ЖЭТФ, 2007, том 132, вып. 5 (11), стр. 1203–1213

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

Э. В. Вейцман *

Научно-производственное предприятие «Технолазер»
121108, Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 июня 2006 г.

Получены релятивистские уравнения состояния для идеальных и реальных газов, а также для различного рода межфазных областей раздела. С помощью этих зависимостей были устранены некоторые противоречия, имеющие место в релятивистской термодинамике, основанной на базе Специальной теории относительности. В частности, было показано, что при стремлении скорости изучаемого объекта к скорости света в вакууме, температура системы будет меняться согласно Отту, т. е. по закону $T = T_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Были также получены релятивистские зависимости для тепло- и массопереноса, для закона Ома и для вязкого течения жидкости.

PACS: 03.30.+p

1. ВВЕДЕНИЕ

Основы релятивистской термодинамики были в 1909 г. сформулированы Планком [1]. Согласно им ее первое и второе начала сохраняют свой вид при любых скоростях изучаемой системы (естественно, в инерциальной системе координат), т. е.

$$dQ = dU - dA, \tag{1}$$

$$dS = dQ/T, \quad S = S_0, \tag{2}$$

$$T = T_0\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = v/c, \tag{3}$$

$$p = p_0, \tag{4}$$

$$V = V_0\sqrt{1-\beta^2}, \tag{5}$$

где Q — тепло, введенное в изучаемую систему или выведенное из нее (Дж), U — внутренняя энергия системы (Дж), A — работа, произведенная системой или же произведенная над системой (Дж), S — энтропия движущегося объекта, S_0 — энтропия объекта, находящегося в покое (здесь и ниже индекс «0» означает, что величина относится к объекту, находящемуся в покое в данной системе координат), $p(p_0)$ — давление, $T(T_0)$ — абсолютная температура, $V(V_0)$ — объем,

$$dA = -p\,dV + \mathbf{v}\cdot d\mathbf{G}, \tag{6}$$

$\mathbf{G}$ — импульс:

$$\mathbf{G} = \mathbf{v}(U_0 + p_0V_0)/c^2\sqrt{1-\beta^2}, \tag{7}$$

вектор $\mathbf{G}$ и

$$\frac{i}{c}(U + pV) \tag{8}$$

образуют 4-вектор энергии-импульса, который имеет инвариантную длину, равную

$$\frac{i}{c}(U_0 + p_0V_0). \tag{9}$$

Согласно Планку, уравнение состояния для идеального газа не должно менять свою структуру при $\mathbf{v} \to \mathbf{c}$, т. е. для одного моля вещества,

$$pV = RT, \quad p_0V_0 = R_0T_0, \tag{10}$$

где R [Дж/(моль·град)] — газовая постоянная.

Как видно из изложенного выше, вопросы релятивистской термодинамики Планк пытался разрешить в рамках Специальной теории относительности (СТО). Оно, впрочем, и понятно, поскольку Общая теория относительности (ОТО) появилась на свет только в 1916 г.

Противоречия в релятивистской термодинамике начались уже в 1911 г., когда Лауэ предположил, что в зависимости от обстоятельств температура изучаемого объекта может меняться при релятивистских

*E-mail: ev-veitsman@mail.ru

условиях не одним единственным образом [2]. Как следствие подобного утверждения, появился ряд работ (например, [3–11]), авторы которых стали теоретически исследовать в рамках СТО вопросы релятивистской термодинамики, рассматривая преобразования температуры, а также и других термодинамических параметров, не в соответствии с приведенными выше зависимостями (1)–(5). Тут, в первую очередь, следует отметить работы [3–5, 7, 10].

Согласно Отту [3],

$$T = T_0/\sqrt{1-\beta^2} \tag{11}$$

и, следовательно,

$$Q = Q_0/\sqrt{1-\beta^2}\,. \tag{12}$$

Здесь (7) и (8) также образуют 4-вектор энергии-импульса, равный (9).

