ЖЭТФ, 2008, том 133, вып. 3, стр. 495–504 

# СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА – ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОГО КОНДЕНСАТА РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

*Ю. А. Аветисян*[a], *Е. Д. Трифонов*[b*]

[a] *Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук*
*410028, Саратов, Россия*

[b] *Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена*
*191186, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 13 июня 2007 г.

Дана общая формулировка полуклассического подхода к решению задачи о взаимодействии бозе-эйнштейновского конденсата разреженного газа с электромагнитным излучением. При этом не используется обычно применяемое приближение среднего поля. Предложены варианты систем уравнений Максвелла – Шредингера, решение которых описывает такие эффекты как сверхизлучательное рассеяние света, усиление светового пучка, усиление атомной волны (атомный лазер), индуцированная прозрачность и снижение групповой скорости света.

PACS: 03.75.Nt, 42.50.Gy

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из перспективных направлений исследования свойств бозе-эйнштейновских конденсатов является изучение их взаимодействия с электромагнитным полем лазерных источников [1]. С другой стороны, такие исследования являются новой областью нелинейной когерентной оптики [2, 3].

Наблюдавшиеся экспериментально эффекты когерентного взаимодействия бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК) разреженного газа с электромагнитным полем [4–8] были теоретически интерпретированы в ряде исследований [9–21]. При рассмотрении взаимодействия электромагнитного излучения с БЭК разреженного атомарного газа обычно ограничиваются приближением среднего поля, считая амплитуды электромагнитного поля и когерентных атомных волн однородными во всем объеме конденсата. Однако условие однородности выполняется лишь приближенно. Однородность лимитируется, прежде всего, конечностью размеров конденсата (точнее, размерами и формой ловушки) и неоднородностью возникающего (рассеянного или усиливаемого пробного) электромагнитного поля.

Отметим, что объяснение ряда наблюдавшихся эффектов невозможно в рамках приближения среднего поля. К ним следует отнести, в первую очередь, пространственную неоднородность рассеянных атомных облаков и асимметрию X-конфигурации рассеяния атомов «вперед» и «назад» в экспериментах по сверхизлучательному рассеянию света [4, 5]. Далее, только при отказе от приближения среднего поля можно адекватно описать стохастичность процесса рассеяния, которая проявляется в различии интенсивностей атомных облаков и световых импульсов, рассеянных «вверх» и «вниз» вдоль направления вытянутости конденсата. Учет неоднородности поля и атомной плотности существенно влияет также и на динамику рассматриваемых процессов, что важно для описания эволюции усиления атомных волн [7] и определения скорости замедленного светового импульса в опытах по электромагнитно-индуцированной прозрачности [8].

Учет поправки к приближению среднего поля, основанный на расширении базиса дебройлевских

*E-mail: thphys@herzen.spb.ru

волн, был предложен в нашей работе [22]. Первые численные решения задачи сверхизлучательного рассеяния без использования приближения среднего поля были выполнены в работах [23–25]. При этом в работах [23] использовалось представление одетого атома, а в работах [24, 25] были учтены только акты однократного рассеяния света атомом. В данной работе мы даем более полное обоснование полуклассического подхода, распространяя его на описание и других упомянутых выше эффектов взаимодействия БЭК с электромагнитным полем. Дополнительно к предыдущим рассмотрениям мы также учитываем дифракционные эффекты и формулируем законы сохранения, вытекающие из системы уравнений Максвелла – Блоха.

## 2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА – ШРЕДИНГЕРА

Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ подчиняется волновому уравнению

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

решение которого можно представить в интегральной форме

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}^{in}(\mathbf{r},t)+\int\limits_V d\mathbf{r}'\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (2)$$

явно учитывающей необходимые граничные условия, в частности, условия излучения (см., например, [26]). Здесь $\mathbf{E}^{in}$ — внешнее падающее поле, $\mathbf{P}$ — поляризованность конденсата, $t'=t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$ — запаздывающее время, $c$ — скорость света в вакууме, интегрирование проводится по объему $V$ атомной системы. Будем рассматривать взаимодействие конденсата с несколькими модами электромагнитного поля. Каждую моду поля будем характеризовать волновым вектором $\mathbf{k}$ и частотой $\omega=kc$. Ради простоты будем считать, что распространение этих мод происходит в коллинеарных или ортогональных направлениях и что все моды имеют одинаковую поляризацию, характеризуемую единичным вектором $\boldsymbol{\varepsilon}$. Рассмотрим моду поляризованности

$$\mathbf{P}_\mathbf{k}=\boldsymbol{\varepsilon}P_\mathbf{k}(\mathbf{r},t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t), \quad (3)$$

с комплексной амплитудой $P_\mathbf{k}(\mathbf{r},t)$, медленно изменяющейся во времени ($|\partial P_\mathbf{k}/\partial t|\ll\omega|P_\mathbf{k}|$). Будем предполагать также, что в направлении распространения моды выполняется приближение медленного изменения в пространстве ($|\partial P_\mathbf{k}/\partial r_\parallel|\ll k|P_\mathbf{k}|$, где $r_\parallel\equiv\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}/k$). Подставляя (3) в уравнение (2) и используя параксиальное приближение, находим, что рассматриваемая мода поляризованности индуцирует моду поля

$$\mathbf{E}_\mathbf{k}=\boldsymbol{\varepsilon}E_\mathbf{k}(\mathbf{r},t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t)$$

с комплексной амплитудой

$$E_\mathbf{k}(\mathbf{r},t)=k^2\int\limits_{V'}d\mathbf{r}'\frac{P_\mathbf{k}(\mathbf{r}',t')}{r_\parallel-r'_\parallel}\exp\left[i\frac{k}{2}\frac{(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}'_\perp)^2}{r_\parallel-r'_\parallel}\right]. \quad (4)$$

