ЖЭТФ, 2008, том 133, вып. 1, стр. 59–79

УДВОЕНИЕ СОСТОЯНИЙ, КВАНТОВЫЕ АНОМАЛИИ И ВОЗМОЖНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ В КОНТИНУАЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНОЙ КВАНТОВОЙ ГРАВИТАЦИИ

С. Н. Вергелес *

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 1 марта 2007 г.

Изучается проблема удвоения состояний в рамках дискретной квантовой теории гравитации в предположении, что теория имеет непрерывный (макроскопический) предел. Показано, что в определенном смысле нерегулярные моды полей (т. е. моды, скачкообразно изменяющиеся на масштабах шага решетки и имеющие конечную энергию при стремлении шага решетки к нулю) «отщепляются» от нормальных мод. Обсуждаются некоторые вытекающие отсюда космологические следствия.

PACS: 04.60.-m, 04.60.Nc, 98.80.Jk

1. ВВЕДЕНИЕ

Аксиальная аномалия играет в физике частиц фундаментальную роль. Открытая впервые, по-видимому, Швингером [1], она была затем еще раз открыта Адлером [2] и Беллом и Джекивом [3]. Роль аксиальной аномалии особенно возросла после того как для описания физики частиц стала использоваться Стандартная модель, и затем были открыты монополь [4] и инстантон [5]. В сочетании с аксиальной аномалией эти открытия привели к обнаружению эффекта Рубакова [6] и решению $U(1)$-проблемы. Теория бариосинтеза основана на эффекте нарушения фермионных чисел киральных ферми-полей, который имеет место вследствие комбинации аксиальной аномалии и инстантонной физики и оказывается существенным при высоких температурах в сжатом состоянии Вселенной [7].

Таким образом, аксиальная аномалия является необходимой составляющей теории элементарных частиц и космологии.

Подчеркнем, что аксиальная аномалия «запаяна» в диаграммы Фейнмана. Точнее, при устранении неопределенностей в диаграммах Фейнмана можно добиться сохранения либо векторного тока, либо аксиально-векторного тока. Таким образом, выполнение необходимого физического требования — сохранения векторного тока — приводит к существованию аксиальной аномалии. Однако при этом подразумевается, что в диаграммной технике используются причинные или фейнмановские пропагаторы, у которых левый полюс находится выше, а правый — ниже вещественной оси в комплексной плоскости переменной частоты. Такой обход полюсов допускает поворот Вика в евклидово пространство. Отсюда видно также, что непосредственное изучение теории поля в евклидовом пространстве неявно подразумевает такой подход, когда аксиальная аномалия имеет место.

В течение длительного времени продолжались исследования, направленные на углубление понимания природы аксиальной аномалии, среди которых хотелось бы выделить работу Грибова [8]. Эта работа в значительной мере определила подход автора к проблеме. Некоторые выводы, полученные в настоящей работе, существенно опираются на идеологию работы [8].

В ряде недавних работ автора [9–12] был предложен отличный от предыдущих вариант дискретной квантовой теории гравитации, допускающий естественное и изящное включение полей материи и,

*E-mail: vergeles@itp.ac.ru

в частности, дираковских полей. Этот вариант дискретной гравитации имеет «наивный» непрерывный предел на длинноволновых модах полей, причем возникающее при этом непрерывное действие совпадает с общеизвестным действием Гильберта–Эйнштейна для гравитации, минимально связанной с дираковским полем. Отсюда очевидно, что в такой теории в непрерывном пределе существуют безмассовые возбуждения. Однако было замечено, что в дискретной теории гравитации существуют также и нерегулярные моды[1)]. Иными словами, на нерегулярных решетках (симплициальных комплексах) также имеет место явление вильсоновского удвоения состояний[2)]. Но явление вильсоновского удвоения состояний на нерегулярных решетках в рассматриваемой дискретной теории гравитации качественно отличается от такого явления на регулярных решетках.

Поясним последнее утверждение. Если на регулярной решетке введено вейлевское поле таким образом, что, во-первых, действие локально и, во-вторых, в наивном континуальном пределе действие переходит в обычное действие вейлевского поля, то появляющиеся вследствие удвоения нерегулярные моды в низкоэнергетическом пределе обладают всеми свойствами вейлевского поля противоположной киральности. Пропагаторы, описывающие распространение нерегулярных мод, по существу являются такими же функциями пространственных координат, как и пропагаторы нормальных мод. Напротив, в случае нерегулярной решетки, используемой в дискретной квантовой теории гравитации, даже если явление удвоения имеет место, то свойства нерегулярных мод, включая их распространение, кардинально отличаются от свойств нормальных мод. Этот факт может лежать в основе новой, гораздо более богатой физики. Действительно, из сказанного видно, что в рассматриваемой дискретной теории гравитации удвоение состояний в общепринятом смысле отсутствует: нормальные и нерегулярные моды принципиально различаются. Более того, будут приведены аргументы в пользу того, что переходы между нормальными и нерегулярными модами подавлены, они остаются лишь как результат процессов с изменением топологии вакуума (процессов, описываемых инстантонами и т. п.). Поскольку на решетках полный аксиальный заряд сохраняется, изменение аксиального заряда нормальных мод компенсируется таким же изменением (но с противоположным знаком) аксиального заряда нерегулярных мод.

Обратим внимание на следующее. Содержательные выводы статьи получены в предположении, что в теории непрерывный предел не только возможен кинематически, но действительно реализуется динамически, причем лишь такая теория и представляет реальный физический интерес. Это — очень сильное предположение о теории, которое может быть подтверждено лишь в результате серьезного исследования. По-видимому, в положительном случае в процессе такого исследования будет установлен (возможно, однозначно) также вид дискретной теории гравитации (т. е. набор полей, их связи, симметрии и т. д.), динамически развивающейся в макроскопическую непрерывную теорию. На этом пути неизбежно должна быть решена, в частности, проблема космологической постоянной и вообще проблема вакуумного среднего тензора энергии-импульса. Реализация такой программы явилась бы «программой-максимум», в результате чего появилась бы единая квантовая теория поля, альтернативная теории суперструны. Реализация этой программы требует большого времени и больших усилий. Поэтому нам кажется целесообразным изучение некоторых свойств этой воображаемой теории в предположении реализации указанного сценария. Такой подход применяется в серии текущих работ [10–12], он может оказаться полезным и ускорить решение общей проблемы.

В первой части статьи вводятся необходимые обозначения, формулируются и выводятся упомянутые положения. В заключительной части этой работы приводятся соображения, возникающие из сказанного выше применительно к космологии.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ

Поскольку здесь вносится некоторое изменение в определение фундаментальной статистической суммы в дискретной теории гравитации по сравнению с предыдущими работами [9–12], необходимо скорректировать некоторые формулы. Для этого следует пройти путь от действия Гильберта–Эйнштейна в непрерывной четырехмерной теории с псевдоевклидовой сигнатурой до дискретной фундаментальной статистической суммы.

Действие Гильберта–Эйнштейна в форме Палатини плюс действие Дирака в четырехмерном про-

[1)] Под нерегулярными модами здесь подразумеваются такие моды полей, которые изменяются скачкообразно на масштабах шага решетки и при этом имеют конечную энергию при стремящемся к нулю шаге решетки.

[2)] С проблемой вильсоновского удвоения состояний на регулярных решетках можно ознакомиться в работах [13–17].

странстве-времени с псевдоевклидовой сигнатурой имеет вид

$$\mathcal{A} = \int \varepsilon_{abcd} \left\{ -\frac{1}{l_P^2} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}\,\Theta^a \wedge e^b \;\wedge e^c \wedge e^d \right\}, \tag{2.1}$$
$$d\omega^{ab} + \omega_c^a \wedge \omega^{cb} = \frac{1}{2} R^{ab}.$$

Здесь 1-формы равны

$$\Theta^a = \frac{i}{2}\left(\overline{\psi}\,\gamma^a\,\mathcal{D}_\mu\psi - \mathcal{D}_\mu\overline{\psi}\,\gamma^a\,\psi \right) dx^\mu,$$
$$\omega^{ab} = \omega_\mu^{ab} dx^\mu, \quad e^a = e_\mu^a dx^\mu, \tag{2.2}$$

а латинские и греческие индексы пробегают четыре значения:

$$a,\, b,\, \ldots\,,\, \mu,\, \nu, \ldots = 0,\, 1,\, 2,\, 3. \tag{2.3}$$

Опускание и поднятие индексов $a,\, b, \ldots$ осуществляется при помощи метрического тензора Минковского $\eta_{ab} = \mathrm{diag}\,(1,\, -1,\, -1,\, -1)$, и

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = \eta^{ab}, \quad \sigma^{ab} \equiv \frac{1}{4}\,[\gamma^a,\, \gamma^b],$$
$$\mathcal{D}_\mu\,\psi = \left(\partial_\mu\,\psi + \frac{1}{2}\omega_{ab\,\mu}\sigma^{ab} \right)\psi. \tag{2.4}$$

Действие (2.1) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\tilde{\psi} = U\,\psi, \quad \tilde{\overline{\psi}} = \overline{\psi}\,U^{-1},$$
$$\tilde{\omega}^{ab} = U^a{}_c U^b{}_d \omega^{cd} + U^a{}_c d\left(U^{-1}\right)^{cb}, \quad \tilde{e}^a = U^a{}_b e^b. \tag{2.5}$$

Здесь

$$U(x) = \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}(x)\sigma^{ab} \right),$$
$$U^a{}_b = (\exp\varepsilon)^a{}_b, \quad \varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba} \tag{2.6}$$

— элементы некомпактной группы Ли $O\,(3,\, 1)$ соответственно в спинорном и векторном представлениях.

Символически амплитуда перехода представляется в виде функционального интеграла

$$\mathcal{U} \sim \int \mathcal{D}\omega\mathcal{D}e\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\exp(i\mathcal{A}). \tag{2.7}$$

Интеграл (2.7) расходится, условно говоря, по двум причинам. Во-первых, вследствие калибровочной инвариантности этот интеграл пропорционален бесконечному объему калибровочной группы $\prod_x O\,(3,\, 1)_x$. В последнем произведении каждый сомножитель имеет бесконечный объем вследствие некомпактности группы $O\,(3,\, 1)$. Хотя проблема фиксации калибровки в интеграле (2.7) решена канонически в соответствии с техникой Фаддеева–Попова (см., например, [18]), это не спасает ситуацию, так как второй источник расходимостей — неперенормируемость этого интеграла.

Как известно, в настоящее время в рамках континуальной парадигмы в теории гравитации расходимости устранены лишь путем включения гравитации в теорию суперструны. Нам представляется, что существует альтернативная возможность устранения расходимостей в квантовой теории гравитации и построения единой квантовой теории поля — ее дискретизация.

Более подробное описание изучаемого варианта дискретной теории гравитации можно найти в работах [9–12]. Здесь же приводятся лишь необходимые для дальнейшего рассмотрения обозначения.

Пусть $\mathfrak{K}$ обозначает ориентируемый симплициальный комплекс и $a_i,\ a_j,\ \ldots$ — его вершины. В случае четырехмерного комплекса используются четыре матрицы Дирака с евклидовой сигнатурой:

$$\gamma^a_{(E)},\, a,b,c,\ldots = 1,2,3,4,$$
$$\mathrm{tr}\ \gamma^a_{(E)}\gamma^b_{(E)} = 4\delta^{ab},$$
$$\gamma^5_{(E)} = \gamma^1_{(E)}\gamma^2_{(E)}\gamma^3_{(E)}\gamma^4_{(E)}, \tag{2.8}$$
$$\mathrm{tr}\ \gamma^5_{(E)}\gamma^a_{(E)}\gamma^b_{(E)}\gamma^c_{(E)}\gamma^d_{(E)} = 4\,\varepsilon^{abcd}_{(E)}.$$

Во избежание путаницы мы снабжаем индексом (E) некоторые величины, относящиеся к евклидовой метрике. Каждому ориентированному 1-симплексу или ребру a_ia_j сопоставим элемент группы $O\,(4)$ в спинорном представлении (или элемент группы $\mathrm{Spin}\,(4)$):

$$\Omega_{ij} = \Omega_{ji}^{-1} = \exp\left(\frac{1}{2}\omega^{ab}_{(E)\,ij}\sigma^{ab}_{(E)} \right), \tag{2.9}$$

а также элемент алгебры Клиффорда

$$\hat{e}_{(E)\,ij} \equiv e^a_{(E)\,ij}\gamma^a_{(E)} \equiv -\Omega_{ij}\hat{e}_{(E)\,ji}\Omega_{ij}^{-1}, \tag{2.10}$$

где $\omega^{ab}_{(E)\,ij} = -\omega^{ab}_{(E)\,ji} = -\omega^{ba}_{(E)\,ij}$ и $e^a_{(E)\,ij}$ — вещественные переменные. Каждому 0-симплексу или вершине a_i сопоставим взаимно эрмитово сопряженные дираковские спиноры ψ_i и $\psi_i^\dagger$. Индексом A нумеруем 4-симплексы. С каждым 4-симплексом $a_ia_ja_ka_la_m$ с индексом A свяжем число $\varepsilon_{Aijklm} = \pm 1$, знак которого зависит от ориентации этого 4-симплекса. Обозначения $\psi^\dagger_{Ai}$, ψ_{Ai}, $\hat{e}_{Aij}$, Ω_{Aij} и так далее указывают на то, что ребро a_ia_j принадлежит 4-симплексу с индексом A. Действие гравитационного и дираковского полей, ассоциированное с комплексом $\mathfrak{K}$, имеет вид