В свою очередь, авторы [4, 5, 7, 10] считают, что температура T не должна меняться при изменении скорости движения тела, т. е.

$$T = T_0. \tag{13}$$

Базаров [7], обосновывая данную точку зрения, приводит, в частности, следующий довод. Пусть имеется некий объект, движущийся со скоростью $v \to c$, пусть также имеется спиртовой термометр, измеряющий температуру исследуемого объекта. Если спиртовой столбик параллелен $\mathbf{v}$, то его длина в инерциальной системе координат, где он не находится в состоянии покоя, с точки зрения постороннего наблюдателя, будет равной

$$l = l_0(1-\beta^2)^{1/2}, \tag{14}$$

но если спиртовой столбик перпендикулярен к $\mathbf{v}$, то его длина в указанной выше системе координат и с точки зрения внешнего наблюдателя будет уже равной l_0. Но, по мнению Базарова, температура не может быть зависимой от ориентации скорости движения объекта и потому $T = T_0$.

Используя (13), авторы работы [4] вводят в рассмотрение 4-вектор $\mathcal{I}$ с компонентами

$$\mathcal{I} = \left\{\frac{U+pV}{c}, g_x, g_y, g_z\right\}, \tag{15}$$

где g_x, g_y, g_z — проекции $\mathbf{G}$ на оси координат x, y, z. Для движущегося объекта

$$H = c|\mathcal{I}| = \sqrt{(U+pV)^2 - c^2g^2} = H_0, \tag{16}$$

где H и H_0 — энтальпия, $g^2 = |\mathbf{G}|^2$.

В конечном итоге Каллен и Хорвитц получают для δQ и δQ_0

$$\delta Q = \delta Q_0/\sqrt{1-\beta^2} \quad \text{при} \quad T = T_0. \tag{17}$$

Выражение (17) приводит при рассматриваемых условиях к абсурду. Действительно, если $S = S_0$, $T = T_0$, $\delta Q = T\delta S$, $\delta Q_0 = T_0\delta S_0$, то $\delta Q = \delta Q_0$, $Q = Q_0$. Очевидно, энтальпия должна зависеть от температуры T. Что же касается доводов Базарова, то он смешивает температуру как термодинамический параметр с методами ее измерения. При $v \to c$ мы должны использовать две шкалы для измерения температуры (например, с помощью спиртового термометра). Одна шкала должна быть откалибрована, когда $\mathbf{v}$ и спиртовой столбик параллельны друг другу, другую же шкалу следует калибровать для случая, когда скорость и столбик взаимно перпендикулярны. Впрочем, мы и вообще можем иметь только одну шкалу, так как, если ориентация измеряющего прибора изменится в пространстве ($v \to c$), то длина шкалы и соответственно расстояния между ее делениями должны измениться соответствующим образом. Здесь лишь остается добавить, что, с нашей точки зрения, авторы [5, 10] допускают ту же самую ошибку, путая температуру как термодинамический параметр с методами ее измерения. Более того, Ландсберг [9] считает, что температура движущегося тела при релятивистских условиях вообще лишена какого-либо физического смысла, поскольку не может быть измерена. Создается впечатление, что авторы, обосновывающие равенство $T = T_0$, движутся по пути наименьшего сопротивления, ибо постоянство температуры и теплоты при изменении скорости движения изучаемого объекта существенно облегчает рассмотрение проблем, связанных с релятивистской термодинамикой. В работе [10] это в принципе и не скрывается

Как мы видим, в рамках СТО имеют место существенные противоречия в области релятивистской термодинамики. Их нисколько не меньше и в рамках ОТО, в которой, в частности, изучаются термодинамические процессы в так называемой непрерывной системе (термин Хаазе [12]), в которой каждой точке пространства соответствует свой набор интенсивных параметров и их производных (полевой вариант термодинамики). В этой связи отметим работы [13–23]. Часть из них, например [13, 18, 23], посвящена изучению именно релятивистской термодинамике «в полевом варианте», другая часть, например [14–16, 19, 20], касается разного рода объектов, изучаемых в космологии (релятивистский газ, излучения и т. д.). Статьи [17, 22] рассматривают ковариантную релятивистскую термодинамику этих объектов, т. е. фактически изучение идет в рамках термодинамики необратимых процессов непрерывных систем.