Здесь $t'=t-(r_\parallel-r'_\parallel)/c$, $r_\parallel$ ($\mathbf{r}_\perp$) — параллельные (перпендикулярные) вектору $\mathbf{k}$ компоненты радиус-вектора $\mathbf{r}$, интегрирование проводится по части $V'$ объема, для которой $r'_\parallel<r_\parallel$ (т. е. по части объема, отсекаемой плоскостью, ортогональной вектору $\mathbf{k}$ и проходящей через точку $\mathbf{r}$). При пренебрежении дифракционными эффектами, что оправдано лишь при большом значении числа Френеля для рассматриваемой моды,

$$E_\mathbf{k}(r_\parallel,\mathbf{r}_\perp,t)=i2\pi k\int\limits_0^{r_\parallel}dr'_\parallel P_\mathbf{k}(r'_\parallel,\mathbf{r}_\perp,t'). \quad (5)$$

Считая падающие лазерные пучки квазирезонансными с одним из электронных переходов в атоме, каждый атом будем рассматривать как двухуровневую или трехуровневую электронно-ядерную систему с определенным значением полного спина. Целое значение полного спина позволяет рассматривать такой атом как бозе-частицу.

Атом будем характеризовать не только его внутренним состоянием, но и состоянием поступательного движения. Мы предполагаем, что первоначально все атомы образуют БЭК, т. е. находятся в основном состоянии с почти нулевым значением импульса. Базис волновых функций для двухуровневого атома выбираем в виде

$$\begin{aligned}|a,\mathbf{k}\rangle&=\varphi_aV^{-1/2}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}),\\|b,\mathbf{k}'\rangle&=\varphi_b\exp(-i\omega_0t)V^{-1/2}\exp(i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}),\end{aligned} \quad (6)$$

где $\omega_0$ — частота лазерного поля, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор центра инерции атома, индексами $a$ и $b$ обозначены, соответственно, основное и возбужденное внутренние состояния атома (компоненты сверхтонкой структуры). Отметим, что функции (6) отличаются от волновых функций свободного атома зависящим от времени фазовым множителем. Вместо частоты, соответствующей собственному значению энергии атома (в которой должна быть учтена также и кинетическая энергия поступательного движения), мы берем частоту квазирезонансного лазерного поля. Выбранное на таком базисе представление отличается от обычно используемого представления «взаимодействия» и соответствующие поправки появятся в уравнении Шредингера. Общее выражение для волновой функции атома может быть записано в виде

$$\psi = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t)|a,\,\mathbf{k}\rangle + \sum_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r},t)|b,\,\mathbf{k}'\rangle, \qquad (7)$$

где $a_{\mathbf{k}}$, $b_{\mathbf{k}'}$ — зависящие от времени коэффициенты разложения, которые, в отличие от предыдущих рассмотрений, мы будем считать также слабо зависящими от координат. Слабая зависимость от координат предполагает пренебрежение изменением этих величин на интервале, равном длине волны излучения.

Считая газ конденсата идеальным, мы полагаем состояния всех атомов тождественными. Одновременно это обеспечивает условие симметрии волновой функции системы бозе-частиц. В этом случае оператор поляризованности можно записать как

$$\hat{P}(\mathbf{r}') = N \begin{bmatrix} 0 & d \\ \bar{d} & 0 \end{bmatrix} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \qquad (8)$$

где $N$ — полное число атомов БЭК, $d$ — матричный элемент дипольного момента оптического перехода атома, который далее мы будем считать вещественным. Используя (7), для среднего квантовомеханического значения комплексной амплитуды моды поляризованности $P_{\mathbf{k}}$ с волновым вектором $\mathbf{k}$ получим

$$P_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t) = N_0 d \sum_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}(\mathbf{r},t)\bar{a}_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r},t), \qquad (9)$$

где $N_0 \equiv N/V$ — концентрация атомов, черта над символом обозначает комплексное сопряжение. Комплексная амплитуда соответствующей моды поля $E_{\mathbf{k}}$ определяется уравнением (4).

Теперь запишем уравнение Шредингера для двухуровневого атома, взаимодействующего с несколькими модами поля в дипольном приближении:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \begin{bmatrix} \hbar\omega_{ba} - \dfrac{\hbar^2\nabla^2}{2M} & -Ed \\ -Ed & -\dfrac{\hbar^2\nabla^2}{2M} \end{bmatrix}\psi. \qquad (10)$$

Здесь $\omega_{ba}$ — частота атомного перехода, $M$ — масса атома, $E$ — полное поле, которое кроме полей, индуцируемых поляризованностью, включает также внешнее (или затравочное флуктуационное) поле $E^{in}$ для каждой из мод. Тогда, пренебрегая быстро осциллирующими во времени и в пространстве слагаемыми, получим

$$\begin{aligned} \dot{a}_{\mathbf{k}} &= -i\varepsilon_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}} + \frac{id}{\hbar}\sum_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}(\bar{E}_{\mathbf{k}'} + \bar{E}^{in}_{\mathbf{k}'}), \\ \dot{b}_{\mathbf{k}} &= \left(i\Delta - i\varepsilon_{\mathbf{k}} - \frac{\gamma}{2}\right) b_{\mathbf{k}} + \frac{id}{\hbar}\sum_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(E_{\mathbf{k}'} + E^{in}_{\mathbf{k}'}). \end{aligned} \qquad (11)$$

Здесь $\Delta = \omega_0 - \omega_{ba}$ — расстройка, $\varepsilon_{\mathbf{k}} \equiv \hbar k^2/2M$ — частотный сдвиг, обусловленный кинетической энергией атома, обладающего импульсом $\hbar\mathbf{k}$, $\gamma$ — феноменологически введенная радиационная константа, описывающая спонтанный распад возбужденного электронного состояния атома. Напомним, что мы выделили осцилляции во времени на частоте $\omega_0$ некоторого основного поля. Поэтому, если какое-то внешнее поле имеет другую несущую частоту, то в комплексную амплитуду этой моды должен быть добавлен соответствующий временной фазовый множитель. При выводе уравнения (11) для коэффициентов разложения волновой функции предполагается медленное изменение этих коэффициентов по пространственным координатам. Наряду с этим сама волновая функция содержит быстро осциллирующие экспоненты, по которым проводится разложение. Подставив полную волновую функцию в уравнение Шредингера (10), исключаем волновые функции внутренних (электронных) степеней свободы. Из полученного уравнения выражаем производную по времени одного из коэффициентов разложения. В правой части полученного уравнения пренебрегаем быстро осциллирующими членами. Так же поступаем с остальными коэффициентами разложения.