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{5\cdot 24}\sum_A \sum_{i,j,k,l,m} \varepsilon_{Aijklm}\, \mathrm{tr}\, \gamma^5_{(E)} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2\,l_P^2}\Omega_{Ami}\Omega_{Aij}\Omega_{Ajm}\hat{e}_{(E)\,Amk}\hat{e}_{(E)\,Aml} - \right. \\ \left. -\frac{1}{24}\hat{\Theta}_{Ami}\hat{e}_{(E)\,Amj}\hat{e}_{(E)\,Amk}\hat{e}_{(E)\,Aml}\right\}, \quad (2.11)$$

$$\hat{\Theta}_{Aij} = \\ = \frac{i}{2}\gamma^a_{(E)}\left(\psi^\dagger_{Ai}\gamma^a_{(E)}\Omega_{Aij}\psi_{Aj} - \psi^\dagger_{Aj}\Omega_{Aji}\gamma^a_{(E)}\psi_{Ai}\right) \equiv \\ \equiv \Theta^a_{Aij}\gamma^a_{(E)} = -\Omega_{ij}\hat{\Theta}_{Aji}\Omega^{-1}_{ij}. \quad (2.12)$$

Очевидно, что действие (2.11) вещественно. Заметим, что равенство (2.10) справедливо в силу определения величин $e^a_{(E)\,ij}$, в то время как равенство (2.12) является следствием простых вычислений, опирающихся на свойства элементов группы голономии (2.9) и алгебру матриц Дирака. Величины, сопоставленные 1-симплексам и подчиняющиеся соотношениям (2.10) и (2.12), будем называть 1-формами.

Действие (2.11) инвариантно относительно следующих калибровочных преобразований:

$$\tilde{\Omega}_{A\,ij} = S_{A\,i}\,\Omega_{A\,ij}\,S^{-1}_{A\,j}, \\ \tilde{e}_{(E)\,A\,ij} = S_{A\,i}\,e_{(E)\,A\,ij}\,S^{-1}_{A\,i}, \quad (2.13) \\ \tilde{\psi}_{A\,i} = S_{A\,i}\,\psi_{A\,i}, \quad \tilde{\psi^\dagger}_{A\,i} = \psi^\dagger_{A\,i}\,S^{-1}_{A\,i},$$

где $S_{A\,i} \in \mathrm{Spin}(4)$. Таким образом, в случае дискретной теории калибровочная группа является компактной. Причина этого очевидна: в решеточных калибровочных теориях фиксация калибровки неприемлема с эстетической точки зрения, а на нерегулярных решетках даже технически нереализуема. Поэтому некомпактная калибровочная группа делает невозможным определение статистической суммы (аналога амплитуды перехода (2.7)) на решетке.

Выпишем выражение для статистической суммы $\mathfrak{U}$ в теории дискретной евклидовой гравитации, которая превращается в амплитуду перехода (2.7) в континуальном пределе. Пронумеруем весь набор вершин и ребер комплекса индексами соответственно $\mathcal{V}$ и $\mathcal{E}$, обозначим через $\psi_{\mathcal{V}}$, $\Omega_{\mathcal{E}}$ и т. д. соответствующие им переменные. По определению

$$\mathfrak{U} = \mathrm{const}\left(\prod_{\mathcal{E}}\int d\Omega_{\mathcal{E}}\int de_{\mathcal{E}}\right)\times \\ \times\left(\prod_{\mathcal{V}}\int d\psi^\dagger_{\mathcal{V}}\,d\psi_{\mathcal{V}}\right)\exp\left(i\,\mathfrak{A}\,\right). \quad (2.14)$$

Здесь $d\Omega_{\mathcal{E}}$ — инвариантная мера на группе Spin(4). Остальные меры не нуждаются в комментариях.

Подчеркнем, что в статистической сумме (2.14) суммируются мнимые экспоненты, и в то же время калибровочная группа является компактной. На первый взгляд, это находится в противоречии с известными фактами. Действительно, например, в работе [19] фундаментальная статистическая сумма предлагается как функциональный интеграл вида

$$\mathfrak{U} \sim \int \mathcal{D}g_{\mu\nu}\,\exp\left(\frac{1}{l_P^2}\int d^4x\sqrt{g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(g)\right). \quad (2.15)$$

В выражении (2.15) величина $g_{\mu\nu}$ есть метрика с евклидовой сигнатурой. Органический дефект функционального интеграла (2.15) заключается в том, что показатель экспоненты в нем принципиально знакопеременен. Действительно, локально в зависимости от метрического тензора скалярная кривизна может быть как отрицательной, так и положительной. В работе [19] предлагался выход из этого положения, заключающийся в такой деформации путей интегрирования в комплексных плоскостях переменных интегрирования, что функциональный интеграл (2.15) становится определенным[3)]. Нам представляется, что эта идея работы [19] имеет явное воплощение в настоящей работе, поскольку, во-первых, фундаментальная статистическая сумма (2.14) является суммой экспонент с мнимыми показателями и, во-вторых, интеграл (2.14) в наивном континуальном пределе при соответствующей деформации путей интегрирования и аналитическом продолжении временной координаты формально переходит в интеграл (2.7). Последнее утверждение демонстрируется ниже в этом разделе.

Проследим за формальным переходом от статистической суммы (2.14) к амплитуде перехода (2.7).

Действие (2.11) имеет наивный континуальный предел. Для перехода к континуальному пределу следует ввести обычные локальные координаты вершин некоего подкомплекса:

$$x^\mu_{A\,i} \equiv x^\mu(a_{A\,i}), \quad \mu = 1,\,2,\,3,\,4. \quad (2.16)$$

[3)] Здесь игнорируется проблема неперенормируемости.

Здесь $x^{\mu}_{A\,i}$ — вещественные числа. Далее будем называть две вершины соседними, если они образуют границу одного ребра. Определим дифференциалы координат, которые являются разностями координат соседних вершин:

$$dx^{\mu}_{A\,ji} \equiv x^{\mu}_{A\,i} - x^{\mu}_{A\,j}. \tag{2.17}$$

Чтобы величины $x^{\mu}_{A\,i}$ действительно могли играть роль локальных координат, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{vmatrix} dx^1_{A\,m1} & dx^2_{A\,m1} & \dots & dx^4_{A\,m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ dx^1_{A\,m4} & dx^2_{A\,m4} & \dots & dx^4_{A\,m4} \end{vmatrix} > 0. \tag{2.18}$$

Обратный знак неравенства в (2.18) тоже допускается. Кроме того, дифференциалы (2.17) должны быть малы в том смысле, что

$$dx^{\mu}_{A\,ji} \sim a, \tag{2.19}$$

где a — некая константа размерности длины, которая имеет масштаб порядка эффективного шага решетки.

Введение локальных координат может быть реализовано следующим образом. Поскольку комплекс $\mathfrak{K}$ ориентируем, локально он может быть погружен в четырехмерное евклидово пространство. Действительно, для этого можно начать с погружения в четырехмерное евклидово пространство любого его 4-симплекса таким образом, чтобы евклидовы координаты его вершин удовлетворили условиям (2.18) и (2.19). Затем то же самое можно осуществить для всех смежных с ним 4-симплексов и т. д. Евклидовы координаты образов вершин 4-симплексов могут играть роль локальных координат.

В наивном континуальном пределе предполагается, что все введенные переменные Ω, $\hat{e}$, ψ мало изменяются при переходе к соседним симплексам и, кроме того, $e_{(E)\,A\,mi} \sim a$ и элементы $\Omega_{A\,mi}$ близки к единице. Последнее означает, что $\omega_{(E)\,A\,mi} \to 0$. Рассмотрим системы линейных уравнений:

$$\begin{gathered} \omega^{ab}_{(E)\,A\,m\mu}\, dx^{\mu}_{A\,mi} = \omega^{ab}_{(E)\,A\,mi}, \\ e^{a}_{(E)\,A\,m\mu}\, dx^{\mu}_{A\,mi} = e^{a}_{(E)\,A\,mi}, \\ \Theta^{a}_{A\,m\mu}\, dx^{\mu}_{A\,mi} = \Theta^{a}_{A\,mi}, \\ i = 1,\, 2,\, 3,\, 4, \end{gathered} \tag{2.20}$$

однозначно определяющие величины $\omega^{ab}_{(E)\,A\,m\mu}$, $e^{a}_{(E)\,A\,m\mu}$, $\Theta^{a}_{A\,m\mu}$. Пусть 1-симплекс $X^{A}_{m\,i} = a_m a_i$ принадлежит 4-симплексам с индексами $A_1, A_2, \dots, A_r$. Легко увидеть, что средняя величина

$$\omega^{ab}_{(E)\,\mu}\left[\frac{1}{2}\left(x_{A\,m} + x_{A\,i}\right)\right] \equiv \equiv \frac{1}{r}\left\{\omega^{ab}_{(E)\,A_1\,m\mu} + \dots + \omega^{ab}_{(E)\,A_r\,m\mu}\right\}, \tag{2.21}$$

определяемая одним лишь 1-симплексом $a_m a_i$, удовлетворяет соотношению

$$\omega^{ab}_{(E)\,mi} = \omega^{ab}_{(E)\,\mu}\left[\frac{1}{2}\left(x_m + x_i\right)\right] dx^{\mu}_{mi} \equiv \equiv \omega^{ab}_{(E)} = \omega^{ab}_{(E)\,\mu}\, dx^{\mu}_{mi}. \tag{2.22}$$

Аналогичным образом определяются 1-формы

$$e^{a}_{(E)} = e^{a}_{(E)\,\mu}\, dx^{\mu}, \quad \Theta^{a}_{(E)} = \Theta^{a}_{(E)\,\mu}\, dx^{\mu}.$$

Для фермионных переменных очевидно имеем

$$\psi_{Ai} \equiv \psi\left(x_{Ai}\right), \quad \psi^{\dagger}_{Ai} \equiv \psi^{\dagger}\left(x_{Ai}\right). \tag{2.23}$$

В наивном непрерывном пределе поля достаточно гладко изменяются при переходе к соседним элементам комплекса. Поэтому поля можно считать в достаточной мере гладкими функциями локальных координат, причем можно считать, что последние заполняют континуум (открытое подмножество в $\mathbb{R}^4$, в которое погружена часть комплекса $\mathfrak{K}$). Тем не менее локальные координаты x^{μ} играют, строго говоря, роль меток или индексов переменных интегрирования в (2.14). Иными словами, динамические переменные $\left\{\omega, e, \psi^{\dagger}, \psi\right\}$ не являются аналитическими функциями локальных координат.

При помощи соотношений (2.22) и (2.23) легко показать, что в длинноволновом пределе решеточное действие (2.11) переходит в известное действие континуальной теории Эйнштейна в форме Палатини в евклидовом пространстве:

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_{(E)} = \int \varepsilon_{(E)\,abcd}\left\{\frac{1}{l_P^2} R^{ab}_{(E)} \wedge e^{c}_{(E)} \wedge e^{d}_{(E)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{6}\,\Theta^{a}_{(E)} \wedge e^{b}_{(E)} \wedge e^{c}_{(E)} \wedge e^{d}_{(E)}\right\}, \\ d\omega^{ab}_{(E)} + \omega^{ac}_{(E)} \wedge \omega^{cb}_{(E)} = \frac{1}{2} R^{ab}_{(E)}, \\ \Theta^{a}_{(E)\mu} = \frac{i}{2}\left(\psi^{\dagger}\gamma^{a}\mathcal{D}_{(E)\mu}\psi - \left(\mathcal{D}_{(E)\,\mu}\psi\right)^{\dagger}\gamma^{a}\psi\right). \end{gathered} \tag{2.24}$$

Обратим внимание на важнейшее свойство теории: в длинноволновом пределе полностью теряется информация о структуре исходной решетки: действие (2.24) не зависит от расположения вершин решетки в континуальном 4-пространстве. Далее это свойство будет использоваться.