Указанные выше работы [13–23] часто противоречат одна другой, особенно при рассмотрении такого термодинамического параметра как температура. В ряде работ (например, [13, 14, 17, 19, 21]) температура рассматривается в качестве скаляра, независимого от скорости движения тела. В работе [20] температура фигурирует уже в качестве 4-вектора. В работе же [22] температура рассматривается в качестве скаляра, зависимого от скорости движения изучаемого объекта. Такая же неоднозначность имеет место в отношении энтропии.

Есть также мнение, что релятивистская термодинамика имеет право на существование лишь в «полевом варианте», поскольку пространственная часть пространства-времени (дискретная система) при релятивистских скоростях не может быть «независимо наблюдаемой», а потому ее «ковариантная термодинамика» принципиально невозможна. По этому поводу можно привести много возражений, главное же из них состоит в следующем. Пока что нет никаких оснований полагать, что изучаемая часть пространства-времени, будучи совершенно однородной при обычных условиях, перестает быть таковой при условиях релятивистских и потому термодинамические уравнения состояний в ней не применимы.

С нашей точки зрения, основным недостатком работ, изучающих проблемы релятивистской термодинамики в рамках СТО, т. е. работ [2–11], является игнорирование в них такого важного термодинамического параметра, как поверхностное натяжение, и, конечно же, феноменологического коэффициента в уравнении скорости химической реакции, включающего в себя температуру в явном виде. Коэффициент этот обратно пропорционален RT.

В работах [24, 25] Вейцман предпринял попытку устранить имеющийся пробел. В [24] им было установлено, что поверхностное натяжение σ, подобно давлению p, не будет меняться при $v \to c$ и температура T, в свою очередь, будет меняться в соответствии с (11). Изучая же поверхностные химические реакции [25], протекающие при релятивистских условиях, он подтвердил, что энтальпия должна при этих условиях преобразовываться согласно Планку и Отту, т. е. согласно следующему закону: $H = H_0/\sqrt{1-\beta^2}$, а температура опять-таки должна меняться по (11).

Но тогда будет иметь место противоречие, а именно, если температура T меняется согласно (11),

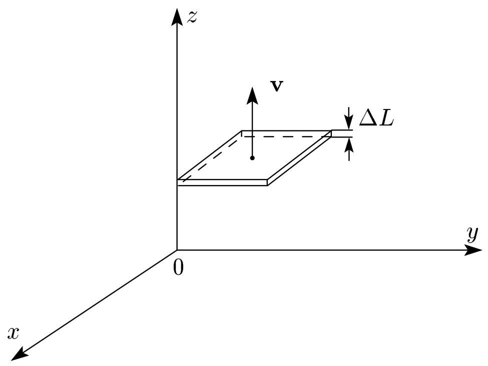

Рис. 1. Движущаяся плоская межфазовая область раздела, скорость **v** — перпендикулярна ей

то из первого уравнения состояния (10) получается, что

$$p_0 V_0 \sqrt{1-\beta^2} = R_0 T_0/\sqrt{1-\beta^2}, \tag{18}$$

но это выражение находится в явном противоречии со вторым уравнением (10). Если же T меняется согласно (13), то мы имеем при $v \to c$

$$p_0 V_0 = R_0 T_0/\sqrt{1-\beta^2} \tag{19}$$

и опять-таки приходим к абсурду.

Однако для идеальных газов, в свою очередь,

$$E = \frac{3}{2} NkT, \tag{20}$$

где E — энергия газа, k — константа Больцмана, N — число молекул (атомов) газа. Если мы берем T согласно (11) при $v \to c$, то из (20) вытекает, что

$$\frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{3}{2} Nk \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_0 = \frac{3}{2} NkT_0. \tag{21}$$

Теперь (11) уже не приводит к каким-либо противоречиям, но они возникают, если оперировать формулами (3) и (13).

Наконец, изучая поверхностное натяжение σ при $v \to c$, Вейцман использовал уравнение состояния для межфазовой области раздела [26], согласно которому (нулевая кривизна)

$$\Delta L = \frac{8\pi^2\sigma}{RT(\rho_1-\rho_2)\ln(\rho_1/\rho_2)}, \tag{22}$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотность вещества (моль/см^3) в конденсированной фазе (жидкой, твердой) и в фазе газовой, находящихся в контакте при данных температуре и давлении.

