ЖЭТФ, 2008, том 133, вып. 3, стр. 513–521

ОБЪЕМНОЕ ФРЕНЕЛЕВО ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ТРЕХМЕРНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

С. Г. Раутиан *

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия

Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 27 июля 2007 г.

Выведены уравнения, в лучевом приближении описывающие распространение монохроматических электромагнитных волн в трехмерно неоднородной среде с учетом объемного френелевого отражения от неоднородности среды. В основу анализа положен принцип локальности. Проведено разделение на эффекты прохождения и эффекты отражения. Первые оказываются изотропными, вторые — анизотропными и зависящими от интерференционных явлений. Закон Рытова вращения эллипса поляризации нарушается вследствие интерференционных эффектов. Явление Брюстера в слоистой и трехмерно неоднородной средах происходит в несовпадающих условиях.

PACS: 42.15.-i, 42.25.-p

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, кроме френелева отражения от границы двух сред, существует объемное френелево отражение (ОФО), происходящее внутри неоднородной среды и обусловленное ее неоднородностью (см., например, [1]). Явление сравнительно хорошо изучено для сред с постоянным направлением градиента диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r})$ (одномерно неоднородные или слоистые среды), но в общем случае произвольной, трехмерной неоднородности не рассматривалось. Теория распространения поля в таких средах обычно формулируется следующим образом. Исходным служит волновое уравнение для напряженности $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$ монохроматического поля в неоднородной среде [1, 2]:

$$\begin{gathered}\Delta\boldsymbol{\mathcal{E}} + k^2(\mathbf{r})\boldsymbol{\mathcal{E}} + \nabla(\boldsymbol{\mathcal{E}}\varepsilon^{-1}\nabla\varepsilon) = 0,\\ k^2(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon(\mathbf{r})\omega^2/c^2,\end{gathered} \tag{1}$$

где ω — частота. Его решение представляется в виде

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathbf{E}(\mathbf{r})\exp[iS(\mathbf{r})], \tag{2}$$

и эйконал $S(\mathbf{r})$ подчиняется уравнению

$$(\nabla S)^2 = k^2(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Пусть решение уравнения (3) известно, т. е. известен волновой фронт, который задается равенством $S(\mathbf{r}) = \mathrm{const}$. Соотношение

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \nabla S/k$$

определяет единичный лучевой вектор $\mathbf{s}(\mathbf{r})$, ортогональный волновому фронту. Вектор $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ является основным результатом решения уравнения эйконала (3) (поскольку k задан), но может быть найден и из уравнения

$$(\mathbf{s}\nabla)\mathbf{s} = \nabla k/k - \mathbf{s}(\mathbf{s}\nabla k)/k. \tag{4}$$

Для амплитуды $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ из уравнения (1) находим

$$\begin{aligned}(\mathbf{s}\nabla)\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{E}}{2k}\,(k\operatorname{div}\mathbf{s} + \mathbf{s}\nabla k) -\\ -\mathbf{s}\frac{\nabla\varepsilon\mathbf{E}}{2\varepsilon} + \frac{i}{2k}\left\{\Delta\mathbf{E} + \nabla\left[\varepsilon^{-1}(\nabla\varepsilon\mathbf{E})\right]\right\}.\end{aligned} \tag{5}$$

Из соотношения (5) видно, что в рамках изложенного стандартного подхода волна с заданным лучевым вектором $\mathbf{s}(\mathbf{r})$, с заданным волновым фронтом

*E-mail: sgrautian@mtu-net.ru

не порождает в неоднородной среде волн с другими лучевыми векторами, с другими волновыми фронтами. Это означает, что ОФО не фигурирует в анализе. О векторном поле в среде с трехмерной неоднородностью, насколько мне известно, нет работ, в которых ОФО принималось бы во внимание, оно рассчитывалось только для одномерной. В слоистой неоднородной среде ОФО формирует две плоские волны, которые, отражаясь от неоднородности, преобразуются друг в друга. В случае же трехмерной неоднородности каждая волна типа (2) порождает непрерывный набор волн, отраженных от последовательных слоев среды и обладающих различными волновыми фронтами. Анализ обмена между исходной волной (2) и отраженными в принципе возможен, но пока не проводился.

Уравнение (5) описывает, как известно, изменение амплитуды $\mathbf{E}$ вдоль луча из-за расходимости пучка лучей и собственно неоднородности среды (слагаемые с $k\mathrm{div}\,\mathbf{s}$ и $s\nabla k$), дифракционные явления ($\Delta\mathbf{E}$) и эволюцию эллипса поляризации (члены с $\nabla\varepsilon$). В приближении геометрической оптики пренебрегают членами в фигурных скобках уравнения (5), которые по параметру малости λ/L (λ и L — длина волны и масштаб неоднородности среды) меньше остальных слагаемых правой части:

$$(\mathbf{s}\nabla)\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{E}}{2k}(k\mathrm{div}\,\mathbf{s} + \mathbf{s}\nabla k) - \frac{\mathbf{s}(\nabla\varepsilon\mathbf{E})}{2\varepsilon}. \qquad (6)$$

Вращение вектора $\mathbf{E}$ описывается третьим членом в правой части. Для единичного вектора поляризации $\mathbf{e}$ из уравнения (6) следует [2–5], что

$$\begin{gathered}(\mathbf{s}\nabla)\mathbf{e} = -\frac{\mathbf{s}(\nabla\varepsilon\mathbf{e})}{2\varepsilon} = \mathbf{g}\times\mathbf{e}, \\ \mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}}{E}, \quad \mathbf{g} = \frac{\mathbf{s}\times\nabla\varepsilon}{2\varepsilon}.\end{gathered} \qquad (7)$$