Для перехода к метрике Минковского сместим пути интегрирования в интеграле (2.14) следующим образом:

$$\begin{gathered}\omega^{4\alpha}_{(E)\,ij} = i\,\omega'^{0\alpha}_{ij}, \quad \omega^{\alpha\beta}_{(E)\,ij} = -\omega'^{\alpha\beta}_{ij}, \\ e^{4}_{(E)\,ij} = i\,e'^{0}_{ij}, \quad e^{\alpha}_{(E)\,ij} = -e'^{\alpha}_{ij}, \\ \alpha,\,\beta,\,\ldots = 1,\,2,\,3, \\ \psi^{\dagger}_i = -i\,\psi'^{\dagger}_i\gamma^0 = -i\,\overline{\psi}'_i, \quad \gamma^0 \equiv \gamma^4_{(E)},\end{gathered} \tag{2.25}$$

где все бозонные поля со штрихом вещественны. Одновременно сделаем переобозначения

$$\gamma^4_{(E)} = \gamma^0, \quad \gamma^\alpha_{(E)} = i\,\gamma^\alpha. \tag{2.26}$$

Из формул (2.25), (2.26) следует, что

$$\exp\left(\frac{1}{2}\omega^{ab}_{(E)\,ij}\sigma^{ab}_{(E)}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\omega'_{ij\,ab}\sigma^{ab}\right) \equiv \Omega'_{ij},$$

т. е. калибровочная группа становится некомпактной: Spin(3, 1). При этом действие (2.11) становится антиэрмитовым: $\mathfrak{A} = -i\,\mathfrak{A}'$, где $\mathfrak{A}'$ — эрмитово действие с некомпактной калибровочной группой, построенное при помощи переменных со штрихом и переходящее в непрерывном пределе в действие $\mathcal{A}'$ (см. (2.30)). Смещение путей интегрирования согласно (2.25) в соответствии с выражениями (2.20)–(2.23) означает в континуальном пределе замены полей:

$$\omega^{4\alpha}_{(E)\,\mu} = i\omega'^{0\alpha}_{\mu}, \quad \omega^{\alpha\beta}_{(E)\,\mu} = -\omega'^{\alpha\beta}_{\mu}, \tag{2.27}$$

$$e^{4}_{(E)\,\mu} = i\,e'^{0}_{\mu}, \quad e^{\alpha}_{(E)\,\mu} = -e'^{\alpha}_{\mu}, \tag{2.28}$$

причем все поля ω'^{ab}_{μ} и e'^{a}_{μ} вещественны. Легко находим, что

$$\begin{gathered}R^{4\alpha}_{(E)} = i\,R'^{0\alpha}, \quad R^{\alpha\beta}_{(E)} = -R'^{\alpha\beta}, \\ \mathcal{D}_{(E)\,\mu} = \mathcal{D}'_\mu, \quad \Theta^4_{(E)} = -i\,\Theta'^{0}, \quad \Theta^\alpha_{(E)} = \Theta'^{\alpha}.\end{gathered} \tag{2.29}$$

Величины в правых частях уравнений (2.29) совпадают с соответствующими величинами в выражениях (2.1), (2.2) и (2.4), построенных при помощи метрики Минковского, если значение индекса $\mu = 4$ в (2.29) заменить на $\mu = 0$. Поэтому, используя соотношения (2.28) и (2.29), получаем:

$$\mathcal{A}_{(E)} = -i\,\mathcal{A}', \tag{2.30}$$

где действие $\mathcal{A}'$ совпадает с действием (2.1), если в последнем сделать замену $x^0 \to x^4$.

Последний шаг перехода от евклидовой статистической суммы (2.7) к амплитуде перехода (2.14) заключается в аналитической замене

$$x^4 = i\,x^0. \tag{2.31}$$

Важно, что при замене (2.31) континуальные значения полей ω'^{ab}_{μ}, e'^{a}_{μ}, ψ', $\psi'^{\dagger}$ не изменяются (за исключением опускания штриха при их обозначении и замене значения индекса $\mu = 4 \to \mu = 0$). Этого можно достичь при помощи соответствующих замене (2.31) смещений путей интегрирования решеточных переменных ω'^{ab}_{ji}, e'^{a}_{ji}, ..., вытекающих из композиции уравнений (2.22), (2.25), (2.27), (2.28):

$$\omega'^{ab}_{ji} \to \omega''^{ab}_{ji} = \omega^{ab}_{\mu}\,dx^\mu, \quad dx^\mu = \left(i\,dx^0,\,dx^\alpha\right) \tag{2.32}$$

и т. д. Поскольку в (2.32) поля ω^{ab}_{μ} вещественны, переменные ω''^{ab}_{ji} комплексны. Таким образом, вся зависимость функционала $\mathcal{A}'$ в (2.30) сводится к линейной и однородной зависимости от дифференциала dx^4. Поэтому аналитическая замена (2.31) приводит к следующему простому изменению равенства (2.30):

$$\mathcal{A}_{(E)} = \mathcal{A}, \tag{2.33}$$

где правая и левая части задаются согласно (2.1) и (2.24), соответственно.

Мы видим, что в результате комбинации деформаций путей интегрирования переменных в статистической сумме (2.14) согласно (2.25) и (2.32) в континуальном пределе фундаментальная статистическая сумма (2.14) трансформируется в амплитуду перехода (2.7).

На первый взгляд, поскольку переменные ω''^{ab}_{ji} зависят от локальных координат, замена переменных интегрирования согласно (2.32) неприемлема. Однако эта зависимость от локальных координат иллюзорна, поскольку как действие, так и функциональная мера в амплитуде перехода (2.7) инвариантны относительно общих преобразований координат.

Сделаем замечание о вейлевских фермионах на решетке. Сначала заметим, что в континуальной теории в случае евклидовой сигнатуры вейлевское действие

$$\mathcal{A}_{(E)\,\psi} = \int d^4x \left(-i\psi^\dagger\gamma^a\partial_a\frac{1\pm\gamma^5}{2}\psi\right) \tag{2.34}$$

не является эрмитовым, в то время как в случае сигнатуры Минковского вейлевское действие

$$\mathcal{A}_{\psi} = \int d^4x \left(i\overline{\psi}\gamma^a\partial_a\frac{1\pm\gamma^5}{2}\psi\right) \tag{2.35}$$

является эрмитовым. На решетке это свойство вейлевской теории, конечно, воспроизводится. Поэтому для построения вейлевского действия на решетке в выражении (2.12) следует сделать подстановки

$$\psi_i \to \frac{1 \pm \gamma^5}{2}\psi_i, \quad \psi^\dagger \to \psi^\dagger \frac{1 \mp \gamma^5}{2}. \tag{2.36}$$

Переменные в правых частях (2.36) не являются взаимно эрмитово сопряженными, и потому вейлевское действие в случае евклидовой сигнатуры также не может быть эрмитовым. Однако при переходе к метрике Минковского, согласно (2.25), действие становится эрмитовым. При этом в (2.25) появляется единственная модификация:

$$\psi_i^\dagger \frac{1 \mp \gamma^5}{2} = -i\,\overline{\psi}_i' \frac{1 \mp \gamma^5}{2}. \tag{2.37}$$

Подытожим полученный результат.

1) Фундаментальная статистическая сумма (2.14) должна быть инвариантна относительно компактной калибровочной группы $O(4)$. В противном случае потребовалась бы фиксация калибровки, что невозможно на решетке.

2) Фундаментальная статистическая сумма (2.14), так же, как и эффективная континуальная амплитуда перехода (2.7), возникающая из статистической суммы (2.14), должны являться суммами осциллирующих экспонент. В противном случае континуальный предел был бы принципиально недостижим по причине знаконеопределенности показателя экспоненты (действия) в теории гравитации.

3) Калибровочная группа в амплитуде перехода (2.7) должна быть некомпактной (группа Лоренца). В противном случае континуальный предел был бы недостижим, поскольку в случае компактной калибровочной группы метрика пространства-времени являлась бы евклидовой. Это означало бы, конечно, что времени нет. В этом случае действие бозонной материи было бы положительно определено и пропорционально в неком смысле числу квантов или количеству материи и ее энергии. Поэтому амплитуда перехода, представленная согласно (2.7), являлась бы суммой быстро осциллирующих экспонент, так что положительная интерференция была бы исключена. Следовательно, амплитуда перехода всегда была бы равна нулю. Напротив, в том случае, когда калибровочной группой является группа Лоренца, даже простейшие варианты действий для материи не являются знакоопределенными. В частности, действие классического гармонического осциллятора изменяется на его траектории движения согласно формуле

$$\mathcal{A} = (E/2\omega)\sin(2\omega x^0),$$

где E — энергия осциллятора. Поэтому в случае, когда калибровочная группа некомпактна, возможна положительная интерференция мнимых экспонент в амплитуде (2.7) даже для макроскопической Вселенной.

3. КОРРЕЛЯТОРЫ НЕРЕГУЛЯРНЫХ МОД

Явление удвоения фермионных состояний на гиперкубических решетках было открыто Вильсоном [13] в связи с изучением решеточной теории Янга–Миллса[4)]. Явление удвоения означает, что если на решетке имеется одно дираковское поле, то в континуальном пределе их оказывается больше одного. Если же на решетке имеется одно вейлевское поле, то в континуальном пределе будут наблюдаться лишь дираковские поля. В работе [17] была доказана следующая теорема. Пусть на периодической решетке фермионный гамильтониан имеет вид

$$\mathfrak{H} = \sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \psi_{\mathbf{x}}^\dagger\, \hat{H}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \psi_{\mathbf{y}}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — радиус-векторы узлов решетки. Кроме того, пусть гамильтониан локален, в наивном континуальном пределе переходит в дираковский и является фазово- и γ^5-инвариантным. Тогда вильсоновское удвоение имеет место.

Однако ответ на вопрос: на всякой ли решетке фермионный гамильтониан с указанными свойствами приводит к вильсоновскому удвоению? — оказался значительно более сложным. По крайней мере, это так в том случае, когда решетка является симплициальным комплексом, описанным в предыдущем пункте.

В работах [9–11] были получены следующие результаты по проблеме удвоения.

1) На двумерных симплициальных комплексах существуют как решетки, на которых удвоение отсутствует, так и решетки, на которых удвоение имеет место.

2) На симплициальных комплексах, допускающих удвоение, распространение нерегулярных мод качественно отличается от распространения нормальных мод (см. ниже). Нерегулярные моды фактически не распространяются в непрерывном пре-

4) Об удвоении состояний см. также [14–17].

деле. Этот результат относится к симплициальным комплексам любой размерности.

В настоящей работе нас интересует вторая, быть может более типичная, возможность, когда удвоение состояний имеет место. Проблема изучается в четырехмерном пространстве-времени.

Чтобы приступить к формулировке и изучению проблемы удвоения фермионных состояний в описанной выше дискретной теории гравитации, ситуацию следует предельно упростить. Поэтому далее мы полагаем, что

$$\Omega_{ij} = 1, \quad \left(e^a_{ij} + e^a_{jk} + \ldots + e^a_{li}\right) = 0. \tag{3.2}$$

Здесь сумма в круглых скобках берется по любому замкнутому пути, состоящему из 1-симплексов. При выполнении равенств (3.2) в соответствии с (2.10) и (2.12) имеем

$$e^a_{ij} = -e^a_{ji}, \quad \Theta^a_{ij} = -\Theta^a_{ji}. \tag{3.3}$$

Уравнения (3.2) означают, что кривизна и кручение равны нулю. Таким образом, геометрическая реализация комплекса $\mathfrak{K}$ находится в евклидовой гиперплоскости, так что декартовы координаты вершины a_i имеют значения x^a_i и $e^a_{ij} = x^a_j - x^a_i$ есть декартовы компоненты вектора, начало и конец которого находятся соответственно в вершинах a_i и a_j.

В континуальном пределе равенства (3.2) переписываются как $\oint e^a = 0$, причем здесь интегралы берутся по всем контурам. Отсюда вытекает, что $de^a = 0$, и $\omega^{ab} = 0$ есть единственное решение уравнения

$$de^a + \omega^{ab} \wedge e^b = 0.$$

Такая ситуация реализуется в континуальном макроскопическом пределе, когда можно пренебречь кривизной пространства-времени в достаточно обширных областях.

Запишем уравнение для собственных мод дискретного оператора, действующего на дираковские поля согласно определению (2.11). Поскольку в (2.11) метрика евклидова, можно это действие рассматривать также и как гамильтониан.

Прежде чем вывести и исследовать это уравнение для собственных мод, необходимо привести некоторые вспомогательные формулы и определить некоторые величины. Чтобы сократить дальнейшее изложение, определим эти величины для общего случая n, где n — размерность комплекса. Нас будут интересовать значения $n = 2, 3, 4$.

Обобщение спинорной части действия (2.11) на случай n-мерного комплекса имеет вид (см. [10])

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{(n-1)! \cdot (n+1)!} \times \\ \times \sum_A \sum_{\{i,j,k_1,\ldots,k_{n-1}\}} \varepsilon_{A\, ijk_1\ldots k_{n-1}} \varepsilon_{(E)\, ab_1\cdots b_{n-1}} \times \\ \times \Theta^a_{Aij} e^{b_1}_{Aik_1} \ldots e^{b_{n-1}}_{Aik_{n-1}}. \tag{3.4}$$

Везде $\varepsilon_{A\, ijk_1\ldots k_{n-1}} = \pm 1$ в зависимости от ориентации n-симплекса $a_i a_j a_{k_1} \ldots a_{k_{n-1}}$. Пусть индекс $A(i,j)$ нумерует все n-симплексы, содержащие 1-симплекс $a_i a_j$, индекс $j(i)$ нумерует все вершины $a_{j(i)}$, соседние с вершиной a_i, а v_i обозначает ориентированный n-объем той части комплекса, которая содержит все те и только те n-симплексы, у которых одна из вершин есть вершина a_i. Величина

$$S_{a\, ij} = \frac{1}{((n-1)!)^2} \sum_{A(i,j)} \sum_{\{k_1,\ldots,k_{n-1}\}} \varepsilon_{(E)\, ab_1\ldots b_{n-1}} \times \\ \times \varepsilon_{A(i,j)\, ijk_1\ldots k_{n-1}} e^{b_1}_{A(i,j)i\, k_1} \ldots e^{b_{n-1}}_{A(i,j)i\, k_{n-1}} \tag{3.5}$$

в работе [10] была названа зонтиком вершины a_i со стороны вершины a_j. Имеют место соотношения

$$\sum_{j(i)} S_{a\, ij}\, e^b_{ij} = n\, v_i\, \delta^b_a, \quad \sum_{j(i)} S_{a\, i,j} \equiv 0. \tag{3.6}$$

Из равенств (3.6) видно, что v_i есть ориентированный объем совокупности всех тех n-симплексов, у которых одной из вершин является вершина a_i.