При достаточно большой расстройке в уравнениях (11) для возбужденных состояний появляются члены, обусловливающие быстрые осцилляции решения. Пренебрегая этими осцилляциями, можно в соответствующих уравнениях опустить производные, превратив эти уравнения из дифференциальных в алгебраические. Получаемое при этом решение соответствует модели «одетого атома», что значительно облегчает процедуру численного решения системы уравнений Максвелла – Шредингера (4), (9), (11). Совместное решение уравнений (4), (9), (11) позволяет получить не только динамику мод поля и заселенности атомных состояний, как это было сделано в приближении среднего поля [21, 27–31], но и описать неоднородность полевых и атомных мод в пространстве. Пространственная зависимость поля определяется уравнением (4). Распределение концентрации атомов в движущемся облаке с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ описывается квадратом модуля $|a_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t)|^2$.

Заметим, что предлагаемый подход, основанный на уравнениях Максвелла – Шредингера, можно считать приемлемым только в пределе малых значений релаксационных констант для атомной подсистемы. В более общем случае от уравнения Шредингера следует перейти к уравнениям Блоха для матрицы плотности, приведенным в Приложении A.

В структуре уравнения Шредингера (11) отражены законы сохранения импульса и энергии полной системы атомы+поле. Сохранение импульса проявляется в том, что в результате взаимодействия с модой поля $E_{\mathbf{k}'}$ переход из состояния $|a,\mathbf{k}_1\rangle$ возможен только в состояние $|b,\mathbf{k}\rangle$, с $\mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}'$. Формально закон сохранения импульса обусловлен правилами отбора для матричных элементов оператора взаимодействия в уравнении Шредингера. Для формулировки закона сохранения энергии проведем следующие преобразования. Умножим верхнее из уравнений (11) на $-\hbar\omega_0 N_0 \bar{a}_{\mathbf{k}}$ и сложим полученное уравнение с комплексно сопряженным. Просуммировав результат по $\mathbf{k}$, с помощью (9) получим

$$-\hbar\omega_0 N_0 \frac{\partial}{\partial t}\sum_{\mathbf{k}}|a_{\mathbf{k}}|^2 = -i\omega_0\sum_{\mathbf{k}'}\bar{E}^{tot}_{\mathbf{k}'}P_{\mathbf{k}'} + \text{c.c.}, \qquad (12)$$

где $E^{tot}_{\mathbf{k}'}\equiv E_{\mathbf{k}'}+E^{in}_{\mathbf{k}'}$. Подобные действия с нижним из уравнений (11) дают

$$\hbar\omega_0 N_0\left[\gamma\sum_{\mathbf{k}}|b_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{\partial}{\partial t}\sum_{\mathbf{k}}|b_{\mathbf{k}}|^2\right] = = -i\omega_0\sum_{\mathbf{k}'}\bar{E}^{tot}_{\mathbf{k}'}P_{\mathbf{k}'} + \text{c.c.} \qquad (13)$$

Отметим, что в правых частях уравнений (12), (13) суммирование проводится по конечному числу учитываемых мод поля и поляризованности с волновыми векторами $\mathbf{k}'$, тогда как в левых частях этих уравнений $\mathbf{k}$ принимает, вообще говоря, бесконечное множество значений (при учете актов рассеяния всех кратностей, что подробнее обсуждается ниже). Вычитая из уравнения (13) уравнение (12), получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\mathbf{k}}\left(|a_{\mathbf{k}}|^2+|b_{\mathbf{k}}|^2\right) = -\gamma\sum_{\mathbf{k}}|b_{\mathbf{k}}|^2, \qquad (14)$$

выражающее при $\gamma=0$ сохранение нормировки волновой функции атома. Правая часть уравнений (12), (13) есть усредненная величина $\mathbf{E}^{tot}\partial\mathbf{P}/\partial t$, т. е. плотность работы в единицу времени полного поля $\mathbf{E}^{tot}$ над током поляризованности $\partial\mathbf{P}/\partial t$ (в рассматриваемом приближении медленного изменения комплексных амплитуд во времени и в пространстве).

Используя дифференциальную форму волнового уравнения (4), придем к уравнению для полного поля:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r_{\parallel}} - \frac{i}{2k_0}\nabla^2_{\perp} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right\}E^{tot}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t) = = i2\pi k_0 P_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t), \qquad (15)$$

где мы учли, что внешнее поле $E^{in}_{\mathbf{k}}$ удовлетворяет соответствующему однородному уравнению. Переобозначив для краткости $E^{tot}_{\mathbf{k}}\to E_{\mathbf{k}}$, умножив уравнение (15) слева на $c(2\pi)^{-1}\bar{E}_{\mathbf{k}}$ и сложив полученное уравнение с комплексно сопряженным, получим

$$\operatorname{div}\mathbf{\Pi}^{\mathbf{k}} + \frac{\partial W^{\mathbf{k}}_f}{\partial t} + [-i\omega_0\bar{E}_{\mathbf{k}}P_{\mathbf{k}} + \text{c.c.}] = 0. \qquad (16)$$

