt3}Z\uparrow. \quad (58)$$

Комбинируя функции (57) и (58) попарно, получаем четырежды вырожденное экситонное состояние, для которого

$$\mathbf{p}_{cv1}=\frac{p_{cv}}{\sqrt3}(\mathbf{e}_x-i\mathbf{e}_y), \quad \mathbf{p}_{cv2}=\frac{p_{cv}}{\sqrt3}(\mathbf{e}_x+i\mathbf{e}_y), \\ \mathbf{p}_{cv3}=\frac{p_{cv}}{\sqrt3}\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{p}_{cv4}=-\frac{p_{cv}}{\sqrt3}\mathbf{e}_z, \quad (59)$$

где мы ввели скаляр

$$p_{cv}=i\langle S|\hat p_x|X\rangle, \quad (60)$$

$\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z$ — орты вдоль кристаллографических осей.

Рассмотрим круговую поляризацию возбуждающего и рассеянного света, т. е. положим

$$\mathbf{e}_l^{\pm}=\frac{1}{\sqrt2}(\mathbf{e}_{xl}\pm\mathbf{e}_{yl}), \quad \mathbf{e}_s^{\pm}=\frac{1}{\sqrt2}(\mathbf{e}_{xs}\pm\mathbf{e}_{ys}), \quad (61)$$

где орты $\mathbf{e}_{xl}$ и $\mathbf{e}_{yl}$ перпендикулярны оси $z$, направленной вдоль вектора $\mathbf{k}$, а орты $\mathbf{e}_{xs}$ и $\mathbf{e}_{ys}$ перпендикулярны оси $z_s$, направленной вдоль вектора $\mathbf{k}_s$.

В случае рассматриваемого примера экситона $\Gamma_6\times\Gamma_7$ удобнее сразу в выражениях (9) и (11) соответственно для плотности тока и заряда провести суммирование по индексам $\eta$, используя соотношения (59). Способ вычислений, описанный в разд. 4–14, естественно, приводит к тем же результатам. Проведя указанное суммирование, получаем следующие выражения:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\frac{ie^2p_{cv}^2}{3\pi\hbar\omega_g m_0^2}F(\mathbf{r})\times \\ \times\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\, e^{-i\omega t}\mathbf{T}(\omega)L(\omega)+\text{c.c.}, \quad (62)$$

$$\rho(\mathbf{r},t)=\frac{e^2p_{cv}^2}{3\pi\hbar\omega_g m_0^2}\times \\ \times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega}e^{-i\omega t}\frac{dF(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}}\cdot\mathbf{T}(\omega)L(\omega)+\text{c.c.}, \quad (63)$$

где введены новые обозначения

$$\mathbf{T}(\omega)=\int d^3r\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\omega)F(\mathbf{r}), \\ L(\omega)=\frac{1}{\omega-\omega_0+i\gamma/2}+\frac{1}{\omega+\omega_0+i\gamma/2}. \quad (64)$$

Выражения (62) и (63) не содержат в явном виде векторов $\mathbf{p}_{cv\eta}$ и позволяют вычислить резонансное сечение рассеяния света на КТ с экситоном $\Gamma_6\times\Gamma_7$ по более удобной процедуре, которая описана ниже. Из уравнений (62) и (63) следует, что в случае экситонов $\Gamma_6\times\Gamma_7$ все искомые величины не зависят от направления кристаллографических осей.

Векторный и скалярный потенциалы равны

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{ie^2p_{cv}^2}{3\pi\hbar\omega_g m_0^2 c}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\, e^{-i\omega t}L(\omega)\mathbf{T}(\omega)\times \\ \times\int d^3r'F(\mathbf{r}')\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\text{c.c.}, \quad (65)$$

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{e^2p_{cv}^2}{3\pi\hbar\omega_g m_0^2\nu^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega}e^{-i\omega t}L(\omega)\mathbf{T}(\omega)\frac{d}{d\mathbf{r}}\times \\ \times\int d^3r'F(\mathbf{r}')\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\text{c.c.} \quad (66)$$