Изучение проблемы распространения нерегулярных мод в пространстве-времени естественнее проводить в метрике Минковского. Для этого в формуле (3.4) следует сделать замены переменных и величин в соответствии с формулами (2.25) и (2.26) и отбросить множитель $-i$. В полученном таким образом действии $\mathfrak{A}'$ остается лишь заменить обозначение индексов $a = n$ на значение $a = 0$. Таким образом, в случае метрики Минковского дискретное дираковское действие и зонтики определяются согласно формулам (3.4) и (3.5), в которых вместо величин $\omega^{ab}_{ij}, e^a_{ij}, \psi_i, \psi^\dagger_i, \gamma^a_{(E)}$ используются соответственно величины $\omega'^{ab}_{ij}, e'^a_{ij}, \psi_i, \overline{\psi}_i, \gamma^a$. При этом равенства (3.6) остаются неизменными для величин со штрихами. Для упрощения записи следующих формул штрих опускается, поскольку это не ведет к недоразумению. Дискретное уравнение Дирака получается путем варьирования действия (3.4) относительно переменных $\overline{\psi}_i$ и приравнивания результата нулю:

$$\frac{i}{n(n+1)} \sum_{j(i)} \sum_a S_{a\, ij} \gamma^a \psi_j = 0. \tag{3.7}$$

В наивном длинноволновом пределе для обычных мод с достаточной точностью имеем

$$\psi_j = \psi_i + e^a_{ij}\frac{\partial}{\partial x^a}\psi_i. \qquad (3.8)$$

Здесь x^a — декартовы координаты в том же ортогональном базисе, в котором задаются компоненты векторов e^a_{ij}. Подставляя разложение (3.8) в (3.7) и пользуясь формулами (3.6), получаем

$$i\gamma^a\partial_a\psi = 0. \qquad (3.9)$$

Отсюда опять видно, что для длинноволновых мод информация о положении вершин комплекса полностью исчезает, обычные длинноволновые моды теряют информацию о структуре решетки. Вследствие второго из равенств (3.6) видно, что решение вида $\psi_i = \mathrm{const}$ также является решением исходного уравнения (3.7).

В случае метрики Минковского под модой дискретного оператора Дирака подразумевается следующая конфигурация дираковского поля $\psi^{(\epsilon)}_j$. Во-первых, конфигурация $\psi^{(\epsilon)}_j$ является решением уравнения (3.7). Далее, пусть $\mathfrak{S}$ обозначает $(n-1)$-подкомплекс комплекса $\mathfrak{K}$, переходящий в пространственноподобную поверхность в непрерывном пределе. Вершины подкомплекса $\mathfrak{S}$ будем обозначать как a_p, a_q, a_r, ... Таким образом, обозначения e^a_{pq}, ψ_p и т. д. подразумевают, что соответствующие величины определены на подкомплексе $\mathfrak{S}$. Рассмотрим такую совокупность n-симплексов $a_pa_qa_{r_1}\ldots a_{r_{n-2}}a_i$, у которых все первые n вершин a_p, a_q, $a_{r_1},\ldots,a_{r_{n-2}}$ принадлежат подкомплексу $\mathfrak{S}$, в то время как последняя его вершина a_i не принадлежит $\mathfrak{S}$, причем 1-симплекс a_pa_i направлен в сторону возрастания времени. Выберем временную координату так, чтобы $x^0(a_p) = x^0(a_q)$. Иными словами, в непрерывном пределе гиперповерхность задается условием $x^0 = \mathrm{const}$. Согласно второму условию, моды $\psi^{(\epsilon)}_j$ являются собственными для гамильтониана на подкомплексе $\mathfrak{S}$, выделенного из оператора Дирака (3.7):

$$(\mathfrak{H}\,\psi^{(\epsilon)})_p \equiv -\frac{i}{(n-1)\,v_p}\times \sum_{q(p)}\sum_{\alpha} S_{\alpha\,pq}\gamma^0\gamma^\alpha\,\psi^{(\epsilon)}_q = \epsilon\,\psi^{(\epsilon)}_p. \qquad (3.10)$$

Здесь v_p является ориентированным объемом соответствующей части подкомплекса $\mathfrak{S}$, $\alpha,\beta,\ldots = 1,\ldots,n-1$, зонтики $S_{\alpha\,pq}$ строятся согласно определению (3.5), в котором делается замена $n\to n-1$ и вместо величин $e^b_{A(i,j)\,i\,k}$, $\varepsilon_{ab_1\ldots b_{n-1}}$ и $\varepsilon_{A(i,j)\,ijk_1\ldots k_{n-1}}$ следует использовать их ограничения соответственно $e^\beta_{A(p,q)\,p\,r}$,

$$\varepsilon_{\alpha\beta_1\ldots\beta_{n-2}} \equiv \varepsilon_{0\alpha\beta_1\ldots\beta_{n-2}}$$

и

$$\varepsilon_{A(p,q)\,p\,q\,r_1\ldots r_{n-2}} \equiv \varepsilon_{A(p,q)\,p\,q\,r_1\ldots r_{n-2}\,i}.$$

На подкомплексе $\mathfrak{S}$ остаются справедливыми аналоги соотношений (3.6). Уравнение (3.10) получено в предположении, что скалярное произведение мод спинорных полей ψ_P и ψ_Q задается формулой

$$\langle\psi_P|\psi_Q\rangle = \frac{1}{n}\sum_r v_r\,\psi^\dagger_{P\,r}\psi_{Q\,r}. \qquad (3.11)$$

Очевидно, в континуальном пределе правая часть (3.11) переходит в интеграл $\int d^{n-1}x\,\psi^\dagger\psi$, а с учетом разложений

$$\psi_q = \psi_p + e^\alpha_{pq}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\psi_p$$

и аналога равенств (3.6) на $\mathfrak{S}$ уравнение (3.10) переходит в континуальное уравнение

$$-i\gamma^0\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi = \epsilon\psi. \qquad (3.12)$$

Таким образом, плоские волны с импульсом k^α имеют энергию $\epsilon = \pm|\mathbf{k}|$, которая может быть сколь угодно малой, причем в длинноволновом пределе информация о структуре решетки теряется.

Нулевой модой называется мода $\psi^{(\epsilon)}_j$ с $\epsilon = 0$. Ясно, что линейное пространство определенных таким образом нулевых мод зависит от подкомплекса $\mathfrak{S}$. Заметим, что частотность мод уравнения Дирака в теории гравитации даже в континуальном случае может изменяться в процессе временной эволюции.

В предыдущих работах автора было показано, что ответ на вопрос: «имеет ли место вильсоновское явление удвоения состояний в рассматриваемой дискретной теории гравитации?», — неоднозначен. Было показано [10], что в двумерном случае ($n = 2$) существуют решетки, на которых имеет место это явление, а также решетки, на которых оно отсутствует. В трехмерном случае были приведены аргументы в пользу существования решеток без удвоения состояний. Однако очевидно, что во всех измерениях существуют такие решетки, на которых вильсоновское удвоение состояний заведомо имеет место. Действительно, n-мерный куб можно превратить в n-мерный симплициальный комплекс путем разбиения куба на $n!$ n-симплексов таким образом, чтобы число вершин (или 0-симплексов) полученного комплекса совпадало с числом вершин куба, равным 2^n. Очевидно, что в этом случае каждый 1-симплекс комплекса соединяет вершины куба. Теперь построим в два шага в n-мерном евклидовом пространстве симплициальный комплекс. На первом шаге построим в пространстве правильную кубическую решетку. На втором шаге превратим каждый куб в n-мерный симплициальный комплекс так, как было указано выше, причем каждый из этих симплициальных комплексов получается из симплициального комплекса фиксированного элементарного куба путем параллельных трансляций вдоль 1-симплексов комплекса. В этом случае гамильтониан (3.4) имеет вид гамильтониана (3.1), и потому удвоение состояний имеет место. В работе [10] рассматриваются также решетки более общего вида, на которых имеется вильсоновское удвоение.

Нам представляется (на интуитивном уровне), что ситуация с удвоением состояний является более типичной. Поэтому далее рассматривается именно этот случай. Далее показывается, что нерегулярные моды не распространяются в пространстве-времени в обычном смысле.

Далее важно следующее: согласно определению, решетка допускает «фермионное удвоение состояний», если у дискретного оператора Дирака (3.7) существуют моды двух типов с собственными значениями, стремящимися к нулю[5]. Качественное различие между ними заключается в следующем. Нормированные моды первого типа, или нормальные моды, удовлетворяют условиям

$$|\psi_i^{(\epsilon)} - \psi_j^{(\epsilon)}| \sim |\epsilon|\, |\psi_j^{(\epsilon)}| \sim |\epsilon|\, N^{-1/2},$$

где a_i и a_j — соседние вершины, ϵ — собственное значение моды, N — число вершин комплекса. Нормированные моды второго типа, или нерегулярные моды, для некоторых соседних вершин, число которых соизмеримо с общим числом вершин комплекса, удовлетворяют условиям

$$|\psi_i^{\mathcal{I}\,(\epsilon)} - \psi_j^{\mathcal{I}\,(\epsilon)}| \sim |\psi_j^{\mathcal{I}\,(\epsilon)}| \sim N^{-1/2}. \tag{3.13}$$

Термин «фермионное удвоение состояний» взят здесь в кавычки по той причине, что нерегулярные мягкие моды, если даже они и существуют на решетке, в рассматриваемой теории не могут распространяться в континуальном пределе подобно обычным мягким модам. Об этом можно судить по длинноволновому поведению корреляторов тех полей, которые по отдельности описывают обычные и нерегулярные моды. Оценка этих корреляторов проводится ниже.

[5] Конечно, предполагается, что размеры решетки (т. е. число ее симплексов) стремятся к бесконечности.

Заметим, что в теориях с действием или гамильтонианом вида (3.1) корреляторы полей обычных и нерегулярных мягких мод ведут себя по сути одинаково в длинноволновом пределе. При этом, конечно, подразумевается, что параметры гамильтониана фиксированы. Одинаковое поведение корреляторов означает, что на больших расстояниях эти корреляторы убывают в точности одинаково. Этот факт легко устанавливается в случае простых гиперкубических решеток. Поэтому явление фермионного удвоения и является действительно удвоением числа фермионных длинноволновых состояний.

Соотношения (3.13) означают, что значения нерегулярных мод, вообще говоря, скачкообразно изменяются при переходе к соседним вершинам. Отсюда следует, что производные нерегулярных мод $\partial_a \psi_i^{\mathcal{A}}$ также в общем случае скачкообразно изменяются при переходе к соседним вершинам. В противном случае из уравнений (3.6) и (3.10) мы получили бы уравнение (3.12), в котором левая часть непрерывна, а правая — разрывна. Более того, производные нерегулярных мод по разным направлениям оказываются несоизмеримыми.

Пусть $\{\psi_{s\,j}^{\mathcal{I}(0)}\}, s = 1, 2, \ldots, S$ обозначает полный независимый набор нулевых нерегулярных мод уравнения (3.10)[6]. Здесь S равно размерности спинорного пространства (в четномерных пространствах $S = 2^{n/2}$).