Здесь введены усредненная плотность энергии поля $W^{\mathbf{k}}_f \equiv |E_{\mathbf{k}}|^2/2\pi$ для моды с волновым вектором $\mathbf{k}$ и соответствующий вектор Пойнтинга с компонентами

$$\mathbf{\Pi}^{\mathbf{k}} = (\Pi^{\mathbf{k}}_{\parallel}, \mathbf{\Pi}^{\mathbf{k}}_{\perp}),$$
$$\Pi^{\mathbf{k}}_{\parallel} = cW^{\mathbf{k}}_f, \quad \mathbf{\Pi}^{\mathbf{k}}_{\perp} = -\frac{ic}{4\pi k_0}\,\bar{E}_{\mathbf{k}}\,\nabla_{\perp}E_{\mathbf{k}} + \text{c.c.} \qquad (17)$$

Заменив в уравнении (16) $\mathbf{k}\to\mathbf{k}'$ и просуммировав по $\mathbf{k}'$ с учетом уравнения (12), приходим к уравнению непрерывности

$$\operatorname{div}\mathbf{\Pi} + \frac{\partial}{\partial t}\left(W_f - \hbar\omega_0 N_0\sum_{\mathbf{k}}|a_{\mathbf{k}}|^2\right) = 0, \qquad (18)$$

где

$$\mathbf{\Pi}\equiv\sum_{\mathbf{k}'}\mathbf{\Pi}^{\mathbf{k}'}, \quad W_f\equiv\sum_{\mathbf{k}'}W^{\mathbf{k}'}_f.$$

Соотношение (18) является дифференциальной формой записи закона сохранения энергии в рассматриваемых приближениях. Уравнение (14) позволяет переписать это соотношение в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{\Pi} + \gamma W_b + \frac{\partial}{\partial t}(W_f + W_b) = 0. \qquad (19)$$

Здесь введена величина $W_b \equiv \hbar\omega_0 N_0\sum_{\mathbf{k}}|b_{\mathbf{k}}|^2$, которую можно интерпретировать как плотность энергии атомной системы, находящейся в виртуальном возбужденном состоянии. Формулировка закона сохранения энергии в интегральной форме приводится в Приложении B.

## 3. СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА И УСИЛЕНИЕ АТОМНОГО ПУЧКА

Помимо обычного рэлеевского рассеяния на БЭК паров натрия в экспериментах [4, 5] наблюдалось и кооперативное рассеяние света. В отличие от рэлеевского рассеяния, при котором каждый атом рассеивает свет независимо, в кооперативном рассеянии проявляется действие полей, рассеянных от одних атомов, на другие. Если кооперативное рассеяние происходит в условиях сохранения фазовой памяти атомов (что типично для БЭК), то оно имеет характер когерентного рассеяния (происходит сложение напряженностей полей, а не их интенсивностей). Такие эффекты принято называть сверхизлучательными, поскольку интенсивность рассеяния оказывается пропорциональной квадрату числа рассеивающих атомов [32, 33]. В соответствии с условиями экспериментов будем рассматривать протяженный БЭК удлиненной формы: $L \gg D \sim \sqrt{S_\perp} \gg \lambda$, где $L$ и $D$ характерные продольный и поперечный размеры конденсата, $S_\perp$ — площадь его поперечного сечения, $\lambda$ — длина волны излучения. Будем учитывать взаимодействие атомов БЭК с четырьмя модами электромагнитного поля. Возбуждающий лазерный луч с волновым вектором $\mathbf{k}_0$ будем считать направленным перпендикулярно оси конденсата, а рассеянные волны — в противоположных направлениях вдоль конденсата, с волновыми векторами $\mathbf{k}_\pm$. Мы также будем рассматривать когерентно отраженную волну, распространяющуюся навстречу лазерному лучу (с волновым вектором $-\mathbf{k}_0$).

Условимся направление возбуждающего лазерного луча принимать за ось $x$, а направление вытянутости конденсата — за ось $y$. Поляризацию лазерного поля считаем направленной вдоль оси $z$. Состояния атома, необходимые для описания рассеяния, будем характеризовать двумя компонентами импульса: $k_x$, $k_y$. Величины $k_x$ и $k_y$ можно выбирать кратными модулю волнового вектора падающего поля:

$$k_x = k_0 n_x, \quad k_y = k_0 n_y, \tag{20}$$

где $k_0 = \omega_0/c$, $n_x = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $n_y = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Соответственно введем более детальные обозначения для атомных состояний $|a, n_x, n_y\rangle$, $|b, n'_x, n'_y\rangle$ и коэффициентов в разложении (7): $a_{\mathbf{k}} \equiv a_{n_x,n_y}$, $b_{\mathbf{k}'} \equiv b_{n'_x,n'_y}$.

Согласно уравнению (9), записанному в новых обозначениях, для мод поляризованности, распространяющихся в противоположных направлениях вдоль конденсата (непосредственно определяющих поле сверхизлучательного рассеяния), можно записать

$$R_{0,\pm k_0} = \alpha \sum_{n_x,\, n_y} b_{n_x,\, n_y}\, \bar{a}_{n_x, n_y \mp 1}. \tag{21}$$

Двойной индекс у амплитуды поляризованности служит для обозначения двух компонент волнового вектора рассматриваемой моды, и введен размерный коэффициент $\alpha \equiv k_0^2/i$, упрощающий вид последующих формул.

Для нахождения моды поля, индуцируемого соответствующей модой поляризованности, используем уравнение (4):

$$\begin{gathered} E_{0,\,k_0}(x,y,z,t) = \\ = \int\limits_0^y dy' \int dz' dx' \frac{R_{0,\,k_0}(x',y',z',t')}{y-y'} \times \\ \times \exp\left(i\frac{k_0}{2}\frac{(z-z')^2 + (x-x')^2}{y-y'}\right), \\ E_{0,-k_0}(x,y,z,t) = \\ = \int\limits_y^L dy' \int dz' dx' \frac{R_{0,-k_0}(x',y',z',t')}{y'-y} \times \\ \times \exp\left(i\frac{k_0}{2}\frac{(z-z')^2 + (x-x')^2}{y'-y}\right). \end{gathered} \tag{22}$$

Здесь мы перешли к безразмерным комплексным амплитудам для поля, заменив $-id\tau_R\hbar^{-1}E_{0,\,\pm k_0}$ на $E_{0,\,\pm k_0}$ и введя временной масштаб $\tau_R \equiv \hbar/N_0 d^2$.