Вектор $\mathbf{g}$, называемый вектором гирации, направлен вдоль бинормали $\mathbf{b}$ к лучу, а по абсолютной величине равен кривизне луча:

$$\mathbf{g} = \mathbf{b}/R, \quad \mathbf{b} = \mathbf{s}\times\mathbf{N}, \qquad (8)$$

где R и $\mathbf{N}$ — радиус кривизны луча и нормаль к нему. Вращение системы ортов $\mathbf{s}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{b}$ (трехгранник Френе) задается вектором $\boldsymbol{\Omega}$ Дарбу (см., например, [6]):

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{b}/R + \mathbf{s}/T, \qquad (9)$$

где T — радиус кручения луча. Вектор $\mathbf{e}$ находится в плоскости $\mathbf{N}$, $\mathbf{b}$ и относительно трехгранника Френе вращается со скоростью $\mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega}$:

$$\mathbf{g}_{rel} = \mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} = -\mathbf{s}/T. \qquad (10)$$

Соотношения (7), (8), (10) составляют содержание закона Рытова — в приближении геометрической оптики векторная амплитуда поля вращается вокруг бинормали $\mathbf{b}$ со скоростью $1/R$, а относительно естественного трехгранника — вокруг лучевого вектора $\mathbf{s}$ со скоростью $-1/T$. При смещении вдоль луча эллипс поляризации сохраняет свою форму.

В работах [7, 8] рассмотрено влияние члена $i\nabla[\varepsilon^{-1}(\nabla\varepsilon\mathbf{E})]/2k$ в уравнении (5) на эволюцию эллипса поляризации. Это слагаемое по порядку величины λ/L меньше остальных членов правой части в (5). Такой же порядок малости, в принципе, и у эффектов ОФО. Поэтому, строго говоря, сохранение слагаемого $i\nabla[\varepsilon^{-1}(\nabla\varepsilon\mathbf{E})]$ без включения в модель ОФО не может быть последовательным.

Основная цель статьи — дать обобщение фундаментального уравнения (6), связанное с объемным френелевым отражением. В работе получены некоторые следствия относительно закона Рытова и эффекта Брюстера.

2. НАРУШЕНИЕ ЗАКОНА РЫТОВА ВСЛЕДСТВИЕ ОБЪЕМНОГО ФРЕНЕЛЕВА ОТРАЖЕНИЯ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

В слоистой среде луч является плоской кривой ($1/T = 0$, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{b}/R$), трехгранник Френе и вектор поляризации $\mathbf{e}$ вращаются вокруг бинормали (вследствие искривления луча и ортогональности $\mathbf{e}$ и $\mathbf{s}$). Компонента $\mathbf{e}$, находящаяся в плоскости $\mathbf{s}$, $\mathbf{e}_z$ (ось z направим по $\nabla\varepsilon$), и ортогональная ей компонента распространяются в разных условиях. Следовательно, ОФО и слагаемое $i\nabla[\varepsilon^{-1}(\nabla\varepsilon\mathbf{E})]/2k$ в уравнении (5) должны изменять эллипс поляризации в одномерно неоднородной среде.

ОФО подробно исследовалось в слоистой среде в одномерной задаче, т. е. без дифракционных явлений [1, 9]. При распространении поперечной плоской волны вдоль $\nabla\varepsilon$ напряженность $E(z)$ зависит только от z. Решение волнового уравнения (штрих обозначает дифференцирование по z)

$$E'' + k^2(z)E = 0, \quad k^2(z) = \varepsilon(z)\omega^2/c^2, \qquad (11)$$

задают в виде двух встречных волн с зависящими от координат амплитудами:

$$E(z) = \sqrt{\frac{1}{k(z)}} \times \times \{A_1(z)\exp[iS(z)] + A_2(z)\exp[-iS(z)]\}, \quad (12)$$

$$S(z) = \int k(z)\,dz.$$

Пусть амплитуды $A_1(z)$, $A_2(z)$ являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned} A_1' &= \frac{k'}{2k}\exp[-2iS(z)]A_2, \\ A_2' &= \frac{k'}{2k}\exp[2iS(z)]A_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда, как это легко показать, функция (12) удовлетворяет волновому уравнению (11) [1, 9]. Переход от уравнения второго порядка (11) к системе двух уравнений (13) первого порядка соответствует описанию ОФО от неоднородностей среды. Действительно, на малой толщине Δz слоя среды происходит изменение волнового числа $\Delta k = k'\Delta z$; волна $A_2\exp(-iS)$ отражается на этом скачке Δk, т. е. порождает волну противоположного направления, и, в соответствии с формулами Френеля для коэффициента отражения, изменяет амплитуду A_1 на

$$\Delta A_1 = \frac{\Delta k}{2k}\exp\left[-2iS(z)\right]A_2 = = \frac{k'}{2k}\exp\left[-2iS(z)\right]A_2\Delta z,$$

что в пределе бесконечно малого Δz эквивалентно первому из уравнений (13). Аналогичным образом отражение волны $A_1\exp(iS)$ изменяет амплитуду A_2 в согласии со вторым уравнением (13). Следовательно, запись поля (12) в виде двух встречных волн и подчинение амплитуд $A_1(z)$, $A_2(z)$ системе уравнений (13) соответствует представлению об отражении этих волн от неоднородностей среды или ОФО.

Приближение геометрической оптики дается условиями $A_1' = 0$, $A_2' = 0$, т. е. $A_{1,2} = \text{const}$. Член $(\mathbf{E}/2k)(\mathbf{s}\nabla k)$ в уравнении (6), отвечающий множителю $\sqrt{1/k(z)}$ в соотношении (12), в приближении геометрической оптики обеспечивает для каждой из волн неизменность потока, пропорционального $|A_{1,2}|^2$.