Очевидно, что любая линейная комбинация нулевых мод также является нулевой модой. Поэтому будем искать мягкую нерегулярную моду, «растущую» от нулевых нерегулярных мод, в виде

$$\psi_j^{\mathcal{I}}\{g\} = \sum_s g_{s\,j}^{\mathcal{I}} \psi_{s\,j}^{\mathcal{I}(0)},$$

где числовые поля $g_{s\,j}^{\mathcal{I}}$ являются медленно меняющимися. Для получения уравнения, которому подчиняются поля $g_{s\,j}^{\mathcal{I}}$, подставим выражение для мягкой нерегулярной моды в уравнение (3.7):

[6] Под полным независимым набором нулевых мод здесь подразумевается такой набор, для которого $\langle \psi_s^{\mathcal{I}(0)} | \Gamma^A \psi_{s'}^{\mathcal{I}(0)} \rangle \neq 0$, где набор матриц $\{\Gamma^A\}$ является полным набором матриц $2^{n/2} \times 2^{n/2}$, $A = 1, \ldots, 2^n$. На гиперкубических решетках таких полных независимых наборов нулевых нерегулярных мод бывает более одного.

$$\frac{i}{n(n+1)}\sum_{j(i)} S_{a\,ij}\gamma^a \times$$
$$\times\sum_{s'}\left[\left(g^{\mathcal{I}}_{s'\,j}-g^{\mathcal{I}}_{s'\,i}\right)+g^{\mathcal{I}}_{s'\,i}\right]\psi^{\mathcal{I}(0)}_{s'\,j}=\frac{i}{n(n+1)}\times$$
$$\times\sum_{j(i)} S_{a\,ij}\gamma^a\sum_{s'}\psi^{\mathcal{I}(0)}_{s'\,j}\left(g^{\mathcal{I}}_{s'\,j}-g^{\mathcal{I}}_{s'\,i}\right)=0. \quad (3.14)$$

Первое равенство в (3.14) является следствием того, что конфигурации поля $\{\psi^{\mathcal{I}(0)}_{s\,j}\}$ удовлетворяют уравнениям (3.7). Нам интересны медленно изменяющиеся поля $g^{\mathcal{I}}_{s\,i}$. В последнем случае второе из уравнений (3.14) приводится к виду

$$i\sum_{s'}\alpha^b_{i\,ss'}\partial_b g^{\mathcal{I}}_{s'\,i}=0, \quad (3.15)$$

$$\alpha^b_{i\,ss'}=\frac{1}{n(n+1)}\times$$
$$\times\left[\sum_a\sum_{j(i)}\left(\overline{\psi}^{\mathcal{I}(0)}_{s\,i}S_{a\,ij}e^b_{ij}\gamma^a\psi^{\mathcal{I}(0)}_{s'\,j}\right)\right]. \quad (3.16)$$

Очевидно, дифференциальный оператор в уравнении (3.15), действующий на функции $g^{\mathcal{I}}_{s\,i}\equiv g^{\mathcal{I}}_s(x_i)$, является эрмитовым, поскольку он получен из эрмитового фермионного действия $\mathfrak{A}'$ (см. (2.25), (2.26) и далее).

Обозначим через $g^{\mathcal{I}}_{s\,k\,i}$ независимый набор решений уравнения (3.15), так что индекс k нумерует эти решения, и пусть

$$\psi^{\mathcal{I}}_i=\sum_k\sum_s g^{\mathcal{I}}_{s\,k\,i}\psi^{\mathcal{I}(0)}_{s\,i} \quad (3.17)$$

является нерегулярной частью дираковского поля. Поля $g^{\mathcal{I}}_{s\,k\,i}$ — грассмановы. Нас интересует хронологическое среднее

$$\langle\hat{T}\psi^{\mathcal{I}}_i\overline{\psi}^{\mathcal{I}}_j\rangle_{\psi,\,e}=\psi^{\mathcal{I}(0)}_{s\,i}\left\langle\left(i\alpha^a\partial_a\right)^{-1}_{ss'\,ij}\right\rangle_e\overline{\psi}^{\mathcal{I}(0)}_{s'\,j}. \quad (3.18)$$

Здесь $\hat{T}$ — оператор хронологического упорядочения и усреднение в левой части идет по фермионам, а также по положениям вершин комплекса в объемлющем пространстве Минковского, т. е. по переменным $\{e_{\mathcal{E}}\}$. В правой части равенства (3.18) остается лишь усреднение по переменным $e_{\mathcal{E}}$. При переходе от левой части равенства (3.18) к его правой части используется тот факт, что конфигурации нулевых мод $\psi^{\mathcal{I}(0)}_{s\,i}$ определяются лишь топологией решетки и потому они могут быть вынесены за знак усреднения; отсюда же следует, что при переходе от переменных $\{\overline{\psi}_i,\,\psi_i\}$ к переменным $\{g^{\mathcal{I}}_{s\,k\,i}\}$ согласно (3.17) якобиан в интеграле (2.14) оказывается c-числовым и потому он может быть опущен. Таким образом, учет нерегулярных мод сводится к гауссову функциональному интегралу по переменным $\{g^{\mathcal{I}}_{s\,k\,i}\}$ с экспонентой от оператора (3.16) в «обкладках» из этих переменных.

В случае нормальных мод $\left(\psi^{(0)}_{s\,i}=\mathrm{const}\right)$ равенства (3.6) дают возможность свернуть выражение для величин (3.16), в которых вместо полей $\psi^{\mathcal{I}(0)}_{s\,i}$ используются поля $\psi^{(0)}_{s\,i}$, к простому выражению:

$$\alpha^a_{i\,ss'}=\frac{v_i}{n+1}\overline{\psi}^{(0)}_s\gamma^a\psi^{(0)}_{s'}. \quad (3.19)$$

Комбинируя равенства (3.15), (3.16), (3.17) и (3.19) для нормальных мод, мы опять возвращаемся к обычному уравнению Дирака (3.9). Следовательно, пропагатор обычных мод имеет стандартный вид

$$\langle\hat{T}\psi(x_i)\,\overline{\psi}(y_j)\rangle_{\psi,\,e}=\frac{1}{4\pi}\gamma^a\partial_a\delta^{(4)}\left((x-y)^2\right)+$$
$$+\mathcal{P}\frac{i\gamma^a(x-y)_a}{2\pi^2\left((x-y)^2\right)^2}. \quad (3.20)$$

Более сложная ситуация имеет место в случае нерегулярных мод, поскольку они меняются скачкообразно при переходе к соседним вершинам. В этом случае величины (3.16) оказываются существенно зависящими от переменных $\{e_{\mathcal{E}}\}$, поэтому остающееся усреднение по этим переменным в правой части равенства (3.18) является весьма нетривиальным.

Продемонстрируем зависимость величин (3.16) от переменных $\{e_{\mathcal{E}}\}$ в простейшем случае двумерного комплекса.

Пусть $x^0=y$, $x^1=x$ — координаты в двумерной плоскости Минковского и $\gamma^0=\sigma^1$, $\gamma^1=i\sigma^2$. Рассмотрим подкомплекс комплекса $\mathfrak{K}$, состоящий из пяти вершин a_k, $k=0,\ldots,4$, восьми 1-симплексов a_0a_1, a_0a_2, a_0a_3, a_0a_4, a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_1, и четырех 2-симплексов $a_0a_1a_2$, $a_0a_2a_3$, $a_0a_3a_4$, $a_0a_4a_1$. Других 2-симплексов, содержащих вершину a_0, комплекс $\mathfrak{K}$ не содержит. Пусть вершина a_0 имеет координаты $x=y=0$, а координаты вершин a_j обозначим как (x_j,y_j), $j\equiv j(0)=1,\,2,\,3,\,4$. Для простоты рассмотрим правую вейлевскую (т. е. верхнюю компоненту дираковского спинора) нерегулярную моду $\varphi^{\mathcal{I}(0)}_k$, причем

$$\varphi^{\mathcal{I}(0)}_1=\varphi^{\mathcal{I}(0)}_3=-\varphi^{\mathcal{I}(0)}_2=-\varphi^{\mathcal{I}(0)}_3=1.$$

Такая конфигурация нулевой нерегулярной моды является вполне типичной (см. [10]). Несложное вычисление показывает, что этом случае

$$\begin{gathered}\alpha_0^a \sim (-f+g,\, f+h),\\ f = (x_1-x_3)\,(y_2-y_4) + (x_2-x_4)\,(y_1-y_3)\,,\\ g = 2\,(x_1-x_3)\,(x_2-x_4)\,,\\ h = 2\,(y_1-y_3)\,(y_2-y_4)\,.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Мы видим, что компоненты матрицы-вектора (3.21) существенно зависят от динамических переменных (полей e^a_{ij}), причем знаки этих компонент изменяются в зависимости от вариаций полей e^a_{ij} и эта зависимость — пространственно-локальная. Здесь важно также, что в рассматриваемой теории переменные $\{e^a_{ij}\}$ могут независимо меняться в интеграле (2.14) в достаточно широком диапазоне без изменения действия. Это утверждение становится точным и совершенно очевидным в предельном континуальном случае (3.2), когда в соответствии с уравнениями (2.20) $e^a_{(E)\mu} = \delta^a_\mu$ и $\omega^{ab}_{(E)\mu} = 0$ независимо от значений переменных $\{e^a_{ij}\}$, задающих положение вершин комплекса в объемлющей гиперплоскости Минковского. При этом действие полностью теряет информацию о положениях вершин. Это утверждение является вообще точным в континуальном пределе в том случае, когда учитываются лишь длинноволновые моды полей с длинами волн, существенно бо́льшими шага решетки, и относительно точным в случае насыщения амплитуды перехода нормальными длинноволновыми модами полей и реализации континуального предела. Действительно, зафиксировав локальные координаты x^μ и поля $e^a_{(E)\mu}$ и $\omega^{ab}_{(E)\mu}$, можно путем варьирования дифференциалов dx^μ изменять переменные $e^a_{A\,mi}$ и $\omega^{ab}_{A\,mi}$ в соответствии с уравнениями (2.20) в широком диапазоне. При этом, конечно, координаты вершин решетки (или их положение в пространстве) должны изменяться соответствующим образом и значения континуальных полей должны браться в точках пространства, соответствующих этим вершинам. Но континуальное действие (2.24) выражается через континуальные 1-формы $\omega^{ab}_{(E)}$ и $e^c_{(E)}$, которые остаются постоянными. Поэтому и континуальное действие остается постоянным.

Отсюда становится очевидным сделанное утверждение о независимости действия от значений решеточных переменных $\{e^a_{ij}\}$ в широком диапазоне в континуальном пределе. Однако в настоящее время не ясны пределы этого диапазона.

Таким образом, компоненты $\alpha^a(x)$ в уравнении (3.15) являются переменными функциями аргумента x, существенно и локально зависящими от переменных интегрирования $\{e_\mathcal{E}\}$ в интеграле (2.14). Поэтому примем следующую модель.

Предположим, что вектор-матрица $\alpha^a(x)$ представляется в виде

$$\alpha^a(x) = \beta^a(x) + \lambda\rho^a, \tag{3.22}$$

где $\rho^a_{s\,s'}$ — постоянная матрица, λ — малый числовой параметр и все нечетные степени величины $\beta(x)$ под знаком интеграла (2.14) обращаются в нуль:

$$\big\langle\, |\beta(x_1)\,\ldots\,\beta(x_{2n+1})\,|\,\big\rangle_e = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.23}$$

Точки $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ могут частично или полностью совпадать между собой. Усреднение в формуле (3.23) является усреднением при помощи функционального интеграла (2.14). При этом нижний индекс $\{e_\mathcal{E}\}$ указывает на тот факт, что интегрирование ограничивается переменными $\{e_\mathcal{E}\}$[7]. Предположим также, что параметр λ относительно мал, так что разложение по этому параметру имеет смысл.

В изучаемой теории при рассмотрении задачи об S-матрице (что имеет смысл лишь в континуальном пределе) все S-матричные элементы еще до вычисления вероятностей и сечений должны быть усреднены по переменным $\{e_\mathcal{E}\}$. Отсюда вытекает, что, если вершины, описывающие взаимодействие, универсальны (т. е. не зависят от микроструктуры решетки не только для нормальных, но и для нерегулярных мод)[8], то пропагаторы полей материи в такой теории должны быть усреднены по переменным $\{e_\mathcal{E}\}$. Действительно, здесь, как и обычно, диаграммная техника может быть получена как результат разложения относительно функционального дифференциального оператора, действующего на амплитуду перехода полей материи в квадратичном (свободном) приближении на фоне внешних источников полей. При этом квадратичная амплитуда перехода должна быть усреднена с весом по переменным $\{e_\mathcal{E}\}$ еще до разложения по взаимодействию.

Таким образом, задача свелась к изучению гриновской функции[9]:

[7] Вследствие ограничений (3.2) переменные $\{\Omega_\mathcal{E}\}$ в рассматриваемой задаче вообще не играют роли.

[8] Именно такая ситуация имеет место в теориях на регулярной решетке с гамильтонианом вида (3.1). В случае же нарушения этого условия относительно взаимодействия нерегулярных мод понятие вильсоновского удвоения, по-видимому, вообще теряет смысл.

[9] Нельзя здесь не отметить фундаментального расхождения используемой вычислительной процедуры с таковой в задачах о локализации частиц в случайных потенциалах. Физическая разница ситуаций заключается в том, что в последнем случае параметры, характеризующие случайность потенциала, не являются динамическими степенями свободы, в то время как положения вершин комплекса являются динамическими переменными.

$$\left\langle \left(i\alpha^a\partial_a\right)^{-1}\right\rangle_e. \tag{3.24}$$

Рассмотрим сначала случай $\lambda = 0$.