Таким образом, в направлении вытянутости конденсата формируются две встречные волны. Подобные выражения получаются для двух волн, распространяющихся вдоль возбуждающего лазерного луча в прямом и обратном направлениях:

$$\begin{gathered} E_{k_0,\,0}(x,y,z,t) = \\ = \int\limits_{-D/2}^x dx' \int dy' dz' \frac{R_{k_0,\,0}(x',y',z',t')}{x-x'} \times \\ \times \exp\left(i\frac{k_0}{2}\frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{x-x'}\right), \\ E_{-k_0,\,0}(x,y,z,t) = \\ = \int\limits_x^{D/2} dx' \int dy' dz' \frac{R_{-k_0,\,0}(x',y',z',t')}{x'-x} \times \\ \times \exp\left(i\frac{k_0}{2}\frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{x'-x}\right), \end{gathered} \tag{23}$$

где

$$R_{\pm k_0,0} = \alpha \sum_{n_x,\, n_y} b_{n_x,\, n_y}\, \bar{a}_{n_x \mp 1, n_y}. \tag{24}$$

При пренебрежении дифракцией вместо (22) и (23) имеем

$$
\begin{aligned}
&E_{0,\,k_0}(x,y,z,t) = \\
&= i2\pi k_0^{-1}\int\limits_0^y dy' R_{0,\,k_0}(x,y',z,t'),\\
&E_{0,\,-k_0}(x,y,z,t) = \\
&= i2\pi k_0^{-1}\int\limits_y^L dy' R_{0,\,-k_0}(x,y',z,t'),\\
&E_{k_0,\,0}(x,y,z,t) = \\
&= i2\pi k_0^{-1}\int\limits_{-D/2}^x dx' R_{k_0,\,0}(x',y,z,t'),\\
&E_{-k_0,\,0}(x,y,z,t) = \\
&= i2\pi k_0^{-1}\int\limits_x^{D/2} dx' R_{-k_0,\,0}(x',y,z,t').
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Уравнение Шредингера (11) может быть записано в виде

$$
\begin{aligned}
\dot a_{n_x,n_y} &= \bar E_{+x}\, b_{n_x+1,n_y} + \bar E_{-x}\, b_{n_x-1,n_y} + \\
&+ \bar E_{+y}\, b_{n_x,n_y+1} + \bar E_{-y}\, b_{n_x,n_y-1} - i\varepsilon_{n_x,n_y} a_{n_x,n_y},\\
\dot b_{n_x,n_y} &= -E_{+x}\, a_{n_x-1,n_y} - E_{-x}\, a_{n_x+1,n_y} - \\
&- E_{+y}\, a_{n_x,n_y-1} - E_{-y} a_{n_x,n_y+1} - \\
&- \left(\frac{\gamma}{2} + i\varepsilon_{n_x,n_y} - i\Delta\right) b_{n_x,n_y},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

где

$$
\begin{aligned}
E_{\pm x} &= E_{\pm k,0} + E^{in}_{\pm k,0},\\
E_{\pm y} &= E_{0,\pm k} + E^{in}_{0,\pm k}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

В уравнениях (26) мы перешли к безразмерному времени (заменив $t/\tau_R \to t$) и к соответствующим безразмерным параметрам $\gamma, \Delta, \varepsilon_{n_x,n_y}$, выраженным в единицах $\tau_R^{-1}$. Единственным ненулевым начальным условием для решения этой системы уравнений является $a_{0,\,0} = 1$.

Помимо генерации рассмотренных полевых мод имеет место некогерентное рэлеевское рассеяние в произвольных направлениях, которое обусловливает затухание возбужденного состояния с коэффициентом $\gamma$. Рэлеевское рассеяние является не только альтернативным процессом, но и инициирующим фактором для сверхизлучательного рассеяния. Оценка амплитуды поля рэлеевского рассеяния вдоль конденсата приведена в работах [21]. Такое инициирование процесса сверхизлучательного рассеяния использовалось нами в работах [24, 25, 29].

Заметим, что начальное рэлеевское рассеяние света вдоль конденсата (в направлениях, близких к $\mathbf{k}_\pm = (0, \pm k_0)$) в силу закона сохранения импульса приводит к появлению атомов БЭК с импульсами $(k_0, \mp k_0)$. Таким образом, учет рэлеевского рассеяния может быть косвенно осуществлен заданием малой, но ненулевой начальной заселенности состояний $|a,\,1,\mp 1\rangle$, что достаточно для инициирования кооперативного рассеяния в рамках полуклассического подхода (см. работу [17]). Также следует отметить возможность начальной заселенности этих состояний вследствие наличия «надконденсатной» фракции атомов. Такой механизм инициирования сверхизлучательного рассеяния родственен эффекту усиления атомных волн, который рассматривается в конце данного раздела.

Имеется еще и другой источник затравочного поля. Когерентное поле, рассеянное вдоль конденсата при возбуждении БЭК в радиальном направлении, из-за конечности системы не равно нулю. Однако оценки показывают, что в условиях названных экспериментов интенсивность этого когерентного затравочного поля сравнительно мала по сравнению с интенсивностью обычного рэлеевского рассеяния. Вместе с тем, можно ожидать, что при увеличении числа атомов БЭК и уменьшении его поперечного размера $D$ интенсивность этого когерентного поля может превысить интенсивность начального спонтанного рассеяния. Это должно привести к подавлению стохастичности процесса (в частности, к подавлению флуктуаций направленности сверхзлучения).