Пусть плоская межфазовая область раздела (МОР) движется при $v \to c$ и вектор скорости **v**

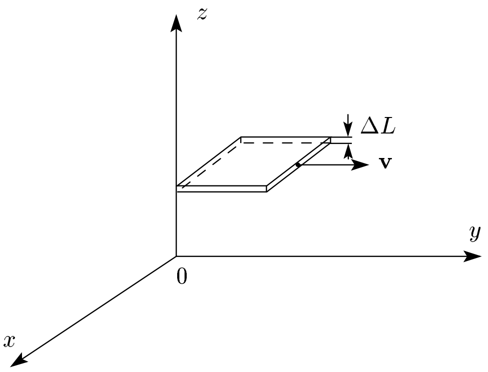

Рис. 2. Движущаяся плоская межфазовая область раздела, скорость **v** — параллельна ей

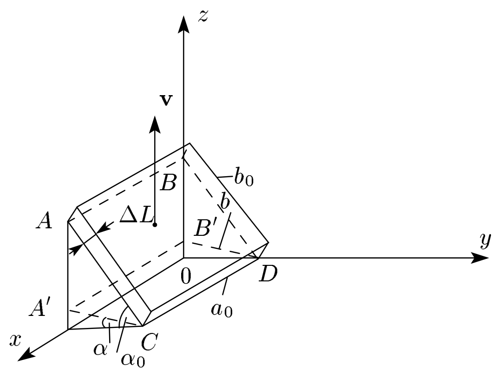

Рис. 3. Изучаемый объект, когда скорость **v** не параллельна, не перпендикулярна к плоской межфазовой области раздела. Плоская межфазовая область раздела $A'B'DC$, обозначенная штриховой линией, есть переходная область между соприкасающимися фазами, когда $v \to c$ ($\Delta L \to 0$); a_0 и b_0 — длина и ширина поверхности при $v = 0$; b — ширина этой же поверхности при $v \to c$

перпендикулярен к ней (см. рис. 1). Тогда будем иметь из (22) $\Delta L \to \infty$, если T изменяется согласно зависимости (3); с другой же стороны, $\Delta L \to A \neq 0$, если T меняется согласно зависимости (13), т. е. мы пришли к явному противоречию.

Если же T меняется согласно выражению (11), то $\Delta L = \Delta L_0(1-\beta^2)$ и $\Delta L \to 0$ при $v \to 0$, но выражение $\Delta L = \Delta L_0\sqrt{1-\beta^2}$ было бы значительно логичнее с точки зрения Специальной теории относительности.

Пусть теперь плоская МОР движется при $v \to c$ и вектор скорости **v** параллелен ей (см. рис. 2). Тогда будем иметь из (22) при условии, что T меняется по закону (11), $\Delta L = \Delta L_0\sqrt{1-\beta^2}$, но согласно той же СТО должно быть $\Delta L = \Delta L_0$. Принимая теперь во внимание все сказанное выше, ничего не остается, как сделать вывод, что приведенные выше термодинамические уравнения состояния являются частными случаями, справедливыми исключительно при $v \ll c$. Очевидно, должны существовать некие зависимости, справедливые, однако, при всех **v**. Поэтому главной задачей настоящей работы является нахождение этих зависимостей. Второй же задачей наших исследований является получение релятивистских выражений для тепло- и массопереноса, для переноса электронов (закон Ома) и для вязкого течения подвижных сред (переноса импульса). Получение последних (выражений) будет вестись в рамках СТО. Их нахождение, с нашей точки зрения, должно способствовать решению термодинамических проблем и в рамках ОТО, поскольку указанные выше уравнения переноса являются термодинамическими зависимостями, дающими описание физических процессов в «полевом варианте».

2. ПОЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СЛУЧАЕВ

Мы будем искать релятивистские термодинамические уравнения состояния для следующих случаев (чистое вещество):

1) идеальные и реальные газы;

2) плоская МОР, когда скорость **v** изучаемой системы перпендикулярна разделяющему фазы переходному слою (см. рис. 1);

3) плоская МОР, когда скорость **v** изучаемой системы параллельна разделяющему фазы переходному слою (см. рис. 2);

4) плоская МОР, когда скорость **v** изучаемой системы не параллельна и не перпендикулярна к переходному слою, указанному выше (см. рис. 3);

5) движущаяся сфера, становящаяся эллипсоидом вращения при $v \to c$ (см. рис. 4).