В формулах (11), (12) под $E(z)$ можно понимать любую декартову компоненту, перпендикулярную оси z. В случае же наклонного распространения в одномерно неоднородной среде возникают поляризационные эффекты. Как и ранее, имея в виду плоские волны, ось x выбирается так, чтобы $s_y = 0$ и напряженности поля зависели от двух переменных x, z. Плоскость xz аналогична плоскости падения при отражении от плоской границы раздела двух сред. Компонента $E_\perp(x,z)$ напряженности, перпендикулярная плоскости xz, согласно (1), подчиняется уравнению

$$\Delta E_\perp + k^2(z)E_\perp = 0. \quad (14)$$

Его решение можно представить в виде, подобном формулам (12), (13) [1, 9]:

$$E_\perp(x,z) = \sqrt{\frac{1}{k_z(z)}}\exp(ik_x x) \times \times \{B_1(z)\exp[iS_1(z)] + B_2(z)\exp[-iS_1(z)]\},$$

$$B_1' = \frac{k_z'}{2k_z}\exp[-2iS_1(z)]B_2, \quad (15)$$

$$B_2' = \frac{k_z'}{2k_z}\exp[2iS_1(z)]B_1,$$

$$k_z = \sqrt{k^2(z) - k_x^2}, \quad S_1(z) = \int k_z(z_1)\,dz_1.$$

Константа разделения k_x аналогична x-компоненте волнового вектора плоской волны при ее распространении в однородной среде. Отношение $k_z'/2k_z$ соответствует $\perp$-коэффициенту отражения Френеля при наклонном падении.

Вместо вектора $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_\parallel(x,z)$, расположенного в плоскости xz, удобнее иметь дело с компонентой напряженности магнитного поля $H_\perp(x,z)$, перпендикулярной плоскости xz, с последующим вычислением $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\parallel$:

$$\begin{aligned} &\Delta H_\perp + k^2(z)H_\perp - \frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\nabla H_\perp = 0, \\ &\boldsymbol{\mathcal{E}}_\parallel = \frac{c}{\omega\varepsilon}\left(\mathbf{e}_x\frac{\partial H_\perp}{\partial z} - \mathbf{e}_z\frac{\partial H_\perp}{\partial x}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Представление $H_\perp(x,z)$ в виде двух встречных волн имеет вид

$$H_\perp(x,z) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{k_z}}\exp(ik_x x) \times \times \{C_1(z)\exp[iS_1(z)] + C_2(z)\exp[-iS_1(z)]\}, \quad (17)$$

причем $S_1(z)$ и k_z даются формулой (15), а амплитуды $C_1(z)$ и $C_2(z)$ подчиняются системе уравнений [1, 9]

$$\begin{aligned} C_1' &= \frac{(k_z/\varepsilon)'}{2k_z/\varepsilon}\exp[-2iS_1(z)]C_2, \\ C_2' &= \frac{(k_z/\varepsilon)'}{2k_z/\varepsilon}\exp[2iS_1(z)]C_1. \end{aligned} \quad (18)$$

Коэффициенты в уравнениях (18) отвечают френелевому отражению волны с $\|$-поляризацией. Справедливы равенства

$$f_{\|} \equiv \frac{(k_z/\varepsilon)'}{2k_z/\varepsilon} = \frac{k_z'}{2k_z} - \frac{\varepsilon'}{2\varepsilon} = \\ = \frac{\varepsilon'}{4\varepsilon}\left(\frac{k_x^2}{k^2(z) - k_x^2} - 1\right) = \frac{\varepsilon'}{4\varepsilon}\,\frac{k_x^2 - k_z^2}{k_z^2}, \quad (19)$$

$$f_{\perp} \equiv \frac{k_z'}{2k_z} = \frac{\varepsilon'}{4\varepsilon}\,\frac{k_x^2 + k_z^2}{k_z^2}, \quad f_{\perp} - f_{\|} = \frac{\varepsilon'}{2\varepsilon}. \quad (20)$$

Величина $f_{\|}$ изменяет знак в точке $k_x^2 = k_z^2$ («угол падения» 45°), где она обращается в нуль, что отвечает эффекту Брюстера в среде с непрерывной неоднородностью. Коэффициенты $f_{\perp}$, $f_{\|}$ одинаково зависят от ε'/ε и различаются геометрическими факторами. Разность $f_{\perp} - f_{\|}$ зависит только от свойств среды. Очевидны свойства

$$k_x^2 + k_z^2 \geq k_x^2 - k_z^2, \quad |f_{\perp}| \geq |f_{\|}|. \quad (21)$$

Наибольшее отличие величины $f_{\perp}$ от $f_{\|}$ имеет место в окрестности угла Брюстера ($k_z^2 = k_x^2$). Вблизи углов нормального ($k_z^2 \gg k_\tau^2$) и скользящего ($k_z^2 \ll k_\tau^2$) падения поляризационные эффекты сравнительно невелики.

Нетрудно показать, что при вещественных величинах $k'/2k$ и $S(z)$, т. е. для однородных волн, амплитуды A_1 и A_2 из системы (13) удовлетворяют соотношениям

$$\left(|A_1|^2 - |A_2|^2\right)' = 0, \quad |A_1|^2 - |A_2|^2 = \text{const}, \quad (22)$$

т. е. обмен между встречными волнами в (12) из-за ОФО не изменяет разность потоков в них. Аналогичные соотношения выполняются и для однородных «встречных» волн при наклонном распространении:

$$|B_1|^2 - |B_2|^2 = \text{const}, \quad |C_1|^2 - |C_2|^2 = \text{const}. \quad (23)$$

Поскольку коэффициенты $f_{\perp}$ и $f_{\|}$ в системах уравнений (15) и (18) отличаются, $\perp$- и $\|$-компоненты эллипса поляризации изменяются по-разному. Таким образом, по мере распространения волны происходит изменение формы ее эллипса поляризации, обусловленное ОФО.