Для электрических и магнитных полей можно использовать формулы (22)–(25) с подстановкой

$$Q(\mathbf{k}_s,\omega,\mathbf{e}_s)=\frac{2p_{cv}^2}{3}P(\mathbf{k}_s)(\mathbf{T}(\omega)\cdot\mathbf{e}_s^*)L(\omega). \quad (67)$$

Для вектора Умова–Пойнтинга при $r\to\infty$ следует использовать формулу (29) с подстановкой (67). Для сечения рассеяния при монохроматическом облучении применимы точные формулы (35), (36) с подстановкой (67). В низшем порядке по взаимодействию электронов со светом получаем

$$\frac{d\sigma_\mu}{do_s}= \\ =\frac{4}{9}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2\frac{p_{cv}^4\omega_l^2}{\omega_g^2m_0^4c^2}|\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{e}_s^*|^2|P(\mathbf{k}_l)|^2|P(\mathbf{k}_s)|^2\times \\ \times\left|\frac{1}{\omega_l-\omega_0+i\gamma/2}+\frac{1}{\omega_l+\omega_0+i\gamma/2}\right|^2, \quad (68)$$

причем

$$|\mathbf{e}_l^+\cdot\mathbf{e}_s^-|^2=\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^2, \\ |\mathbf{e}_l^+\cdot\mathbf{e}_s^+|^2=\frac{1}{4}(1-\cos\theta)^2, \quad (68')$$

где $\theta$ — угол рассеяния, что совпадает с формулами (32)–(35) работы [5], если в выражении (68) отбросить нерезонансный вклад, пропорциональный $(\omega_l+\omega_0+i\gamma/2)^{-1}$, заменить множители $(\omega_l/\omega_g)^2$ на $(\omega_l/\omega_g)^4$ и $(\omega_l-\omega_0+i\gamma/2)^{-1}$ на $(\omega_l-\omega_0+i\delta)^{-1}$, $\delta\to 0$.

## 16. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВНУТРИ КТ В СЛУЧАЕ ЭКСИТОНА $\Gamma_6\times\Gamma_7$

Подставив в (43) выражения (65) и (66), получим уравнение для фурье-компонент электрического поля:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\omega)=2\pi E_0\mathbf{e}_le^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}D_0(\omega)-\frac{2}{3}\frac{e^2}{\hbar c}\frac{p_{cv}^2\omega}{m_0^2\omega_gc}L(\omega)\times \\ \times\left[\mathbf{T}(\omega)+k^{-2}\left(\mathbf{T}(\omega)\cdot\frac{d}{d\mathbf{r}}\right)\frac{d}{d\mathbf{r}}\right]\Phi(\mathbf{r}). \quad (69)$$

Уравнение (69) можно получить также из соотношения (44), подставив в него векторы $\mathbf{p}_{cv\eta}$ из (59) и выполнив суммирование по индексам $\eta$, принимающим значения от 1 до 4. Умножим обе стороны уравнения (69) на величину $F(\mathbf{r})$ и проинтегрируем по $\mathbf{r}$. Получаем уравнение для вектора $\mathbf{T}(\omega)$:

$$\mathbf{T}(\omega)=2\pi E_0\mathbf{e}_l\mathcal{D}_0(\omega)P^*(\mathbf{k})-C(\omega)\int d^3r\times \\ \times\left[\mathbf{T}(\omega)\Phi(\mathbf{r})+\frac{1}{k^2}\left(\mathbf{T}(\omega)\cdot\frac{d}{d\mathbf{r}}\right)\frac{d}{d\mathbf{r}}\Phi(\mathbf{r})\right], \quad (70)$$

где введено обозначение

$$C(\omega)=\frac{2}{3}\frac{e^2}{\hbar c}\frac{p_{cv}^2\omega}{\omega_g\,m_0^2c}L(\omega), \quad (71)$$