Для проведения нужного усреднения функции (3.24) воспользуемся известной формулой

$$\mathcal{P}\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2i}\int_0^\infty ds\left[e^{is\tau} - e^{-is\tau}\right]. \tag{3.25}$$

По смыслу формулы (3.25) переменная $\tau \neq 0$, или $\tau^{-1} \neq \pm\infty$. При помощи (3.25) перепишем оператор (3.24) (в случае $\lambda = 0$, до усреднения по переменным $\{e_{\mathcal{E}}\}$) как

$$\langle x|\left(i\beta^a\partial_a\right)^{-1}|y\rangle = \\ = \frac{1}{2i}\int_0^\infty ds\,\langle x|\left[e^{-s\beta^a\partial_a} - e^{s\beta^a\partial_a}\right]|y\rangle. \tag{3.26}$$

Поскольку при $(x-y)^2 \neq 0$ левая часть уравнения (3.26) конечна, в этом случае уравнение (3.26) имеет смысл. При $(x-y)^2 = 0$ представление (3.26) бессмысленно. Теперь усредним слагаемые в квадратных скобках в (3.26) по переменным $\{e_{\mathcal{E}}\}$. Здесь важно лишь то, что вследствие соотношения (3.23) результат такого усреднения каждого из этих слагаемых является функцией от $(\pm s)^2 = s^2$, но не от $\pm s$. Поэтому в результате усреднения по переменным $\{e_{\mathcal{E}}\}$ слагаемые в квадратных скобках в (3.26) взаимно сокращаются и, таким образом, пропагатор, описывающий распространение нерегулярных мод, пропорционален δ-функции в x-пространстве:

$$\langle \hat{T}\psi^{\mathcal{I}}(x_i)\,\overline{\psi}^{\,\mathcal{I}}(y_j)\rangle_{\psi,\,e} \propto a^2\gamma^a\partial_a\delta^{(4)}\left(x-y\right). \tag{3.27}$$

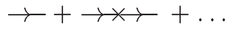
Напомним, что a — некая константа размерности длины, которая имеет масштаб порядка эффективного шага решетки. Спинорная структура правой части соотношения (3.27) однозначно определяется тем, что искомый пропагатор антикоммутирует с матрицей γ^5, и своим поведением относительно пространственной инверсии (сравни с первым слагаемым в правой части уравнения (3.20)). Тот факт, что параметр a в правой части (3.27) имеет масштаб порядка эффективного шага решетки, очевиден из того, что на решетке по определению минимальный масштаб есть шаг решетки. Вследствие размерностных соображений любой свободный парный фермионный коррелятор, составленный из полей в точках x и y, при $x = y$ имеет порядок

$$\langle \hat{T}\psi^{\mathcal{I}}(x)\,\overline{\psi}^{\,\mathcal{I}}(x)\rangle_{\psi,\,e} \sim a^{-3}. \tag{3.28}$$

Эта оценка не зависит от размеров решетки, т. е. от числа ее узлов. В случае нерегулярных мод, согласно (3.27), при $|x-y| \gg a$ коррелятор обращается в нуль. Таким образом, эффективный размер решетки для нерегулярных мод сокращается до размеров подрешетки, состоящей из небольшого числа (порядка единицы) симплексов. Это значит, что для δ-функции в (3.27) имеет место оценка $\delta^{(4)}(0) \sim a^{-4}$. Поскольку для корреляторов нерегулярных мод оценка (3.28) остается справедливой, из сказанного следует, что масштаб правой части в (3.27) выбран правильно.

Результат (3.27) может быть интерпретирован следующим образом. Было показано, что динамика нормальных мод в главном приближении не зависит от переменных $\{e_{\mathcal{E}}\}$ в широком диапазоне. Напротив, динамика нерегулярных мод существенно определяется динамикой переменных $\{e_{\mathcal{E}}\}$. В рассматриваемой теории нерегулярные моды сильно взаимодействуют с нерегулярной решеткой. Эта ситуация качественно отличается от той ситуации, которая имеет место в проблеме распространения волн в случайных потенциалах в теории конденсированного состояния. В последнем случае, хотя потенциал и случаен, он стационарен по времени и является классическим. Напротив, в изучаемой теории потенциал, в котором распространяются нерегулярные моды, описывается волновой функцией и он не является стационарным. Поэтому при распространении нерегулярных мод не только импульс, но и энергия не сохраняются. Более того, остается неясным ответ на вопрос, можно ли интерпретировать нерегулярные моды как квазичастицы? Этот вопрос связан с вопросом о существовании квазичастиц вообще в рассматриваемой теории в дискретной фазе, которая реализуется в сильно сжатом состоянии. Возможно, квазичастицы материи появляются лишь в континуальной фазе, причем лишь для нормальных мод, в то время как квазичастицы нерегулярных мод не существуют вообще в теории изучаемого типа. В такой теории энергия-импульс нерегулярных мод не могут рассматриваться отдельно от энергии-импульса всей системы, т. е. вакуума, который представляется еще более сложным, чем в обычной теории поля. Таким образом, энергия-импульс нерегулярных «квазичастиц» перекачивается в вакуум и наоборот. Существование континуального предела означает также, в частности, что полная энергия-импульс системы сохраняется.

Теперь оценим пропагатор $\langle \hat{T}\psi^{\mathcal{I}}(x_i)\,\overline{\psi}^{\,\mathcal{I}}(y_j)\rangle_{\psi,e}$ при ненулевом λ. При проведении этой оценки воспользуемся возможностью разложения этого пропагатора по параметру λ. Эта задача легко решается при помощи теоретикополевых методов. На рисунке графически представлена сумма диаграмм, которая соответствует величине $\langle \hat{T}\psi^{\mathcal{I}}(x_i)\,\overline{\psi}^{\mathcal{I}}(y_j)\rangle_{\psi,\,e}$ при ненулевом λ. Сплошная линия соответствует невозмущенному пропагатору (3.27), а вставка-крестик — оператору $i\lambda\rho^a\partial_a$:



Опуская простые вычисления, укажем лишь, что в результате невозмущенный пропагатор (3.27), который пропорционален δ-функции, «размывается» и нужный нам пропагатор, описывающий распространение нерегулярных мод, оказывается экспоненциально убывающим в x-пространстве, причем декремент затухания порядка $(\sqrt{\lambda}a)^{-1}$. Поскольку δ-функция в правой части (3.27) также размыта на масштабах порядка a, учет поправки фактически не изменяет результат (3.27).

С другой стороны, согласно (3.20) свободный пропагатор, описывающий распространение нормальных мод, в x-представлении убывает с ростом расстояния строго по степенному закону.

Таким образом, из сравнения формул (3.20) и (3.27) следует вывод об отсутствии явления вильсоновского удвоения фермионных состояний в рассматриваемой теории даже в том случае, когда комплекс допускает существование мягких нерегулярных мод.

4. АНОМАЛИИ И НЕРЕГУЛЯРНЫЕ МОДЫ

Хотя проблематика, связанная с аксиальной аномалией, весьма продолжительное время остается одной из наиболее изучаемых в квантовой теории поля, необходимо привести определенные соображения, связанные со спецификой проблемы в дискретной теории. Поскольку, согласно основному предположению, дискретная теория трансформировалась в континуальную, эти соображения касаются также и некоторых аспектов физической природы аксиальной аномалии в обычной квантовой теории поля. Здесь используется идея Грибова [8], позднее развитая автором [9] (см. также [20], лекция 14).

Продемонстрируем зависимость наличия или отсутствия аксиальной аномалии от специфики способа регуляризации теории в случае нулевого тензора Римана в пространстве Минковского.

Пусть $\{\psi_n(x^0,\,\mathbf{x})\}$ образует в каждый момент времени x^0 полный ортонормированный набор дираковских мод, т. е.

$$\int d^3x\,\psi_m^\dagger(x^0,\,\mathbf{x})\,\psi_n(x^0,\,\mathbf{x}) = \delta_{m,n}. \qquad (4.1)$$

Предполагается, что эти моды являются решениями уравнения Дирака (3.9) в заданном электромагнитном поле, а в фиксированный момент времени $x^0 = \mathrm{const}$ удовлетворяют собственным уравнениям (3.12) в заданном электромагнитном поле. Это значит, что в уравнениях (3.9) и (3.12) делаются замены $\partial_a \to \nabla_a = \partial_a + iA_a$, где A_a — электромагнитное поле (гравитационное поле здесь не играет роли). Если в (3.12) $\epsilon_n > 0$ $(\epsilon_n < 0)$, то соответствующая мода называется положительно- (отрицательно-) частотной и обозначается как $\psi_n^{(+)}$ $(\psi_n^{(-)})$. Имеется взаимно однозначное соответствие между положительно- и отрицательно-частотными модами, так как преобразование $\psi_n \to \gamma^0\gamma^5\psi_n$ меняет их местами. Поэтому будем считать, что индекс n нумерует лишь положительно-частотные моды. Представим квантованное регуляризованное дираковское поле в виде

$$\psi\,(x) = \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\psi_n^{(+)}\,(x) + b_n^\dagger\psi_n^{(-)}\,(x)\right). \qquad (4.2)$$

Здесь подразумевается, что в сумме (4.2) учитываются все моды с энергиями $0 \le \epsilon_n < \Lambda$, количество которых N. Таким образом, Λ есть энергия обрезания, так что здесь проведена регуляризация в рамках гамильтоновского формализма. Поскольку собственные энергии мод ϵ_n калибровочно инвариантны, регуляризация (4.2) сохраняет калибровочную инвариантность. Чтобы в пределе $\Lambda \to \infty$ дираковские поля удовлетворяли каноническому антикоммутационному соотношению

$$\{\psi(x^0,\mathbf{x}),\,\psi^\dagger(x^0,\mathbf{y})\} = \delta^{(\mathbf{3})}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

должны выполняться следующие антикоммутационные соотношения (выписываются лишь ненулевые соотношения):

$$\{a_m,\,a_n^\dagger\} = \{b_m,\,b_n^\dagger\} = \delta_{m,n}. \qquad (4.3)$$

По определению операторы рождения и уничтожения в разложениях (4.2) не зависят от времени. Поэтому квантованные дираковские поля удовлетворяют уравнению Дирака

$$i\,\gamma^a\nabla_a\psi = 0, \qquad (4.4)$$

и, таким образом, они являются гейзенберговыми операторами во внешнем электромагнитном поле. Вакуумное и возбужденные состояния естественно определить как

$$a_n\,|\,0\,\rangle = b_n\,|\,0\,\rangle = 0,\qquad |n_1,\dots;m_1,\dots\rangle = b^\dagger_{n_1}\dots a^\dagger_{m_1}\dots|\,0\,\rangle. \tag{4.5}$$

Составим из квантованных полей векторный $J^a = \overline{\psi}\gamma^a\psi$ и аксиально-векторный $J^{5\,a} = \overline{\psi}\gamma^a\gamma^5\psi$ токи. Поскольку эти токи составлены из регуляризованных полей (4.2), все их матричные элементы относительно векторов фоковского пространства (4.5) конечны, т. е. эти операторы корректно определены. В этом случае из уравнения Дирака (4.4) для квантованных полей следуют законы сохранения этих токов:

$$\partial_a J^a = 0,\quad \partial_a J^{5\,a} = 0. \tag{4.6}$$

Подчеркнем, что одновременное выполнение двух равенств (4.6) никоим образом не противоречит известному утверждению, что в случае сохранения калибровочной инвариантности в калибровочных теориях аксиально-векторный ток не сохраняется[10]:

$$\partial_a J^{5\,a} = \frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{abcd}F_{ab}F_{cd} \equiv \mathcal{A}. \tag{4.7}$$

Дело в том, что равенство (4.7) получено при использовании диаграммной техники Фейнмана, в которой используются причинные гриновские функции, в которых (в импульсном представлении) левый полюс находится выше, а правый — ниже вещественной оси в комплексной плоскости частотной переменной. В свою очередь, такой обход полюсов вытекает из физической гипотезы, согласно которой вся эволюция физического вакуума за бесконечный промежуток времени сводится лишь к накоплению общей фазы. Тогда в теории возмущений на фоне такого вакуума должны использоваться причинные гриновские функции. Эта гипотеза о динамическом воспроизводстве вакуума оправдана, в частности, в теории S-матрицы. Поскольку в случае использования причинных гриновских функций возможен поворот Вика в евклидово пространство, вычисления в евклидовом пространстве принципиально эквивалентны вычислениям в теории S-матрицы[11]. Поэтому при использовании евклидовой сигнатуры также справедлив результат (4.7). Отсюда очевидно, что вычисление, приведшее к результату (4.6), находится за рамками теории S-матрицы и в данном случае евклидов постулат несправедлив. Действительно, дираковское поле, удовлетворяющее уравнению Дирака с евклидовой сигнатурой, как и любое уравнение эллиптического типа, обязательно имеет особенности (возможно — на бесконечности).