Рассмотрим теперь усиление атомного пучка [7]. Здесь схема опыта такая же, как в экспериментах по рассеянию. Сначала с помощью аксиального и радиального (перпендикулярного к оси конденсата) лазерных импульсов в конденсате создается небольшая доля атомов, получивших импульс отдачи в результате вынужденного рассеяния. Как и раньше, частоты обоих лазерных пучков сдвинуты в красную сторону, при этом частота аксиального пучка меньше частоты радиального на величину, соответствующую кинетической энергии (энергии отдачи) атома. Затем в течение второго этапа эксперимента проводится облучение только радиальным пучком более высокой мощности, а аксиальный пучок выключается. Начинается сверхизлучательное рассеяние, которое инициируется наличием созданного на первом этапе атомного облака, движущегося в противоположном направлении. Дальнейший рост интенсивности этого облака интерпретируется как вынужденное усиление атомного пучка, названное авторами эксперимента «атомным лазером».

Данная задача аналогична задаче о рассеянии. Отличие заключается в том, что поле $\mathbf{E}_{+y}$ на первой стадии процесса должно помимо флуктуационной части иметь слагаемое $E_{+y}^{in}$, играющее роль инициирующего поля. Это поле имеет такую же интенсивность, как $E_{+x}^{in}$, и вместе с последним создает облако атомов с импульсами $\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_+$. На второй стадии процесса поле $E_{+y}^{in}$ выключается, а радиальное поле делают более интенсивным. В течение второй стадии исследуется усиление потока атомов с импульсом $\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_+$, возникшего на первой стадии. Для оценки величины усиления заселенность первого облака можно сравнить с заселенностью облака атомов с импульсом $\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_-$. Теория этого эффекта в приближении среднего поля была рассмотрена в работах [22, 28].

## 4. КОГЕРЕНТНОЕ УСИЛЕНИЕ СВЕТА И СОКРАЩЕНИЕ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ СВЕТОВОГО ИМПУЛЬСА

Когерентное усиление света, наблюдавшееся в работе [6], может быть проанализировано по схеме, аналогичной рассмотренной в разд. 3. Если (ради простоты) ограничиться случаем взаимно ортогональных одевающего и пробного (усиливаемого) пучков, то можно использовать систему уравнений (26), рассматривая в качестве одевающего пучка поле $E_{+x}$, а в качестве пробного — $E_{+y}$. При этом моды $E_{-x}$ и $E_{-y}$ следует положить равными нулю. При усилении света в работе [6] наблюдалось сокращение групповой скорости усиливаемого импульса. В приближении среднего поля этот эффект был описан в работах [28, 34].

Другой способ «задержки» светового импульса связан с эффектом индуцированной прозрачности [8]. Эксперимент проводился с парами натрия, охлажденными до температуры фазового перехода $T_c = 435$ нК при пиковой плотности облака $5\cdot 10^{12}$ см$^{-1}$. В отличие от рассмотренных выше эффектов, в которых применялась двухуровневая модель атома, здесь использована модель трехуровневого атома. На охлажденную систему направлялись два взаимно перпендикулярных пучка: пробный и связывающий, настроенные соответственно в резонанс с переходами $1\to 3, 2\to 3$, где состояния 1 и 2 соответствуют подуровням сверхтонкой структуры основного терма $3S_{1/2}$, а состояние 3 — одному из подуровней сверхтонкой структуры возбужденного состояния $3P_{3/2}$. Первоначально заселенным является только уровень 1. Более интенсивный связывающий луч создает когерентную суперпозицию состояний 2 и 3, в результате для перехода возникает прозрачность в некотором узком частотном интервале. В этом же интервале возникает линейная дисперсия, приводящая к сокращению групповой скорости света [35].

Теория этого эффекта для бозе-эйнштейновского конденсата в приближении среднего поля была рассмотрена в работе [34]. Здесь мы даем формулировку этой задачи, отказавшись от этого приближения. Каждому из трех электронных уровней однозначно может быть приписано значение импульса атома. Основному состоянию 1 соответствует нулевое значение импульса. Возбужденному состоянию 3 может быть приписан импульс $\mathbf{k}_p$, равный импульсу фотона пробного луча. Переход в состояние 2 происходит из состояния 3 под действием связывающего луча с амплитудой $E_c$ и с импульсом фотона $\mathbf{k}_c$. Поэтому электронному состоянию 2 соответствует значение импульса атома $\mathbf{k}_p-\mathbf{k}_c$. Таким образом, базис состояний может быть выбран в виде

$$\begin{aligned}\psi_1 &= |1,0\rangle,\\ \psi_2 &= |2,\mathbf{k}_p-\mathbf{k}_c\rangle,\\ \psi_3 &= |3,\mathbf{k}_p\rangle.\end{aligned} \tag{28}$$

Уравнение Шредингера для этой двухмодовой задачи с тремя уровнями принимает вид

$$\begin{aligned}\dot C_1 &= C_3\overline{E}_p,\\ \dot C_2 &= C_3\overline{E}_c,\\ \dot C_3 &= -\frac{\gamma}{2}C_3 - C_1E_p - C_2E_c.\end{aligned} \tag{29}$$

Фигурирующие здесь поля $E_c$ и $E_p$ могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered}E_c(x,y,z,t) =\\ = E_c^{in} + \int\limits_0^x dx'\int dy'dz'\,\frac{R_c(x',y',z',t')}{x-x'}\times\\ \times\exp\left(i\frac{k_0}{2}\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{x-x'}\right),\\ E_p(x,y,z,t) =\\ = E_p^{in} + \int\limits_0^y dy'\int dz'dx'\,\frac{R_p(x',y',z',t')}{y-y'}\times\\ \times\exp\left(i\frac{k_0}{2}\frac{(z-z')^2+(x-x')^2}{y-y'}\right),\end{gathered} \tag{30}$$