а для функции $\Phi(\mathbf{r})$ будем использовать выражение (50). Подставив (50) в (70), получаем

$$\mathbf{T}(\omega)\left[1+C(\omega)\int d^3q\,J(\mathbf{q})\right]=2\pi E_0\mathbf{e}_l\mathcal{D}_0(\omega)P^*(\mathbf{k})+ \\ +\frac{C(\omega)}{k^2}\int d^3q\,\mathbf{q}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{T}(\omega))J(\mathbf{q}), \quad (72)$$

$$J(\mathbf{q})=|P(\mathbf{q})|^2\left[\frac{1}{2\pi^2}\frac{P}{q^2-k^2}+\frac{i}{4\pi k}\delta(q-k)\right]. \quad (73)$$

Уравнение (72) можно трактовать как систему трех уравнений для трех компонент $T_x(\omega)$, $T_y(\omega)$, $T_z(\omega)$ вектора $\mathbf{T}(\omega)$. Результат следует подставить в формулу для сечения рассеяния при монохроматическом возбуждении или в формулу для вектора Умова–Пойнтинга при $r\to\infty$ при импульсном возбуждении. Таким образом, в принципе решена задача о резонансном рассеянии света на КТ любой формы с экситоном $\Gamma_6\times\Gamma_7$ при произвольном соотношении размеров КТ и длины световой волны.

## 17. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ РАССЕЯНИЯ СВЕТА НА ЭКСИТОНЕ $\Gamma_6\times\Gamma_7$ В СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ КТ ИЛИ В ЛЮБОЙ КТ ПРИ $kR\ll 1$

Решение задачи упрощается в случае, когда величина $P(\mathbf{k})$ зависит только от модуля вектора $\mathbf{k}$ и не зависит от его направления. Это происходит в случае сферически-симметричной функции

$$F(\mathbf{r})=F(r). \quad (74)$$

Тогда при $J(\mathbf{q}) = J(q)$ имеем

$$\int d^3q\, q_x q_y J(q) = \int d^3q\, q_x q_z J(q) = = \int d^3q_y\, q_z J(q) = 0,$$

$$\mathbf{T}(\omega) = 2\pi E_0 \mathbf{e}_l D_0(\omega) P^*(k) \times \times \left\{1 - \left(\Delta\omega_0 - \frac{i\gamma_r}{2}\right)\left[\left(\omega - \omega_0 + \frac{i\gamma}{2}\right)^{-1} + + \left(\omega + \omega_0 + \frac{i\gamma}{2}\right)^{-1}\right]\right\}^{-1}, \tag{75}$$

где

$$\Delta\omega_0 = \Delta\omega_0' + \Delta\omega_0'', \tag{76}$$

$$\Delta\omega_0' = -\frac{4e^2}{9\pi\hbar}\,\frac{p_{cv}^2}{\omega_g \omega m_0^2 \nu^2}\int\limits_0^\infty dq\, q^3 P^2(q)\frac{P}{q-k}, \tag{77}$$

$$\Delta\omega_0'' = \frac{4e^2}{9\pi\hbar}\,\frac{p_{cv}^2}{\omega_g \omega m_0^2 \nu^2} \times \times \int\limits_0^\infty dq\, q^2 P^2(q)\left(3 - \frac{q}{q+k}\right), \tag{78}$$

$$\gamma_r = \frac{8}{9}\,\frac{e^2}{\hbar c}\,\frac{p_{cv}^2}{\omega_g m_0^2 c^2} P^2(k). \tag{79}$$

Если в выражении (75) отбросить нерезонансный вклад $(\omega + \omega_0 + i\gamma/2)^{-1}$, то получим

$$\mathbf{T}(\omega) \approx \frac{2\pi E_0 \mathbf{e}_l D_0(\omega) P^*(k)(\omega - \omega_0 + i\gamma/2)}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i\Gamma/2}, \tag{80}$$

где

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 + \Delta\omega_0, \quad \Gamma = \gamma + \gamma_r.$$

Отбрасывая нерезонансные вклады и используя формулы (79) и (80), для электрического и магнитного полей при $r \to \infty$ получим результаты (22), (23) и (25) с подстановкой

$$E^{\pm}(\mathbf{r}, t) = -\frac{3E_0 c}{4r\nu}(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_s^{\mp}) \times \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{(\gamma_r/\omega) e^{i(kr - \omega t)} D_0(\omega)}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i\Gamma/2}. \tag{81}$$