Всякая ультрафиолетовая регуляризация по существу означает отбрасывание из теории неких коротковолновых конфигураций полей за некоторой условной границей (границей регуляризации) и сохранение в теории более длинноволновых полевых конфигураций. Грибов интерпретировал совокупность приведенных выше фактов следующим образом [8]: любая регуляризация в теории S-матрицы несовместна с регуляризацией (4.2). Это означает, что граница регуляризации в теории S-матрицы обязательно пересекается конфигурациями мод, по которым разложено дираковское поле в (4.2). При этом, хотя полный киральный заряд так же, как и электрический заряд, строго сохраняется, существует перетекание кирального заряда сквозь границу регуляризации в теории S-матрицы. При этом электрический заряд не перетекает через эту границу. Этим фундаментальным свойством обладает любая ультрафиолетовая регуляризация. Таким образом, изменение кирального заряда в регуляризованной теории S-матрицы компенсируется таким же изменением, но с обратным знаком, кирального заряда ультрафиолетовой зоны дираковского моря, отделенной от физически значимых более длинноволновых конфигураций полей границей регуляризации. Эта ультрафиолетовая зона дираковского моря выбрасывается из рассмотрения в регуляризованной теории. Изменения киральных зарядов зависят лишь от заложенных гипотез, диктуемых физикой, но не от глубины расположения границы регуляризации в дираковском море (см. (4.7)). Электрические же заряды по обе стороны от границы регуляризации

[10] Следует заметить, что если бы вычисление проводилось в римановом пространстве, то в правой части уравнения (4.7) было бы дополнительное слагаемое, пропорциональное билинейной форме от тензора Римана. Хотя далее и подразумевается, что это (и все возможные прочие) слагаемое содержится в $\mathcal{A}$, оно здесь не выписывается явно и не обсуждается по двум причинам. Во-первых, все утверждения в настоящей работе, связанные с электромагнитным вкладом в аксиальную аномалию, сохраняются по отношению ко всем прочим вкладам. Во-вторых, в литературе применительно к проблеме барионной асимметрии широко обсуждаются именно эффекты, основанные на электромагнитном вкладе в аксиальную аномалию [7].

[11] Возможность поворота Вика в евклидово пространство, в котором теория оказывается полностью пространственно изотропной, иногда называется евклидовым постулатом.

сохраняются по отдельности.

Отсюда очевидно также, что несохранение кирального заряда происходит на максимальных импульсах вблизи границы регуляризации, т. е. несохранение кирального заряда имеет локальный характер в импульсном пространстве.

На первый взгляд обобщение регуляризации типа (4.2) на случай нелинейных, т. е. взаимодействующих, теорий затруднительно, поскольку неясен принцип выделения соответствующих мод полей. Однако в квантовой теории гравитации такой подход недавно был разработан в работе [9]. Идеологию такого квантования континуальной теории гравитации необходимо здесь привести.

Далее под термином «динамическая система» подразумевается континуальная квантовая теория гравитации. Для квантования общековариантной системы применяется хорошо известная процедура, предложенная Дираком. Для краткости и ясности основные предположения удобно формулировать как аксиомы.

Аксиома 1. Все состояния теории получаются из основного состояния $|\,0\,\rangle$ при помощи операторов рождения $A_n^\dagger$:

$$
\begin{gathered}
|\,n_1;\ldots;n_s\,\rangle = A_{n_1}^\dagger\cdot\ldots\cdot A_{n_s}^\dagger\,|\,0\,\rangle, \\
A_n\,|\,0\,\rangle = 0.
\end{gathered}
\tag{4.8}
$$

Совокупность состояний (4.8) образует ортогональный базис в пространстве физических состояний теории.

Здесь операторы $A_n^\dagger$ и эрмитово сопряженные A_n являются бозонными и фермионными генераторами алгебры Гейзенберга.

Поскольку состояния (4.8) физические, они удовлетворяют условиям

$$
\begin{gathered}
\mathcal{H}_T\,|\,n_1;\ldots;n_s\,\rangle = 0, \\
\mathcal{H}_T = \sum_{\Xi} v_\Xi \chi_\Xi,
\end{gathered}
\tag{4.9}
$$

где $\{\chi_\Xi\}$ — полный набор связей первого рода и $\{v_\Xi\}$ — набор множителей Лагранжа, являющихся произвольными. Таким образом, величина $\mathcal{H}_T$ является полным гамильтонианом теории.

Уравнения (4.8) и (4.9) совместны тогда и только тогда, когда имеют место следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
[A_n,\,\mathcal{H}_T] = \sum_{\Xi,\,\Pi} r_{n\,\Xi\,\Pi} v_\Xi\,\chi_\Pi \longleftrightarrow \\
\longleftrightarrow\ [A_n^\dagger,\,\mathcal{H}_T] = -\sum_{\Xi,\,\Pi}\chi_\Pi\, v_\Xi^* r_{n\,\Xi\,\Pi}^\dagger.
\end{gathered}
\tag{4.10}
$$

Пусть произвольное поле (или более общий оператор) $\Psi(x)$ представлен как нормально упорядоченный ряд по паре операторов $(A_n^\dagger,\,A_n)$ с фиксированным индексом n:

$$
\Psi = \Psi' + \psi_n^{(+)}A_n + A_n^\dagger\psi_n^{(-)}. \tag{4.11}
$$

По определению оператор Ψ' не зависит от операторов $(A_n^\dagger,\,A_n)$:

$$
[\Psi',\,A_n^\dagger] = [\Psi',\,A_n] = 0. \tag{4.12}
$$

Из уравнений (4.10)–(4.12) следует, что

$$
\begin{gathered}
[\Psi,\,\mathcal{H}_T] = [\Psi',\,\mathcal{H}_T'] + \\
+\sum_{\Xi}(q_\Xi\chi_\Xi + \chi_\Xi\tilde{q}_\Xi) + (p_nA_n + A_n^\dagger\tilde{p}_n).
\end{gathered}
\tag{4.13}
$$

Здесь полный гамильтониан $\mathcal{H}_T$ представлен согласно (4.11), так что $\mathcal{H}_T'$ не зависит от операторов $(A_n^\dagger,\,A_n)$.

Теперь наложим дополнительную пару связей второго рода

$$
A_n = 0, \quad A_n^\dagger = 0. \tag{4.14}
$$

По определению при наложении связей (4.14) любой оператор Ψ сводится к оператору Ψ' в соответствии с разложением (4.11). Для любых операторов Ψ, Φ квантовая скобка Дирака, возникающая вследствие наложения связей (4.14), определяется согласно следующему уравнению:

$$
[\Psi,\,\Phi]^* \equiv [\Psi',\,\Phi']. \tag{4.15}
$$

Замечательным свойством рассматриваемой теории является соотношение

$$
[\Psi,\,\mathcal{H}_T]^* \approx\ [\Psi,\,\mathcal{H}_T]. \tag{4.16}
$$

Здесь приближенное равенство означает, что после наложения всех связей первого и второго рода операторы в обеих частях равенства (4.16) совпадут, т. е. слабое равенство (4.16) трансформируется в сильное. Соотношение (4.16) немедленно следует из уравнений (4.13) и (4.15). Уравнение (4.16) означает, что в теории со связями (4.14) уравнение Гейзенберга

$$
i\dot{\Psi} = [\Psi,\,\mathcal{H}_T]^* \tag{4.17}
$$

для любого оператора слабо совпадает с уравнением Гейзенберга в теории без связей (4.14). Очевидно, что это замечательное свойство теории остается справедливым при наложении любого числа пар связей второго рода типа (4.14). Поэтому естественно принять следующие аксиомы.

Аксиома 2. В случае компактных пространств индекс n в аксиоме 1 пробегает конечное множество индексов: $n = 1, \ldots, N$.

Аксиома 3. Уравнения движения и связей для квантованных полей имеют ту же форму (с точностью до упорядочения операторов), что и соответствующие классические уравнения и связи.

Аксиома 2 не исключает эффекта так называемого разрыхления упаковки мод в импульсном пространстве (см. [12]). Аксиома 3 является следствием уравнений (4.16) и (4.17).

В рассматриваемой теории совокупность уравнений движения и связей включает уравнения Эйнштейна и уравнения материальных полей. Далее для краткости совокупность всех этих уравнений называется уравнениями движения. Для получения решений в такой теории следует подставить в уравнения движения поля, разложенные как

$$\Psi(x) = \Psi'(x) + \sum_{n=1}^{N} \left\{ \psi_n^{(+)}(x) A_n + A_n^\dagger \psi_n^{(-)}(x) \right\}. \quad (4.18)$$

По определению только волновые функции $\{\psi_n^{(\pm)}\}$ разлагаются в ряды по операторам рождения и уничтожения, в то время как поля Ψ' являются c-числовыми или классическими. Таким образом, уравнения движения становятся рядами по степеням операторов $\{A_n^\dagger, A_n\}$; очевидно, c-числовые коэффициенты при различных степенях нормально упорядоченных операторов $\{A_n^\dagger, A_n\}$ равны нулю по отдельности. Так возникает цепочка c-числовых дифференциальных уравнений, нулевое приближение которых — это классические уравнения Эйнштейна. Важно, что регуляризованные уравнения движения являются общековариантными. Это следствие аксиомы 3 и того, что соответствующие классические уравнения общековариантны.

Квантование гравитации в соответствии с аксиомами 1–3 было названо динамическим квантованием [9].

Ясно, что динамическое квантование эффективно применимо лишь к нормальным модам. В соответствии с концепцией динамического квантования дираковское поле разлагается согласно (4.2) и удовлетворяет уравнению Дирака (4.4) во внешних квантованных гравитационном и калибровочном полях, которые также разлагаются согласно (4.18) и удовлетворяют соответствующим уравнениям движения. При этом все операторы рождения и уничтожения $\{a_n^\dagger, b_n^\dagger, a_n, b_n\}$ и т. д. являются интегралами движения. Таким образом, в первом приближении дираковское поле разлагается согласно (4.2) по c-числовым волновым функциям $\psi_n^{(0)(\pm)}(x)$, причем последние удовлетворяют уравнению Дирака (4.4) во внешних классических гравитационном и калибровочном полях.

Отсюда опять видно, что в условиях применимости динамического квантования одновременно сохраняются векторный и аксиально векторный токи. Нарушение сохранения аксиального тока может происходить лишь за счет перетекания аксиального заряда через границу регуляризации при максимально возможных энергиях. В теории дискретной гравитации при максимально возможных энергиях становится существенной структура решетки. В этой области энергий конфигурации нормальных и нерегулярных мод становятся качественно неразличимыми, поскольку как те, так и другие изменяются скачкообразно при переходе к соседним узлам решетки. В этой области энергий аксиальный заряд может перераспределяться между нормальными и нерегулярными модами. При этом аксиальный заряд растекается между всеми нерегулярными модами, поскольку, как было показано в предыдущем разделе, энергия нерегулярных мод не сохраняется.

Для дальнейшего рассмотрения имеет смысл определить «медленные» и «быстрые» регулярные моды. Медленными модами называются те моды, у которых $|\epsilon_n| \ll H$, а быстрыми — моды с $|\epsilon_n| \gg H$, где $H = (d\mathfrak{a}/dt)/\mathfrak{a}$ — постоянная Хаббла и $\mathfrak{a}(t)$ — радиус (масштабный фактор) Вселенной[12]. Важно знать, медленными или быстрыми модами являются моды вблизи границы регуляризации, т. е. моды с энергией $|\epsilon_n| \sim \Lambda$. Действительно, если $\Lambda \ll H$ (ниже показывается, что даже если такой режим может существовать, в процессе эволюции он динамически перестраивается в противоположный режим $\Lambda \gg H$), то динамика самих мод должна определяться динамикой Вселенной, важнейшие свойства которой (масштабный фактор) эволюционируют быстрее эволюции мод. В этом случае обычная задача вычисления S-матричных элементов с использованием причинных гриновских функций не имеет смысла. Необходимо решать уравнения Гейзенберга в соответствии со схемой динамического квантования, сформулированной выше. В таком режиме мо-

[12] Конечно, в современную эпоху медленные моды являются исключительно мягкими, в то время как почти все моды — быстрые. Однако на этапе инфляционного раздувания Вселенной это было не так.

гут одновременно сохраняться векторный и аксиально-векторный токи нормальных мод.

В противоположном случае $\Lambda \gg H$ моды на границе регуляризации слабо зависят от эволюции Вселенной, поскольку эволюция этих мод является слишком быстрой по сравнению с динамикой Вселенной. В этом случае задача вычисления S-матричных элементов для быстрых регулярных мод в традиционной постановке имеет смысл. Поэтому, как было установлено выше, сохраняется лишь векторный ток, а аксиально-векторный ток нормальных мод не сохраняется вследствие наличия аномалии. С другой стороны, так как полные токи, включающие нормальные и нерегулярные моды, строго сохраняются на решетке, изменение аксиального заряда нормальных мод означает такое же, но противоположного знака изменение аксиального заряда нерегулярных мод.