Реальная роль ОФО зависит от вида неоднородности среды. В случае периодической неоднородности среды и достаточной ее протяженности эффекты ОФО накапливаются и могут привести к заметным результатам, в том числе, к формированию неоднородных волн (см., например, [1, 10–13]). В средах с монотонной слабой неоднородностью применяют теорию возмущений по параметрам $f_{\perp}$, $f_{\|}$. В частности, во втором приближении из уравнений (15) следует, что

$$B_1(z) = B_1(z_0) + B_2(z_0)\int_{z_0}^{z} dz_1 f_{\perp}(z_1) \times \\ \times \exp[-2iS(z_1)] + B_1(z_0)\int_{z_0}^{z} dz_1 \int_{z_0}^{z_1} dz_2 \times \\ \times f_{\perp}(z_1) f_{\perp}(z_2) \exp\{2i[S_1(z_2) - S_1(z_1)]\}. \quad (24)$$

При слабой встречной волне основным слагаемым может оказаться квадратичный член в правой части (24). Наоборот, при $B_2(z) \sim B_1(z)$ достаточно ограничиться первой поправкой. Пусть для простоты в точке z_0 имеем $B_2(z_0) = B_1(z_0) = B$, $C_2(z_0) = C_1(z_0) = C$. В первом приближении уравнения (15) и (18) дают соотношения

$$\begin{aligned} B_1(z) &= B\left\{1 + \int_{z_0}^{z} f_{\perp}(z_1)\exp[-2iS(z_1)]dz_1\right\}, \\ C_1(z) &= C\left\{1 + \int_{z_0}^{z} f_{\|}(z_1)\exp[-2iS(z_1)]dz_1\right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Можно видеть, что изменяются модули $|B_1(z)|$ и $|C_1(z)|$, а между $B_1(z)$ и $C_1(z)$ возникает разность фаз:

$$\int_{z_0}^{z} (f_{\|} - f_{\perp}) \sin(2S)\, dz_1 = -\int_{z_0}^{z} \frac{\varepsilon'}{2\varepsilon} \sin(2S)\, dz_1. \quad (26)$$

Оба фактора — изменение модулей и разности фаз — приводят к изменению формы эллипса поляризации, т. е. при наклонном распространении ОФО приводит к отступлению от закона Рытова.

3. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ОБЪЕМНОМ ФРЕНЕЛЕВОМ ОТРАЖЕНИИ

Дифференциальные уравнения (13), (15), (18) задают локальные соотношения между волнами в неоднородной среде. Для полного отражения от среды конечной протяженности чрезвычайно существенна интерференция волн, отраженных от разных слоев. Разобьем одномерно неоднородную среду на слои, расположенные перпендикулярно $\nabla\varepsilon$, толщиной в четверть средней длины волны. На рис. 1 штриховые прямые показывают два таких слоя. Векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_1'$ символизируют отражение $\mathbf{k}$-волны от

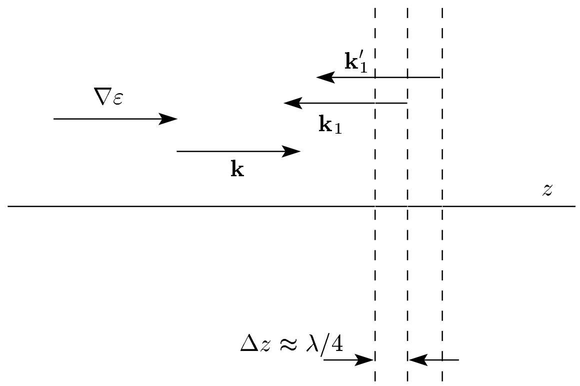

Рис. 1

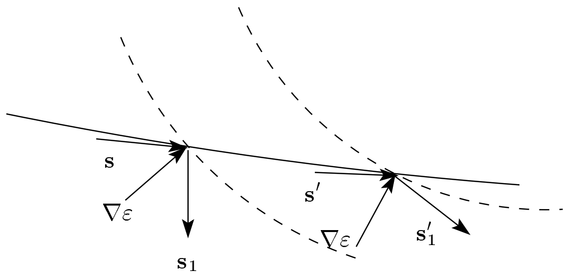

Рис. 2

выделенных прилегающих слоев. Фазы отраженных волн сдвинуты приблизительно на π, и волны полностью не гасят друг друга только из-за небольшого различия показателей преломления — разность фаз немного отличается от π и амплитуды отраженных волн не совсем одинаковы. Сумма показанных и всех остальных отраженных волн есть одна плоская волна, и ее амплитуда зависит от отношения длины волны к масштабу неоднородности среды. Интерференционные соображения имеют силу и в случае наклонного распространения, нужно только под λ понимать $2\pi/k_z$. В формулах (24), (25) интегральные члены и выражают интерференционные эффекты, т. е. нарушение закона Рытова обусловлено интерференционными явлениями.

Таким образом, в среде с одномерной слабой и монотонной неоднородностью эффекты ОФО не накапливаются, но создают картину сравнительно неглубоких интерференционных полос.

Насколько мне известно, не существует работ, в которых исследовалось бы ОФО для сред с трехмерной неоднородностью. Причина была упомянута в разд. 1. Рассмотрим ее более подробно. В слоистой среде существуют только две волны, которые при отражении преобразуются друг в друга. В трехмерно неоднородной среде ситуация принципиально иная, как это можно увидеть из рис. 2. Сплошная кривая изображает луч, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}'$ — лучевые векторы в двух разных точках луча. Штриховые кривые соответствуют поверхностям $\varepsilon(\mathbf{r}) = \mathrm{const}$, векторы $\nabla\varepsilon$ коллинеарны нормалям к штриховым поверхностям, $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}'_1$ — лучевые векторы отраженных волн в тех же двух точках луча. В этих двух точках луча генерируются лучи отраженных волн различных направлений ($\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}'_1$ не параллельны). Каждый луч волны, описываемой формулой (2), порождает непрерывный набор разнонаправленных отраженных лучей, причем распределение последних по углам зависит от вида $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ и $\varepsilon(\mathbf{r})$. Иными словами, волны, отраженные в разных областях среды, имеют различные формы волновых фронтов. В отличие от случая одномерной неоднородности, в трехмерной задаче возникает сложная, весьма разнообразная проблема интерференции волн разных направлений, с разными волновыми фронтами, вид которых определяется пространственной зависимостью $\varepsilon(\mathbf{r})$.