Для вектора Умова–Пойнтинга при $r \to \infty$ получаем

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t, \mathbf{e}_s)|_{r\to\infty} = \frac{9E_0^2 c^3 \mathbf{r}}{32\pi\nu r^3}|\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_s^*|^2 \times \times \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{(\gamma_r/\omega) e^{i(kr - \omega t)} D_0(\omega)}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i\Gamma/2}\right|^2. \tag{82}$$

Наконец, для сечения рассеяния при монохроматическом облучении получаем

$$\frac{d\sigma_\mu}{do_s} = \frac{(9\gamma_r^2/16k_l^2)|\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_s^*|^2}{(\omega_l - \tilde{\omega}_0)^2 + \Gamma^2/4}. \tag{83}$$

Таким образом, точные результаты (81)–(83) отличаются от результатов низшего приближения по взаимодействию электронов со светом только заменой $\omega_0$ на $\tilde{\omega}_0$ и $\gamma$ на $\Gamma$.

## 18. СРАВНЕНИЕ ФОРМУЛ ДЛЯ РАДИАЦИОННЫХ ЗАТУХАНИЙ И ПОПРАВОК К ЭНЕРГИИ ЭКСИТОНА С РЕЗУЛЬТАТАМИ ДРУГИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Формулу (79) для радиационного затухания $\gamma_r$ сравним с формулой (43) из работы [5], полученной с помощью квантовой теории возмущений. Они почти совпадают. Если в (43) из [5] положить $\omega_g = \omega$, что естественно в условиях резонанса, то правая часть содержит дополнительный множитель $\omega/\omega_g$ по сравнению с (79), что опять-таки несущественно в условиях резонанса. Таким образом, можно сделать вывод, что величина $\gamma_r$, входящая в формулы (81)–(83), совпадает с вычисленной в работе [5] величиной $\gamma_{r\eta}$ с индексом $\eta = 1$ или $\eta = 2$.

Что касается поправки к энергии, то совпадения с результатами квантовой теории нет. Действительно, расчет показывает, что поправка к энергии по теории возмущений, учитывающая аннигиляцию экситона с рождением фотона, должна быть равна

$$\Delta\omega_\eta = -\frac{e^2}{4\pi^2\hbar\omega_g^2 m_0^2 \nu^2}\int do_{\mathbf{q}} \sum_\mu |\mathbf{p}_{cv\eta} \cdot \mathbf{e}_{\mu\mathbf{q}}|^2 \times \times \int\limits_0^\infty dq\; q^3 |P_\eta(\mathbf{q})|^2 \frac{P}{q - k_\eta}, \tag{84}$$

где $k_\eta = \omega_\eta \nu / c$.

В случае экситона $\Gamma_6 \times \Gamma_7$ используем векторы $\mathbf{p}_{cv\eta}$, определенные в (59). Полагая $P_\eta(\mathbf{q}) = P(\mathbf{q}) = = P(q)$, получаем

$$\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = -\frac{4}{9\pi}\,\frac{e^2 p_{cv}^2}{\hbar\omega_g^2 m_0^2 \nu^2} \times \times \int\limits_0^\infty dq\, q^3 |P(q)|^2 \frac{P}{q - k_\eta}, \tag{85}$$

$$\Delta\omega_3 = \Delta\omega_4 = \Delta\omega_1/2.$$

Сравнивая соотношения (85) с поправкой $\Delta\omega_0'$, определенной в (77), и полагая $\omega_\eta = \omega$, находим, что правая часть первого выражения в (85) содержит дополнительный множитель $\omega/\omega_g$ по сравнению с правой частью (77), что несущественно. Вклад же $\Delta\omega_0''$ в поправку к энергии не совпадает с результатами теории возмущений.