Случай 1). Уравнения состояния (10) не включают в себя релятивистской компоненты в своей левой части. Принимая эту составляющую во внимание, имеем

$$p_0V_0 + \int\limits_0^v \frac{p_0V_0 v\,dv}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} = NkT. \qquad (23)$$

Здесь требуется отметить, член $\int\limits_0^v \ldots dv$ в левой части (23) является релятивистской составляющей, а фигурирующая в ней константа p_0V_0/c^2 является по сути некой воображаемой массой покоя, т. е. m_0^*;

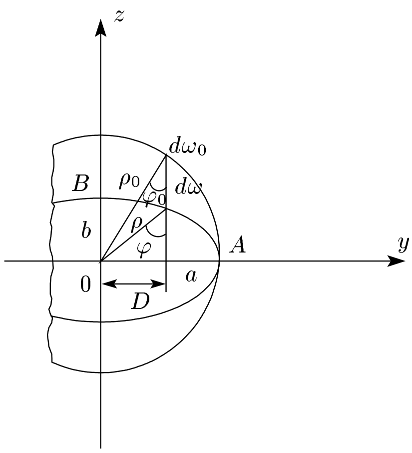

Рис. 4. Сечение фрагментов сферы и эллипсоида вращения в плоскости yz; a и b — полуоси эллипса, ρ_0, φ_0 — соответственно полярный радиус и полярный угол, к которым относится элемент поверхности $d\omega_0$ ($v = 0$, сфера), ρ, φ — соответственно полярный радиус и полярный угол, к которым относится элемент поверхности $d\omega$ ($v \to c$; эллипсоид вращения)

$m_0^*/\sqrt{1-\beta^2} = m^*$, и таким образом $\int\limits_0^v m^* v\,dv$ есть энергия изучаемой системы, когда скорость ее движения равна v (не путать с кинетической энергией системы, имеющей массу $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$); таким образом, левая часть выражения (23) есть работа образования газового объема V при $v \to c$. Температура T полностью этой работе соответствует, член же NkT представляет собой энергию газа $E = E_0/\sqrt{1-\beta^2}$, равную работе, затраченной на образование некоего объема величиною V при $v \to c$:

$$\int\limits_0^v \frac{v\,dv}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{1-\beta^2} - 1. \qquad (24)$$

Подставляя (24) в (23), получаем

$$p_0 V/(1-\beta^2) = NkT = p_0 V_0/\sqrt{1-\beta^2}\,. \qquad (25)$$

Формула (25) есть уравнение состояния для идеального газа при любой v, т. е. $0 \le v \le c$. При $v \ll c$ уравнение (25) переходит во второе уравнение (10), так как $V = V_0$, $T = T_0$.

Для реального газа результат аналогичен (с учетом, разумеется, его особенностей). Так для уравнения Ван дер Ваальса будем иметь

$$\left(p_0+\frac{a}{V_0^2}\right)(V_0-b)\left[1+\int\limits_0^v \frac{v\,dv}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\right] = NkT, \qquad (26)$$

$$\frac{(p_0 + a/V_0^2)(V_0-b)}{\sqrt{1-\beta^2}} = NkT. \qquad (27)$$

Случаи 2) и 3). Используя (22), будем иметь

$$\sigma\omega = \Delta LRT(\rho_1-\rho_2)\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{\omega}{8\pi^2}\,, \qquad (28)$$

где ω — площадь переходной зоны между конденсированной и газовой фазами (м^2).

Чтобы получить уравнение состояния для этих случаев, мы снова должны учесть релятивистскую компоненту при выводе искомой зависимости, тогда

$$\sigma\omega_0 + \sigma\omega_0 \int\limits_0^v \frac{v\,dv}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} = \\ = \Delta L(\rho_1-\rho_2)\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{RT}{8\pi^2}\,, \qquad (29)$$

при этом ω не будет зависеть от $\mathbf{v}$ при условии, что скорость перпендикулярна МОР (см. рис. 1).