$R_p = \alpha C_3 \overline{C}_1$, $R_c = \alpha C_3 \overline{C}_2$. При пренебрежении дифракцией уравнения (30) заменяются уравнениями

$$E_c(x,y,z,t) = E_c^{in} + i2\pi k_0^{-1} \int_0^x dx' R_c(x',y,z,t'),$$
$$E_p(x,y,z,t) = E_p^{in} + i2\pi k_0^{-1} \int_0^y dy' R_p(x,y',z,t'). \quad (31)$$

Единственное ненулевое начальное условие: $C_1(0) = 1$. Отметим, что описанная выше постановка задачи в частном случае одномерной модели и пренебрежении дифракцией формально совпадает с той, которая была использована в работе [35] для системы локализованных атомов.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В нашей модели БЭК представляет собой разреженный идеальный газ. В начальный момент времени атомы находятся в основном состоянии с почти нулевым значением импульса поступательного движения. Из-за слабости безызлучательных релаксационных процессов, связывающих основное и возбужденное электронные состояния атома, сохраняется фазовая корреляция между различными состояниями атомов. Формально это означает, что возникают долгоживущие недиагональные элементы матрицы плотности, соответствующие этим состояниям. Это придает сверхизлучательный характер взаимодействию атомов с излучением, т. е. приводит к пропорциональности интенсивности различных рассмотренных процессов квадрату числа атомов БЭК. В этой работе мы дали формулировку задачи, не используя приближение среднего поля, как это было сделано ранее. Поступательное движение атомов описывается уже не плоскими волнами, а пакетами плоских волн с амплитудами, медленно изменяющимися на интервалах, сравнимых с дебройлевской длиной волны. То же относится и к модам электромагнитного поля, возникающим в конденсате: они также представляют собой пакеты плоских волн с амплитудами, слабо меняющимися на оптической длине волны. Заметим, что в рассматриваемых экспериментах длины дебройлевской и оптической волн одного порядка величины. Предварительные результаты численных решений этих уравнений для сверхизлучательного рассеяния приведены в наших работах [24, 25]. В данной работе мы предлагаем также учет дифракционных эффектов, что может дать важную информацию о диаграмме направленности и стохастической структуре сверхизлучательного рассеяния.

Авторы выражают благодарность А. С. Трошину за обсуждение затронутых в статье вопросов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 06-02-16571, 07-02-91011).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Уравнения Максвелла–Шредингера применимы только при отсутствии релаксационных процессов в атомной подсистеме. В более общем случае уравнение Шредингера (11) следует заменить уравнениями Блоха для матрицы плотности, имеющими вид:

$$\begin{gathered}
\dot{\rho}_{a,\mathbf{k};\,a,\mathbf{k}'} = \left(-i\varepsilon_{\mathbf{k}} + i\varepsilon_{\mathbf{k}'} - \Gamma_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\right)\rho_{a,\mathbf{k};\,a,\mathbf{k}'} + \\
+\frac{id}{\hbar}\sum_{\mathbf{k}''}\left[\rho_{b,\mathbf{k}+\mathbf{k}'';\,a,\mathbf{k}'}\bar{E}^{tot}_{\mathbf{k}''} - \rho_{a,\mathbf{k};\,b,\mathbf{k}'+\mathbf{k}''}\,E^{tot}_{\mathbf{k}''}\right], \\
\dot{\rho}_{a,\mathbf{k};\,b,\mathbf{k}'} = \left(-i\varepsilon_{\mathbf{k}} + i\varepsilon_{\mathbf{k}'} - i\Delta - \gamma/2\right)\rho_{a,\mathbf{k};\,b,\mathbf{k}'} + \\
+\frac{id}{\hbar}\sum_{\mathbf{k}''}\left[\rho_{b,\mathbf{k}+\mathbf{k}'';\,b,\mathbf{k}'} - \rho_{a,\mathbf{k};\,a,\mathbf{k}'-\mathbf{k}''}\right]\bar{E}^{tot}_{\mathbf{k}''}, \\
\dot{\rho}_{b,\mathbf{k};\,b,\mathbf{k}'} = \left(-i\varepsilon_{\mathbf{k}} + i\varepsilon_{\mathbf{k}'} - \gamma\right)\rho_{b,\mathbf{k};\,b,\mathbf{k}'} + \\
+\frac{id}{\hbar}\sum_{\mathbf{k}''}\left[\rho_{a,\mathbf{k}-\mathbf{k}'';\,b,\mathbf{k}'}E^{tot}_{\mathbf{k}''} - \rho_{b,\mathbf{k};\,a,\mathbf{k}'-\mathbf{k}''}\bar{E}^{tot}_{\mathbf{k}''}\right].
\end{gathered} \quad (32)$$

Здесь $E^{tot}_{\mathbf{k}} \equiv E_{\mathbf{k}} + E^{in}_{\mathbf{k}}$, $\Gamma_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ — константы поперечной релаксации. Аналогичными релаксационными членами для возбужденного состояния и для недиагонального элемента матрицы плотности можно пренебречь из-за присутствия более эффективной релаксации, обусловленной радиационным затуханием.