Однако наши формулы (76)–(78) согласуются с выводами работы [11] и предшествующих работ [16, 17], в которых поправка $\Delta\omega_0$ к энергии экситона трактуется как результат дальнодействующего обменного взаимодействия электрона и дырки. Покажем это. В наших обозначениях из формулы (20) работы [11] при равенстве диэлектрических проницаемостей среды и КТ ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) получаем поправку к энергии в виде

$$\mathrm{Re}\,\Xi = -a_B^3\omega_{LT}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty dq\, q^2\frac{P}{q^2-k^2}\times\right.$$
$$\times\left[k^2|P(q)|^2 + \frac{4\pi}{3}P(q)\int\limits_0^R dr\; r^2 j_0(qr)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{d^2F(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dF(r)}{dr}\right)\right]\right\}, \qquad (86)$$

где
$$a_B^3\omega_{LT} = \frac{8}{3}\,\frac{e^2p_{cv}^2}{\hbar m_0^2\omega_g^2\nu^2},$$

$j_0(x) = \sin x/x$ — сферическая функция Бесселя, $R$ — размер квантовой точки.

Интегрируя по частям, находим

$$\int\limits_0^R dr\, r^2 j_0(qr)\left(\frac{d^2F(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dF(r)}{dr}\right) =$$
$$= -\int\limits_0^R dr\, qr\sin(qr)F(r) = -\frac{P(q)q^2}{4\pi}, \qquad (87)$$

и выражение (86) преобразуется к виду

$$\Delta\omega_0 = \frac{4}{9\pi}\,\frac{e^2p_{cv}^2}{\hbar\omega_g\omega m_0^2\nu^2}\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty dq\, q^2P^2(q)(q^2-3k^2)\frac{P}{q^2-k^2}, \qquad (88)$$

что совпадает с нашими формулами (76)–(78).

Определим зависимость поправки к энергии экситона от размера $R$ квантовой точки. Введя безразмерную переменную интегрирования $z = qR$, получаем

$$\Delta\omega_0 = \frac{4}{9\pi}\,\frac{e^2p_{cv}^2}{\hbar\omega_g\omega m_0^2R^3\nu^2}\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty dz\, z^2\mathcal{P}^2(z)\frac{[z^2-3(kR)^2][z^2-(kR)^2]}{[z^2-(kR)^2]^2+\Delta^2}, \qquad (89)$$

где $\Delta \to 0$,

$$\mathcal{P}(z) = P(q) = \frac{4}{\pi z}\int\limits_0^\infty dx\, x\phi(x)\sin\frac{zx}{\pi},$$
$$x = \pi r/R, \quad \phi(\pi r/R) = F(r)R^3. \qquad (90)$$

В пределе $kR \to 0$, т. е. когда радиус квантовой точки много меньше длины световой волны, из выражения (89) получаем

$$\Delta\omega_0(kR\to 0) =$$
$$= \frac{4}{9\pi}\,\frac{e^2p_{cv}^2}{\hbar\omega_g\omega m_0^2R^3\nu^2}\int\limits_0^\infty dz\, z^2\mathcal{P}^2(z). \qquad (91)$$

Интеграл по $z$ в последнем выражении можно вычислить, если учесть соотношение

$$\int\limits_0^\infty dz\sin\frac{xz}{\pi}\sin\frac{x'z}{\pi} = \frac{\pi^2}{2}[\delta(x-x')-\delta(x+x')].$$

Тогда получаем

$$\Delta\omega_0(kR\to 0) =$$
$$= \frac{32}{9\pi}\,\frac{e^2p_{cv}^2}{\hbar\omega_g\omega m_0^2R^3\nu^2}\int\limits_0^\infty dx\, x^2\phi^2(x). \qquad (92)$$

В частном случае основного состояния экситона в сферической КТ, окруженной прямоугольным барьером бесконечной высоты, имеем

$$\phi(x) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\Theta\left(\frac{x}{\pi}-1\right), \qquad (93)$$

где $\Theta(x)$ — функция Хевисайда, и

$$\Delta\omega_0(kR\to 0) = \frac{8\pi}{9}\,\frac{e^2p_{cv}^2}{\hbar\omega_g\omega m_0^2R^3\nu^2}\int\limits_0^\pi dx\frac{\sin^4 x}{x^2}, \qquad (94)$$

что совпадает с формулой (21) из работы [11] при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (см. также формулу (18) из [16])[4)].