4. ОПИСАНИЕ ОБЪЕМНОГО ФРЕНЕЛЕВА ОТРАЖЕНИЯ В ТРЕХМЕРНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Задача настоящего раздела состоит в том, чтобы в уравнение (6) для амплитуды $\mathbf{E}$ ввести слагаемые, которые описывали бы ОФО. Воспользуемся одной из основных идей геометрической оптики: форма локальных соотношений между характеристиками поля — лучевыми, фазовыми, амплитудными, поляризационными, энергетическими, — совпадает с таковыми для плоских волн в однородной среде при локальных значениях самих характеристик (принцип локальности [5]). В соответствии со сказанным, будем исходить из формул Френеля и получим выражения для дифференциальных коэффициентов отражения и пропускания тонкого слоя неоднородной среды, прилегающего к поверхности $\varepsilon(\mathbf{r}) = \mathrm{const}$.

Примем следующую запись амплитудных коэффициентов Френеля отражения и пропускания $\rho_\perp$, $\rho_\parallel$, $d_\perp$, $d_\parallel$ для плоской границы раздела между двумя однородными средами:

$$\rho_\perp = \frac{R_\perp}{E_\perp} = \frac{k_n - k_{2n}}{k_n + k_{2n}} \exp(2ik_n z_0), \qquad (27)$$

$$d_\perp = D_\perp/E_\perp = \frac{2k_n}{k_n + k_{2n}} \exp[i(k_n - k_{2n})z_0], \qquad (28)$$

$$\rho_\parallel = R_\parallel/E_\parallel = \frac{k_n/\varepsilon_1 - k_{2n}/\varepsilon_2}{k_n/\varepsilon_1 + k_{2n}/\varepsilon_2} \exp(2ik_n z_0), \qquad (29)$$

$$d_\parallel = D_\parallel/E_\parallel = \frac{2k_n}{k_n + k_{2n}\varepsilon_1/\varepsilon_2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \times \\ \times \exp[i(k_n - k_{2n})z_0]. \quad (30)$$

Здесь $R_\perp$, $D_\perp$, $E_\perp$, $R_\parallel$, $D_\parallel$, $E_\parallel$ — амплитуды отраженных, прошедших и падающих волн для $\perp$- и $\parallel$-поляризаций (перпендикулярно и параллельно плоскости падения), z_0 — координата границы раздела вдоль нормали $\mathbf{n}$ к границе раздела, k_n и k_{2n} — проекции волновых векторов падающей и прошедшей волн на нормаль $\mathbf{n}$, причем нормаль $\mathbf{n}$ направлена из среды 1 в среду 2. Проекции k_x волновых векторов на границу раздела у всех трех волн одинаковы, они не входят в фазовые множители в формулах (27)–(30). Имеем

$$k_n = \sqrt{k^2 - k_x^2}, \quad k_{2n} = \sqrt{k_2^2 - k_x^2},$$

$$k^2 = \frac{\varepsilon_1\omega^2}{c^2}, \quad k_2^2 = \frac{\varepsilon_2\omega^2}{c^2}.$$

Фазы волн заданы в виде $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$, $\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}$, $\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}$, т. е. отсчитываются от плоскости $z = 0$. Справедливы равенства

$$|\rho_\parallel|^2 + |d_\parallel|^2\frac{k_{2n}}{k_n} = 1, \quad |\rho_\perp|^2 + |d_\perp|^2\frac{k_{2n}}{k_n} = 1. \quad (31)$$

Коэффициенты пропускания имеют конечные значения, отличные от единицы. Это очевидное обстоятельство не отражено в уравнении (6) и будет принято во внимание ниже.

В рамках геометрической оптики при использовании формул Френеля в случае неплоской, мало искривленной границы раздела в качестве таковой принимают плоскость, касательную к ее поверхности в точке пересечения с лучом [5]. Определение нормали $\mathbf{n}$ к касательной плоскости,

$$\mathbf{n} = \nabla\varepsilon/|\nabla\varepsilon|, \quad (32)$$

несущественно отличается от общепринятого направлением — здесь $\mathbf{n}$ направлена в сторону увеличения ε, тогда как обычно направление выбирают «из среды 1 в среду 2», т. е. по направлению распространения фазы падающей волны. Компоненты волновых векторов k_n и k_{2n}, фигурирующие в формулах Френеля, нужно переопределить. В нашем случае волновые векторы волн даются градиентами их эйконалов, а нормальные компоненты — равенствами

$$k_n = k\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}, \quad k_{2n} = k_2\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{n}. \quad (33)$$

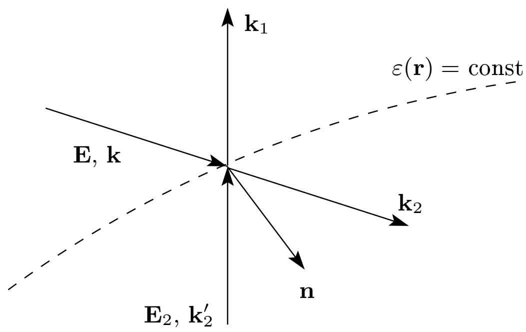

Рис. 3

С учетом сделанных замечаний в формулах (27)–(30) под k_n, k_{2n} следует понимать величины из (33) и провести замены

$$k_n z_0 \to S_n(z) = \int_0^z dz_1 k_n(z_1), \\ k_{2n} z_0 \to S_{2n}(z) = \int_0^z dz_1 k_{2n}(z_1). \quad (34)$$

Под z понимается координата луча на поверхности $\varepsilon(\mathbf{r}) = \text{const}$. Проекции волновых векторов на касательную плоскость, одинаковые для падающей, отраженной и прошедшей волн, выпадают из фазовых множителей в (27)–(30).