Чтобы выяснить условия, при которых реализуются описанные противоположные режимы эволюции Вселенной, приведем следующие элементарные оценки. Из конкретных вычислений известно, что в однородной Вселенной с масштабным фактором $\mathfrak{a}$ компоненты 1-формы связности имеют порядок

$$\omega^{0\alpha} \sim (d\,\mathfrak{a}/dt)/\,\mathfrak{a} = H. \tag{4.19}$$

Последняя оценка следует также из размерностных соображений. Отсюда получаем оценку для тензора Римана:

$$R_{abcd} \sim H^2. \tag{4.20}$$

Подставляя оценку (4.20) в уравнение Эйнштейна, получим

$$H^2 \sim l_P^2 \langle T_b^a \rangle \sim l_P^2 \Lambda^4 \varkappa^{-1}. \tag{4.21}$$

Здесь усреднение означает усреднение по квантовым флуктуациям. Очевидно, в математически корректной дискретной квантовой теории гравитации вклад вакуумных квантовых флуктуаций в матричные элементы тензора энергии-импульса не может игнорироваться. Безразмерное число $\varkappa \geq 1$ вносит поправку, зависящую как от симметрий теории, так и от специфики дискретной теории вообще. В частности, $\varkappa = 1$ означает, что на каждую моду в фазовом пространстве приходится объем $(2\pi\hbar)^3$ (в нормальных единицах), что соответствует плотной упаковке мод в энергетическом (импульсном) пространстве. В том случае, когда имеется суперсимметрия, параметр $\varkappa$ может оказаться очень большим, поскольку вклады вакуумных квантовых флуктуаций в средние от тензора энергии-импульса либо полностью, либо частично взаимно сокращаются. Однако в рассматриваемой дискретной теории имеется специфический механизм возрастания числа $\varkappa$ на очень много порядков в зависимости от размеров Вселенной. Механизм, приводящий к этому эффекту, основан на нерегулярности решетки и том факте, что в континуальном пределе расположение вершин решетки в пространстве-времени мало влияет на величину действия в весьма широком диапазоне. Соответствующие оценки приведены в работе [12]. Этот эффект называется разрыхлением плотности упаковки мод в фазовом пространстве, поскольку в результате на каждую моду в фазовом пространстве приходится объем, бóльший $(2\pi\hbar)^3$ на много порядков, причем этот эффект тем больше, чем больше размер Вселенной.

Этот же эффект можно наблюдать также и в рамках процедуры динамического квантования. Действительно, будем решать квантовые уравнения движения, учитывая нелинейности при помощи теории возмущений. Тогда для дираковского поля во внешнем калибровочном поле имеем

$$\begin{aligned} \psi(x) = \psi^{(1)}(x) + \int d^4y\, S_{ret}(x-y)\, A_a^{(1)}(y)\gamma^a\psi^{(1)}(y) + \\ + 4\pi\, e^2 \iint d^4y d^4z\, S_{ret}(x-y)\, D_{ret}(y-z) \times \\ \times \left(\overline{\psi}^{(1)}(z)\gamma_a\psi^{(1)}(z)\right)\gamma^a\psi^{(1)}(y) + \ldots , \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$i\gamma^a\partial_a\, S_{ret}(x) = \delta^{(4)}(x), \tag{4.23}$$

$$\partial_a\partial^a\, D_{ret}(x) = \delta^{(4)}(x). \tag{4.24}$$

Здесь $\psi^{(1)}(x)$, $A_a^{(1)}(x)$ — квантованные регуляризованные поля в первом приближении относительно операторов $\{A_n^\dagger, A_n\}$ (т. е. поля вида (4.2), разложенные по c-числовым модам), $S_{ret}(x)$ и $D_{ret}(x)$ — запаздывающие функции Грина, удовлетворяющие уравнениям (4.23) и (4.24). Предположим, что поля в первом приближении имеют ограниченное число ненулевых компонент Фурье. Из решения (4.22) видно, что точное гейзенбергово поле $\psi(x)$ имеет значительно больше ненулевых компонент Фурье, чем поле в первом приближении $\psi^{(1)}$. Отсюда очевиден эффект «разбегания» мод в импульсном пространстве в результате динамической эволюции. Таким образом, даже если на самом раннем этапе эволюции Вселенной моды квантованных полей были достаточно плотно «упакованы» в импульсном пространстве, то динамика неизбежно ведет к существенному, на много порядков, разрыхлению плотности упаковки мод.

Предположим, что в (4.21) $\Lambda \sim l_P^{-1}$. Тогда вследствие эффекта существенного разрыхления плотности упаковки мод приходим к оценке

$$H \lll l_P^{-1} \sim \Lambda. \tag{4.25}$$

Последняя оценка означает, что подавляющее число мод являются быстрыми. Поэтому, как было сказано выше, сохраняется лишь векторный ток нормальных мод, в то время как аксиально-векторный ток нормальных мод не сохраняется в соответствии с (4.7). В рассматриваемой дискретной теории такой режим устанавливается на весьма ранней стадии эволюции Вселенной независимо от значения исходных параметров.

На основе сказанного может быть выдвинута гипотеза о том, что дискретная квантовая теория гравитации рассмотренного типа в том случае, когда имеет место континуальный предел, эффективно описывается при помощи динамического метода квантования. Это заключение делается на основе того, что в обеих теориях, во-первых, имеется конечное число степеней свободы в случае компактного пространства и, во-вторых, имеет место явление существенного разрыхления плотности упаковки мод в импульсном пространстве.

5. ОБСУЖДЕНИЕ И ГИПОТЕЗЫ

Покажем, что учет нерегулярных мод дает несущественные поправки к элементам S-матрицы для регулярных мод.

Прежде всего сделаем следующие замечания, вытекающие из сказанного выше и носящие качественный характер.

1. Любой коррелятор вида $\langle \hat{T}\psi^{\mathcal{I}}(x)\,\overline{\psi}\,(y)\rangle_{\psi,\,e}$, т. е. парный коррелятор между нормальным и нерегулярным полями, пренебрежимо мал при всех значениях аргументов x, y, включая значения $x = y$. Этот результат основан на том факте, что (согласно определению) нормальное поле не содержит информации о структуре решетки, в то время как нерегулярное поле существенно и локально определяется этой структурой. Поэтому в результате усреднения по положениям вершин решетки парный коррелятор указанного типа становится исключительно малым.

2. В рамках теории возмущений амплитуды перехода, в числе внешних линий которых содержатся как нормальные, так и нерегулярные кванты (частицы), пренебрежимо малы по сравнению с амплитудами, внешние линии которых относятся лишь к нормальным частицам. Действительно, из выражения (2.12) видно, что хотя вершина взаимодействия дираковского поля с любым полем связности (в том числе с любым калибровочным полем) билинейна относительно дираковских полей, последние разнесены на соседние вершины решетки. Поэтому, если в вершину входит и из нее выходит нерегулярный квант, то соответствующие им нерегулярные моды делают невозможным излучение/поглощение этой вершиной нормального кванта калибровочного поля. Этот эффект является следствием того, что произведение нерегулярных мод в соседних вершинах решетки является величиной, существенно изменяющейся при переходе к соседним вершинам, даже если одна из вершин остается фиксированной. Поэтому суммирование в действии по узлам (интегрирование в x-пространстве) и усреднение по положениям узлов приводит к фактическому исчезновению таких элементарных актов взаимодействия. Из таких вершин может излучиться лишь нерегулярный квант калибровочного поля[13)], который в свою очередь имеет пренебрежимо малую вероятность поглотиться вершиной, в которую входит нормальный и из которой выходит также нормальный квант дираковского поля. Этот эффект усиливается тем, что точные решеточные уравнения для пропагаторов, описывающих распространение дираковских и калибровочных частиц, существенно различаются. Поэтому пропагаторы аномальных квантов калибровочных полей не могут компенсировать пространственные нерегулярности в вершинах, происходящие от произведения дираковских пропагаторов нерегулярных мод в соседних вершинах. Так что превращение нерегулярного кванта дираковского поля в нормальный квант за счет отщепления нерегулярного кванта калибровочного поля также чрезвычайно мало вероятно.

Из сказанного выше ясно, что корреляторы всех нерегулярных мод также имеют вид (3.27). В этом смысле все обобщенные нерегулярные моды качественно неразличимы: их энергии и импульсы не сохраняются по отдельности.

Заметим, что даже без учета малости вершин, в которых сходятся линии нормальных и нерегулярных пропагаторов, вклад нерегулярных петель (т. е. петель, вдоль которых распространяются нерегулярные кванты) несуществен. При помощи (3.27)

13) Далее под нерегулярными квантами мы понимаем все кванты, моды которых сильно зависят от структуры решетки. К таким модам можно отнести не только все моды, «растущие» от нулевых нерегулярных мод, но также и высокоэнергетические моды, «растущие» от нормальных мод.

легко получить однопетлевую оценку такого вклада в поляризационный оператор, который изменяет константу перенормировки калибровочного поля на величину $\Delta Z_3 \sim e^2(a\Lambda)^4$. Аналогичная оценка для фотонной четыреххвостки дает вклад порядка $k_{i_1} \ldots k_{i_4} e^4 a^8 \Lambda^4 \to 0$ и т. д.

Из приведенных выше замечаний 1, 2 следует вывод, что амплитуды переходов нерегулярных мод в нормальные и обратно крайне подавлены. В результате секторы квантов нормальных мод и «квантов» нерегулярных мод существуют по отдельности, почти не взаимодействуя между собой.

С другой стороны, перераспределение кирального заряда между нормальными и нерегулярными модами имеет место вследствие аномальной расходимости кирального тока нормальных мод (4.7) и при наличии инстантонов. При этом, поскольку полный киральный заряд в решеточной теории строго сохраняется[14)], изменение кирального заряда нормальных мод строго компенсируется таким же изменением, но с противоположным знаком, кирального заряда нерегулярных мод.

Наиболее привлекательная идея возникновения барионной асимметрии во Вселенной основана именно на этом эффекте изменения кирального заряда [7]. Согласно этой идее на ранних стадиях эволюции Вселенной в нагретом состоянии инстантоны играли существенную роль, приводя в рамках Стандартной модели к изменению барионного заряда Вселенной вследствие наличия аксиальной аномалии. Согласно излагаемой здесь теории, это изменение барионного заряда ΔQ_B относится лишь к материи, описываемой нормальными модами. При этом изменяется барионный заряд материи, описываемой нерегулярными модами, на величину $-\Delta Q_B$, так что полный барионный заряд Вселенной сохраняется.

Исходя из изложенного выше, мы выдвигаем гипотезу, что темная скучивающаяся материя во Вселенной представляет собой материю нерегулярных мод. В пользу этой гипотезы (которая может существовать лишь в дискретной теории гравитации) говорят следующие моменты. Во-первых, нормальная материя крайне слабо взаимодействует с нерегулярной материей. Во-вторых, несмотря на равные по модулю барионные заряды нормальной и нерегулярной материи, нерегулярная материя должна давать существенно больший вклад в гравитационное поле по сравнению с нормальной материей. Этот вывод является следствием того, что в соответствии с видом корреляторов нерегулярных полей (3.27) средние энергии квантов нерегулярной материи существенно больше средних энергий квантов нормальной материи. Иными словами, в рамках рассматриваемой теории общее количество скучивающейся материи, создающей гравитационное поле, определяется в основном количеством нерегулярной материи. Имеющиеся экспериментальные оценки для полного количества нормальной барионной и темной скучивающейся материи (в единицах критической плотности) таковы: соответственно 4 % и 25 %. То, что нерегулярная материя должна быть скучивающейся, следует из несохранения импульсов квантов нерегулярной материи: в результате кванты нерегулярной материи распространяются наподобие броуновских частиц.

Еще одна гипотеза относится к проблеме происхождения космических частиц высоких энергий. Энергии таких частиц могут превышать более чем в 10^{10} раз максимально достижимые энергии на ускорителях. Десятки таких частиц были зарегистрированы по каскадам частиц, которые они вызывают при вхождении в атмосферу Земли. Насколько нам известно, в настоящее время отсутствует теория возникновения столь высокоэнергетических частиц. В рамках изучаемой здесь теории можно предположить, что такие высокоэнергетические частицы возникают в результате перехода высокоэнергетических нерегулярных квантов материи (которые присутствуют в темной скучивающейся материи) в высокоэнергетические кванты нормальной материи. Как было показано выше, такие переходы маловероятны, откуда вытекает малая вероятность регистрации этих высокоэнергетических частиц.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы НШ-6358.2006.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).

2. S. L. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969).

3. J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cimento A **60**, 47 (1969).

4. А. М. Поляков, Письма в ЖЭТФ **20**, 430 (1974); G.'t Hooft, Nucl. Phys. B **79**, 276 (1974).

14) Действительно, и действие, и фермионная мера в решеточной теории инвариантны относительно киральных преобразований.

5. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, and Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. B **59**, 85 (1975).

6. В. А. Рубаков, Письма в ЖЭТФ **33**, 658 (1981).

7. В. А. Рубаков, М. Е. Шапошников, УФН **166**, 493 (1996).

8. V. N. Gribov, Preprint KFKI-66, Budapest (1981).

9. С. Н. Вергелес, ЖЭТФ **120**, 1069 (2001).

10. С. Н. Вергелес, ЖЭТФ **124**, 1203 (2003).

11. С. Н. Вергелес, Письма в ЖЭТФ **82**, 699 (2005).

12. S. N. Vergeles, Nucl. Phys. B **735**, 173 (2006); E-print archives, hep-th/0512137.

13. K. G. Wilson, Erice Lectures Notes (1975).

14. J. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. D **11**, 393 (1975).

15. L. Susskind, Phys. Rev. D **16**, 3031 (1977).

16. M. Luscher, E-print archives, hep-th/0102028.

17. H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B **185**, 20 (1981); **193**, 173 (1981).

18. E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, Phys. Rev. D **8**, 4241 (1973).

19. J. B. Hartle and S. W. Hawking, Phys. Rev. D **28**, 2960 (1983).

20. С. Н. Вергелес, *Лекции по квантовой электродинамике*, Физматлит, Москва (2005).