Таким образом, при значительной релаксации атомной подсистемы моделирование рассмотренных явлений следует проводить на основании совместного решения уравнений Блоха (32) и полевого уравнения (4), в котором для определения комплексных амплитуд мод поляризованности $P_{\mathbf{k}}$ вместо формулы (9) следует использовать уравнение

$$P_{\mathbf{k}} = N_0 d \sum_{\mathbf{k}'} \rho_{b,\,\mathbf{k}+\mathbf{k}'\,;a,\mathbf{k}'}.$$

Вместе с тем отметим, что при $\gamma \neq 0$, строго говоря, (11) не является уравнением Шредингера: в смысле описания динамики процесса уравнения (11) эквивалентны уравнениям Блоха (32) при $\Gamma_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = 0$.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

Для простоты рассмотрим случай, когда задано только одно внешнее поле $E^{in}$, распространяющееся в направлении оси $x$. Пусть область пространства, заключающая в себе образец, имеет объем $V_0$, а соответствующая замкнутая поверхность $S_0$ включает в себя часть плоскости $x = x_0$, расположенную между источником и образцом, и имеющую площадь $\Delta S$. Тогда, интегрируя по объему $V_0$ уравнение (18) или (19) получим соответственно

$$\int\limits_{\Delta S} dydzI^{in}(x_0, y, z) = \oint\limits_{S_0} d\mathbf{s}\,\mathbf{\Pi'} + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_0} d\mathbf{r}(W_f - \hbar\omega_0 N_0 \sum_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}|^2), \quad (33)$$

$$\int\limits_{\Delta S} dydzI^{in}(x_0, y, z) = \oint\limits_{S_0} d\mathbf{s}\,\mathbf{\Pi'} + \gamma\int\limits_{V} d\mathbf{r}W_b + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_0} d\mathbf{r}(W_f + W_b), \quad (34)$$

где $I^{in}$ — интенсивность поля накачки, которую, в соответствии с условиями экспериментов [4, 5] можно считать локально плоской волной. Штрих у вектора $\mathbf{\Pi'}$ в интеграле по замкнутой поверхности $S_0$ означает, что при интегрировании по $\Delta S$ (естественно включающемся в интеграл по замкнутой поверхности $S_0$) у вектора Пойнтинга следует опустить парциальную компоненту, связанную с полем накачки. Уравнения (33), (34) являются интегральной формой записи закона сохранения энергии при взаимодействии электромагнитного поля с атомами БЭК в рассматриваемых приближениях.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Л. П. Питаевский, УФН **176**, 345 (2006).
2. V. I. Yukalov and E. P. Yukalova, Phys. Rev. A **73**, 022335 (2006).
3. Н. Н. Розанов, В. А. Смирнов, С. В. Федоров, ЖЭТФ **102**, 703 (2006).
4. S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Science **285**, 571 (1999).
5. D. Schneble, Y. Torii, M. Boyd, E. W. Streed, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Science **300**, 475 (2003).
6. S. Inouye, R. F. Low, S. Gupta, T. Pfau, A. Gustavson, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **85**, 4225 (2000).
7. S. Inouye, T. Pfau, S. Gupta, A. P. Chikkatur, A. Gorlitz, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Lett. Nature **402**, 641 (1999).
8. L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, and C. H. Behoroozi, Nature **397**, 594 (1999).
9. G. Lenz, P. Meystre, and E. M. Wright, Phys. Rev. A **50**, 1681 (1994).
10. Y. Castin and K. Molmer, Phys. Rev. A **51**, R3426 (1995).
11. J. Javanainen, Phys. Rev. Lett. **75**, 1927 (1995).
12. M. G. Moore and P. Meystre, Phys. Rev. Lett. **83**, 5202 (1999).
13. O. E. Mustecaplioglu and L. You, Phys. Rev. A **62**, 063615 (2000).
14. N. Piovella, M. Gatelli, and R. Bonifacio, Opt. Comm. **194**, 167 (2001).
15. H. Pu, W. Zhang, and P. Meystre, Phys. Rev. Lett. **91**, 150407 (2003).
16. C. Benedek and M. G. Benedict, J. Opt. B **6**, S3 (2004).
17. G. R. M. Robb, N. Piovella, and R. Bonifacio, J. Opt. B **7**, 93 (2005).
18. R. Bonifacio, N. Piovella, G. R. M. Robb, and M. M. Cola, Opt. Comm. **252**, 381 (2005).
19. H. Uys and P. Meystre, E-print archives, cond-mat/0602343.
20. N. Piovella, N. Volpe, M. M. Cola, and R. Bonifacio, Laser Phys. **17**, 174 (2007).
21. Е. Д. Трифонов, ЖЭТФ **120**, 1117 (2001); E. D. Trifonov, Laser Phys. **12**, 211 (2002).
22. Е. Д. Трифонов, Опт. и спектр. **98**, 545 (2005).
23. O. Zobay and G. M. Nikolopulos, Phys. Rev. A **72**, 041604(R) (2005); **73**, 013620 (2006); Laser Phys. **17**, 180 (2007).
24. Yu. A. Avetisyan and E. D. Trifonov, Laser Phys. Lett. **1**, 373 (2004); **2**, 512 (2005); **4**, 247 (2007).
25. Ю. А. Аветисян, Е. Д. Трифонов, ЖЭТФ **103**, 667 (2006).
26. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1970).
27. Е. Д. Трифонов, Н. И. Шамров, ЖЭТФ **126**, 54 (2004); Опт. и спектр. **96**, 294 (2004).
28. Е. Д. Трифонов, ТМФ **139**, 449 (2004).

**29**. Ю. А. Аветисян, Е. Д.Трифонов, Опт. и спектр. **100**, 317 (2006).

**30**. N. I. Shamrov, Laser Phys. **16**, 1374 (2006).

**31**. Н. И. Шамров, Опт. и спектр. **100**, 99 (2006); **101**, 802 (2006).

**32**. R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).

**33**. M. G. Benedict, A. M. Ermolaev, V. A. Malyshev, I. V. Sokolov, and E. D. Trifonov, *Super-radiance: Multiatomic Coherent Emission*, IOP Publ., Bristol, Philadelphia, USA (1996).

**34**. Н. А. Васильев, Е. Д. Трифонов, Опт. и спектр. **96**, 625 (2004).

**35**. Н. А. Васильев, А. С. Трошин, ЖЭТФ **125**, 1276 (2004).