На рис. 3 показаны амплитуды и волновые векторы для четырех лучей, которые «взаимодействуют» благодаря малому скачку $\Delta\varepsilon(\mathbf{r})$ вблизи поверхности $\varepsilon(\mathbf{r}) = \text{const}$. В проходящую волну $\exp(i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r})$ дает вклад волна $\mathbf{E}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ и отражение волны $\mathbf{E}_2\exp(i\mathbf{k}'_2\cdot\mathbf{r})$. Волна с вектором $\mathbf{k}_1 = k\mathbf{s}_1$ формируется вследствие отражения волны $\mathbf{E}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ и прохождения волны $\mathbf{E}_2\exp(i\mathbf{k}'_2\cdot\mathbf{r})$. Отметим, что

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = -\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{n} = -k\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{n}, \quad \mathbf{k}_2\cdot\mathbf{n} = -\mathbf{k}'_2\cdot\mathbf{n}. \quad (35)$$

Для разложения амплитуд применим систему ортов из лучевого вектора $\mathbf{s}$, орта $\mathbf{e}_\perp$, перпендикулярного плоскости $\mathbf{n}$, $\mathbf{s}$ (плоскости «падения»), и орта $\mathbf{e}_\parallel$, находящегося в плоскости падения. В силу формул (4), (8) и (32) орты $\mathbf{e}_\perp$ и $\mathbf{e}_\parallel$ совпадают соответственно с бинормалью $\mathbf{b}$ и нормалью $\mathbf{N}$ трехгранника Френе; для отраженного луча разложение по ортам $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{b}$ имеет вид

$$\mathbf{e}_\perp = \frac{\mathbf{s}\times\mathbf{n}}{|\mathbf{s}\times\mathbf{n}|} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{e}_\parallel = \mathbf{N}, \quad \mathbf{e}_\perp\times\mathbf{s}_1 = \mathbf{N}_1, \quad (36)$$

$$\mathbf{E} = E_\perp\mathbf{b} + E_\parallel\mathbf{N}, \quad \mathbf{E}_2 = E_{2\perp}\mathbf{b} + E_{2\parallel}\mathbf{N}_1. \quad (37)$$

Ради единообразия с теорией френелевого отражения, употребляем индексы $\perp$ и $\|$.

Дифференциальные коэффициенты отражения волн $\mathbf{E}_2\exp(i\mathbf{k}_2'\cdot\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ можно найти непосредственно из формул Френеля (27), (29). Вклады отражения в производные амплитуд вдоль лучей равны (фигурные скобки будут обозначать вклады ОФО в общую производную)

$$\begin{aligned}\{\mathbf{s}\nabla E_\perp\} &= f_{n\perp}E_{2\perp}\exp(2iS_{2n}),\\ \{\mathbf{s}_1\nabla E_{2\perp}\} &= f_{n\perp}E_\perp\exp(2iS_n),\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\{\mathbf{s}\nabla E_\|\} &= f_{n\|}E_{2\|}\exp(2iS_{2n}),\\ \{\mathbf{s}_1\nabla E_{2\|}\} &= f_{n\|}E_\|\exp(2iS_n),\end{aligned} \tag{39}$$

$$f_{n\perp}\equiv\frac{\mathbf{s}\nabla k_n}{2k_n},\quad f_{n\|}\equiv\frac{\mathbf{s}\nabla(k_n/\varepsilon)}{2k_n/\varepsilon}. \tag{40}$$

Выражения (40) представляются вполне надежными, поскольку разности $\Delta k_n = k_{2n}-k_n$ и коэффициенты отражения $\rho_\perp$, $\rho_\|$ (27), (29) суть величины первого порядка малости. В отличие от них, коэффициенты пропускания $d_\perp$, $d_\|$ (28), (30) близки к единицам, и оценка дифференциальных коэффициентов пропускания требует большей тщательности. Например, изменение $\Delta E_\perp$ непосредственно амплитуды $E_\perp$ при прохождении тонкого слоя неоднородной среды равно

$$\begin{aligned}\Delta E_\perp\exp(iS_n) &= D_\perp\exp(iS_{2n}) - E_\perp\exp(iS_n) =\\ &= \left(\frac{2k_n}{k_n+k_{2n}}-1\right)E_\perp\exp(iS_n) =\\ &= -\frac{k_{2n}-k_n}{k_{2n}+k_n}E_\perp\exp(iS_n).\end{aligned} \tag{41}$$

В отличие от отражения, преломление сопровождается изменением поперечного сечения выделенного участка волнового фронта или пучка лучей. Это обстоятельство отражено в законах сохранения (31) в виде множителей k_{2n}/k_n и не принято во внимание в формуле (41). Величины $d_\perp\sqrt{k_{2n}/k_n}$, $d_\|\sqrt{k_{2n}/k_n}$ представляют собой коэффициенты пропускания для амплитуд вида $A=\sqrt{k_n}\,E$. Амплитуды именно такого вида фигурируют в строгой теории ОФО в слоистых средах (см. формулы (12), (15), (18)), и для них интересующая нас разность

$$\frac{2k_n}{k_n+k_{2n}}\sqrt{\frac{k_{2n}}{k_n}}-1\sim\left(\frac{\Delta k_n}{2k_n}\right)^2, \tag{42}$$

т. е. оказывается второго порядка малости, и для амплитуд вида $\sqrt{k_n}\,E$ эффективное пропускание является полным.