[4)] Заметим, что в средней части формулы (21) в работе [11] есть опечатка, пропущен множитель $1/2\pi$, что очевидно из сопоставления с (20) из [11]. Но правая часть (21) из [11] опечаток не содержит.

## 19. КОНКРЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ СЕЧЕНИЙ РАССЕЯНИЯ

Для сечений рассеяния на экситонах $\Gamma_6 \times \Gamma_7$ в сферически-симметричных КТ с помощью выражений (83) и (68′) получаем

$$\frac{d\sigma^{+(+)}}{do_s} = \frac{d\sigma^{-(-)}}{do_s} = \frac{1}{9}\tilde{\Sigma}_0(1+\cos\theta)^2,$$
$$\frac{d\sigma^{+(-)}}{do_s} = \frac{d\sigma^{-(+)}}{do_s} = \frac{1}{9}\tilde{\Sigma}_0(1-\cos\theta)^2, \qquad (95)$$

где

$$\tilde{\Sigma}_0 = \frac{(9\gamma_r/8k_l)^2}{(\omega_l - \tilde{\omega}_0)^2 + \Gamma^2/4}, \qquad (96)$$

верхний индекс «+(+)» означает поляризацию падающего (рассеянного) света $\mathbf{e}_l^+(\mathbf{e}_s^+)$ и т. д. Суммируя по поляризациям рассеянного света, получаем

$$\frac{d\sigma^+}{do_s} = \frac{d\sigma^-}{do_s} = \frac{2}{9}\tilde{\Sigma}_0(1+\cos^2\theta), \qquad (97)$$

где верхний индекс «+» («−») означает поляризацию падающего света $\mathbf{e}_l^+$ ($\mathbf{e}_l^-$).

Полное сечение рассеяния равно

$$\sigma^+ = \sigma^- = \frac{32\pi}{27}\tilde{\Sigma}_0. \qquad (98)$$

Используя соотношения (95), для резонансного рассеяния легко получаем, что при $\gamma \ll \gamma_r$

$$\sigma_{res}^+ = \sigma_{res}^- = 6\pi\left(\frac{\lambda_l}{2\pi}\right)^2, \qquad (99)$$

где $\lambda_l$ — длина световой волны. Результат (99) справедлив при любых размерах КТ.

Используя, например, «огибающую» волновой функции

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi R}\frac{\sin^2(\pi r/R)}{r^2}\Theta(R-r), \qquad (100)$$

соответствующую нижнему экситонному уровню в сферической КТ, ограниченной бесконечно высоким прямоугольным барьером, получаем

$$P(k) = \frac{2}{kR}\int_0^\pi dx \sin\frac{kRx}{\pi}\frac{\sin^2 x}{x}, \quad P(0) = 1, \qquad (101)$$

что, согласно формуле (79), определяет зависимость затухания $\gamma_r$ от параметра $kR$.

## 20. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью полуклассического метода с использованием запаздывающих потенциалов в принципе решена задача о рассеянии света на полупроводниковых КТ произвольных форм и размеров в условиях размерного квантования. Результаты применимы в случае как монохроматического, так и импульсного возбуждения. Коэффициент преломления света предполагается одинаковым внутри и вне КТ.

Точно учтено взаимодействие электронов со светом, т. е. все процессы переизлучения и поглощения света.

В качестве примера вычислено дифференциальное сечение рассеяния монохроматического света с частотой $\omega_l$ на сферической КТ в полупроводнике класса симметрии $T_D$ в случае резонанса возбуждающего света с экситоном $\Gamma_6 \times \Gamma_7$. Показано, что по крайней мере в этом случае точный учет взаимодействия электронов со светом приводит только к замене множителя $(\omega_l - \omega_0)^2 + \gamma^2/4$, полученного в низшем приближении, на множитель $(\omega_l - \tilde{\omega}_0)^2 + (\gamma + \gamma_r)^2/4$. Величина $\gamma_r$ согласуется с результатом, полученным с помощью квантовой теории возмущений [5].

При условии $k_l R \ll 1$, где $k_l$ — модуль волнового вектора света, $R$ — размер КТ, поляризация и угловое распределение рассеянного света не зависят ни от формы КТ, ни от огибающей $F(\mathbf{r})$ волновой функции экситона, а только от векторов $\mathbf{p}_{cv\eta}$ — недиагональных матричных элементов квазиимпульса экситонных состояний с индексом $\eta$, а величина сечения рассеяния не зависит от размеров КТ.

Результаты настоящей работы можно использовать для точного вычисления поглощения света любыми КТ, которое пропорционально величине $\gamma$ нерадиационного затухания. Для этого следует использовать тот же прием, что и при определении поглощения квантовыми ямами (см., например, [8–10, 12]).

Наконец, полученные результаты для вектора Умова – Пойнтинга на больших расстояниях от любых КТ применимы в случае импульсного облучения. Форма импульса определяется функцией $D_0(\omega)$. Это позволяет, например, описать осцилляции рассеянного света, обусловленные расщеплением экситонных уровней в КТ (ср. работу [18], в которой предсказаны подобные осцилляции в отражении и поглощении света квантовой ямой при импульсном облучении).

## ЛИТЕРАТУРА


1. L. C. Andreani, F. Tassone, and F. Bassani, Sol. St. Comm. **77**, 641 (1991).
2. L. C. Andreani, G. Pansarini, A. V. Kavokin, and M. R. Vladimiriva, Phys. Rev. B **57**, 4670 (1998).
3. L. C. Andreani, *Confined Electrons and Photons*, ed. by E. Burstein and C. Weisbuch, Plenum Press, New York (1995).
4. Е. Л. Ивченко, А. В. Кавокин, ФТТ **34**, 1815 (1992).
5. S. T. Pavlov, I. G. Lang, and L. I. Korovin, in *Proc. XIV Int. Symposium «Nanostructures: Science and Technology-2006»*, St. Petersburg (2006), p. 144; E-print archives, cond-mat/0605650; И. Г. Ланг, Л. И. Коровин, С. Т. Павлов, ФТТ **49**, 1304 (2007).
6. И. Г. Ланг, Л. И. Коровин, Х. А. де ла Круз-Алкас, С. Т. Павлов, ЖЭТФ **123**, 305 (2003).
7. И. Г. Ланг, Л. И. Коровин, С. Т. Павлов, ФТТ **46**, 1706 (2004).
8. Л. И. Коровин, И. Г. Ланг, Д. А. Контрерас-Солорио, С. Т. Павлов, ФТТ **43**, 2091 (2001).
9. Л. И. Коровин, И. Г. Ланг, Д. А. Контрерас-Солорио, С. Т. Павлов, ФТТ **44**, 1681 (2002).
10. Л. И. Коровин, И. Г. Ланг, С. Т. Павлов, ФТТ **48**, 2208 (2006).
11. S. V. Goupalov, Phys. Rev. B **68**, 125311 (2003).
12. И. Г. Ланг, Л. И. Коровин, С. Т. Павлов, ФТТ **48**, 1693 (2006); С. Т. Павлов, И. Г. Ланг, Л. И. Коровин, in *Proc. XII Int. Symposium «Nanostructures: Science and Technology-2004»*, St. Petersburg (2004), p. 284.
13. С. Т. Павлов, И. Г. Ланг, Л. И. Коровин, ФТТ **45**, 1903 (2003).
14. И. Е. Тамм, *Основы теории электричества*, Физматлит, Москва (1966).
15. И. М. Цидильковский, *Зонная структура полупроводников*, Наука, Москва (1978).
16. S. V. Goupalov and E. L. Ivchenko, J. Cryst. Growth **184/185**, 393 (1998).
17. С. В. Гупалов, Е. Л. Ивченко, ФТТ **42**, 1976 (2000).
18. D. A. Contreras-Solorio, S. T. Pavlov, L. I. Korovin, and I. G. Lang, Phys. Rev. B **62**, 16815 (2000).