Итак, вводим амплитуды A, разложение их по ортам $\mathbf{s}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{b}$ имеет вид

$$\begin{aligned}A_\perp &= \sqrt{k_n}\,E_\perp,\quad A_\| = \sqrt{k_n}\,E_\|,\\ A_{2\perp} &= \sqrt{k_{2n}}\,E_{2\perp},\quad A_{2\|} = \sqrt{k_{2n}}\,E_{2\|}.\end{aligned} \tag{43}$$

Принимая во внимание (38), (39), (42), из (6) находим

$$\begin{aligned}\mathbf{s}\nabla A_\perp &= -fA_\perp + f_{n\perp}A_{2\perp}\exp(2iS_{2n}),\\ \mathbf{s}_1\nabla A_{2\perp} &= -fA_{2\perp} + f_{n\perp}A_\perp\exp(2iS_n),\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{s}\nabla A_\| &= -fA_\| + f_{n\|}A_{2\|}\exp(2iS_{2n}),\\ \mathbf{s}_1\nabla A_{2\|} &= -fA_{2\|} + f_{n\|}A_\|\exp(2iS_n),\end{aligned} \tag{45}$$

$$f=\frac{1}{2}\,\frac{k_n}{k}\,\mathrm{div}\,\frac{\mathbf{s}k}{k_n}. \tag{46}$$

Соотношения (44)–(46) представляют собой искомое обобщение основного уравнения (6) геометрической оптики.

Уравнения (44), (45) включают в себя, как частный случай, теорию волн в слоистых средах. Действительно, здесь $\mathbf{s} = \mathbf{e}_z k_n/k + \mathbf{e}_x k_x$, компонента k_x постоянна, k/k_n зависит только от z, поэтому $\mathrm{div}(\mathbf{s}k/k_n) = 0$, и системы уравнений (44), (45) и (15), (18) формально совпадают.

Коэффициенты $f_{n\|}$ и $f_{n\perp}$ связаны простым соотношением (ср. с (19), (20))

$$f_{n\|}=\frac{\mathbf{s}\nabla(k_n/\varepsilon)}{2k_n/\varepsilon}=f_{n\perp}-\frac{\mathbf{s}\nabla\varepsilon}{2\varepsilon},\quad f_{n\perp}=\frac{\mathbf{s}\nabla k_n}{2k_n}, \tag{47}$$

из которого следует

$$f=\frac{1}{2}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s}-\frac{1}{2}(f_{n\perp}+f_{n\|}). \tag{48}$$

В отличие от (19) и (20), $f_{n\|}$ и $f_{n\perp}$, не выражаются через произведения производных от диэлектрической проницаемости и геометрических коэффициентов:

$$\begin{aligned}f_{n\perp} &= \frac{\mathbf{s}\nabla k_n}{2k_n}=\frac{\mathbf{s}\nabla(k^2-k_x^2)}{4k_n^2}=\\ &= \frac{k_x^2+k_n^2}{k_n^2}\,\frac{\mathbf{s}\nabla\varepsilon}{4\varepsilon}-\frac{\mathbf{s}\nabla k_x^2}{4k_n^2},\end{aligned} \tag{49}$$

$$f_{n\|}=\frac{k_x^2-k_n^2}{k_n^2}\,\frac{\mathbf{s}\nabla\varepsilon}{4\varepsilon}-\frac{\mathbf{s}\nabla k_x^2}{4k_n^2}. \tag{50}$$

Для плоской волны в слоистой среде величина k_x постоянна, и в (49) и (50) были бы отличны от нуля только первые члены в правых частях, содержащие $\nabla\varepsilon$. В случае же трехмерной неоднородности k_x зависит от $\mathbf{r}$ и соотношения для коэффициентов $f_{n\|}$,

$f_{n\perp}$ более сложные. В частности, явление Брюстера в трехмерно неоднородной среде имеет место не при $k_x^2 = k_n^2$, а при условии

$$(k_x^2 - k_n^2)\mathbf{s}\nabla\varepsilon - \varepsilon\mathbf{s}\nabla k_x^2 = 0. \qquad (51)$$

Слагаемое $\varepsilon\mathbf{s}\nabla k_x^2$ в соотношении (51) находит обычную интерпретацию с позиций молекулярной оптики. Как известно, отраженная волна в рамках молекулярных представлений рассматривается как результат интерференции волн, которые испущены диполями среды 2, индуцированными прошедшей волной. При угле Брюстера напряженность в прошедшей волне направлена вдоль волнового вектора отраженной волны, и амплитуда дипольных волн равна нулю, что и объясняет эффект Брюстера. Таково положение дел в случае плоских волн и слоистой среды. В среде с произвольной неоднородностью, в слое вблизи неплоской поверхности $\varepsilon(\mathbf{r}) = \text{const}$ луч испытывает дополнительное преломление, которое и характеризуется изменением тангенциальной составляющей вдоль луча $\mathbf{s}\nabla k_x^2$ в формуле (51). В силу поперечности изменяется и направление напряженности в преломленной волне, и условие локального брюстерового погашения отраженной.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Полученные в разд. 4 уравнения (44), (45) вносят в теорию объемное френелево отражение от неоднородности среды и в этом смысле они обобщают или расширяют фундаментальные соотношения (5) и (6) оптики неоднородных сред. Наряду с дифракционными явлениями, речь идет о включении еще одного элемента волновой оптики. В рамках лучевого подхода описания ОФО в слоистых и произвольно неоднородных средах оказались очень близкими. Отличие систем уравнений (44), (45) и (15), (18) в формальном отношении состоит всего лишь в существовании некоторой эффективной расходимости, которая содержит в себе обычную геометрическую расходимость $(1/2)\operatorname{div}\mathbf{s}$ и величины, обусловленные ОФО. Разумеется, по существу система (15), (18) неизмеримо проще, поскольку относится только к двум плоским волнам, тогда как система (44), (45) — к непрерывному распределению лучей и включает в себя все богатство геометрической оптики. Сколько-нибудь близкий уровень простоты при использовании волновых фронтов невозможен.

В соответствии с формулами Френеля, эффекты ОФО разделены в системе (44), (45) на собственно отражение от неоднородности и на ее прохождение. В явлении отражения проявляется интерференция падающей и отраженной волн. Влияние интерференции зависит от структуры неоднородности (от отношения ее поперечных и продольных размеров, от ширины пучка лучей, от ориентации лучей относительно поверхностей $\varepsilon(\mathbf{r}) = \text{const}$). Например, при «нормальном и скользящем падении», т. е., если приблизительно $\mathbf{s} \parallel \mathbf{n}$ или $\mathbf{s} \perp \mathbf{n}$, интерференция в обеих поляризациях более важна, чем при углах падения примерно 45° ($k_x^2 \approx k_n^2$). Если интерференция по каким-либо причинам оказывается несущественной, эффекты геометрической оптики и ОФО оказываются одного порядка величины.

При анализе ОФО адекватными оказались «нормированные» A-амплитуды (43), которые обладают эффективным пропусканием, равным единице. В этом отношении они подобны амплитудам $A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$ (12), (15), (17). Вместе с тем, эта «нормировка» может оказаться неудобной при анализе других задач, в частности, в кирхгофовой теории дифракционных явлений.

Подчеркнем на первый взгляд неожиданный результат — эффективная расходимость f в уравнениях (44), (45) одинакова для $\perp$- и $\parallel$-поляризации, хотя в формулах Френеля коэффициенты пропускания $d_\perp$ и $d_\parallel$ при конечном изменении диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ различны. Дело в том, что неравенство $d_\perp$ и $d_\parallel$ (см. формулы (28) и (30)) связано с множителем $\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}$ и отношением $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ в знаменателе выражения (30). При малом различии ε_1 и ε_2 эти величины в первом приближении компенсируются. Показательным является выражение (48) для эффективной расходимости, содержащее симметричную комбинацию $(f_{n\perp} + f_{n\parallel})/2$. Таким образом, зависимость от поляризации возникает только вследствие собственно самого отражения и интерференции волн (слагаемые в формулах (44), (45), содержащие $\exp(2iS_{2n})$ и $\exp(2iS_n)$). Поэтому в моделях, где не принимается во внимание собственно отражение и интерференция, эффекты ОФО изотропны.

В «неинтерференционном» приближении закон Рытова не нарушается — проекции $A_\perp$, $A_\parallel$ изменяются в равной мере, а вращение происходит вокруг бинормали, в согласии с формулами (7) и (8). Относительно трехгранника Френе вращение происходит с угловой скоростью $-\mathbf{s}/T$. Выводы о роли интерференции в поправках к закону Рытова качественно согласуются с результатами для наклонного распространения волн в одномерно неоднородных средах.

Изложенное построение относится к категории так называемых эвристических теорий, которые основаны не на упрощении строгой теории, а на общих правдоподобных соображениях, в частности, на принципе локальности. Нестрогим, эвристическим моментом является вывод дифференциального коэффициента пропускания. Надежным аргументом в пользу предлагаемой теории служит физически прозрачная структура уравнений (44), (45) и тот факт, что они автоматически сводятся к строгим выражениям в случае слоистых сред.

В развитой теории существенную роль играл принцип локальности, согласно которому использовались представления об отражении и преломлении лучей, законы Снеллиуса, формулы Френеля и т. д. и их применение к тонким слоям среды. Анализ ОФО сопровождается предельным переходом к иному классу локальных соотношений, к дифференциальным соотношениям, которые выходят за рамки принципа локальности в обычном его понимании. Иллюстрацией сказанного могут быть изотропия эффективной расходимости и необычные локальные условия (51) проявления эффекта Брюстера при ОФО в трехмерно неоднородной среде.

В соответствии с известными оптико-механическими и другими аналогиями, полученные результаты могут иметь отношение к волнам иной природы в неоднородных средах, к квантовым процессам, радиофизике, физике плазмы, акустике и т. д.

Благодарю Д. А. Шапиро за обсуждение статьи и ценные соображения.

Работа выполнена при поддержке гранта президента РФ НШ-7214.2006.2, РФФИ (грант № 05-02-17107), Интеграционного проекта СО РАН № 33 и программы президиума РАН № 8-3.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, Наука, Москва (1967).
2. Д. В. Сивухин, *Лекции по физической оптике*, ч. II, изд. Новосиб. унив., Новосибирск (1969).
3. С. М. Рытов, ДАН СССР **18**, 263 (1938).
4. С. М. Рытов, Труды ФИАН **2**, 41 (1940).
5. Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов, *Геометрическая оптика неоднородных сред*, Наука, Москва (1980).
6. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1970).
7. V. S. Liberman and B. Ya. Zel'dovich, Phys. Rev. E **49**, 2389 (1994).
8. A. Yu. Savchenko and B. Ya. Zel'dovich, Phys. Rev. E **50**, 2287 (1994).
9. Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах*, Изд. АН СССР, Москва (1957).
10. H. Kogelnik, Bell. Syst. Tech. J. **48**, 2909 (1969).
11. S. John, Phys. Rev. Lett. **58**, 2486 (1987).
12. А. Ярив, П. Юх, *Оптические волны в кристаллах*, Мир, Москва (1987).
13. С. Г. Раутиан, Опт. и спектр. **104**, 122 (2008).