Принимая во внимание соотношение (24), получим из уравнения (29) после несложных преобразований:

$$\frac{\sigma\omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Delta L\omega(\rho_1-\rho_2)\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{RT}{8\pi^2}\,. \qquad (30)$$

Выражение (30) представляет собой уравнение состояния для рассматриваемых случаев.

В свою очередь, имеем из (30)

$$\Delta L = \frac{8\pi^2\sigma\omega_0\sqrt{1-\beta^2}}{\omega(\rho_{10}-\rho_{20})\ln(\rho_{10}/\rho_{20})RT_0}\,. \qquad (31)$$

Как нетрудно убедиться, в случае 2) $\Delta L = \Delta L_0\sqrt{1-\beta^2}$ при $v \to c$, так как $\omega = \omega_0$; в случае же 3) $\Delta L = \Delta L_0 \ne 0$, так как $\omega = \omega_0\sqrt{1-\beta^2}$ при $v \to c$.

Случай 4). Как видно на рис. 3, вектор скорости $\mathbf{v}$ изучаемого объекта не параллелен и не перпендикулярен к МОР. В случае, когда $v = 0$ в лабораторной системе координат, угол между плоскостями $ABDC$ и xy равен α_0. Но когда скорость $\mathbf{v} \ne 0$, этот же угол станет равным α (см. рис. 3) с точки зрения внешнего наблюдателя, так как часть ширины b_0 изучаемого объекта будет изменяться. Ею будет та часть, которую можно представить в виде вертикального катета прямоугольного треугольника (например, $OB = BD\sin\alpha_0$). Тогда, как видно на рис. 3, площадь ω будет равной

$$\omega = a_0 b = a_0 b_0\sqrt{\cos^2\alpha_0 + (1-\beta^2)\sin^2\alpha_0} = \\ = \omega_0\sqrt{1-\beta^2\sin^2\alpha_0}, \qquad (32)$$

и для изучаемого случая, подставляя (32) в (30), получаем

$$\sigma = \sigma_0 = RT_0 \ln\left(\frac{\rho_{10}}{\rho_{20}}\right) \Delta L \frac{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\alpha_0}}{8\pi^2\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (33)$$

$$\Delta L = 8\pi^2\sigma_0\sqrt{1-\beta^2} \times \times \left\{ RT_0(\rho_{10}-\rho_{20}) \ln\left(\frac{\rho_{10}}{\rho_{20}}\right) \sqrt{1-\beta^2\sin^2\alpha_0} \right\}^{-1} = = \Delta L_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\alpha_0}}. \quad (34)$$

Как можно видеть, если $v = 0$, то $\Delta L = \Delta L_0$ и $\Delta L \to 0$ при $v \to c$, так как $\alpha \to 0$. Но если $\alpha_0 = \pi/2$, то $\Delta L = \Delta L_0$ при $v \to c$, т. е. фактически мы имеем случай 1).

Уравнение (34) есть релятивистское уравнение состояния для данного случая.

Случай 5). Толщина МОР для сферы согласно [26] равна

$$\Delta L = \frac{8\pi^2\sigma}{RT(\rho_1-\rho_2)\ln[\rho_1/\rho_2(1+2\sigma/r_0p_{ext})]}, \quad (35)$$

где r_0 — радиус пузырька или капли, p_{ext} — внешнее давление, т. е. давление в среде, окружающей изучаемый объект.

Тогда, используя (35) и заменив в формуле ω_0 и ω на $d\omega_0$ и $d\omega$, для эллипсоида вращения получим

$$\sigma\, d\omega_0 + \int_0^v \frac{\sigma\, d\omega_0 v\, dv}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} = \Delta L RT(\rho_1-\rho_2) \times \times \ln\left[\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(1+\frac{2\sigma_0}{\rho_b p_{ext}}\right)^{-1}\right]\frac{d\omega}{8\pi^2} = = \Delta L RT_0(\rho_{10}-\rho_{20}) \ln\left[\frac{\rho_{10}}{\rho_{20}}\left(1+\frac{2\sigma_0 b}{a^2 p_{ext}}\right)^{-1}\right] \times \times \frac{d\omega}{8\pi^2(1-\beta^2)}, \quad (36)$$

где $\rho_b = a^2/b$ — радиус кривизны эллипса в точке B (см. рис. 4), который представляет собой сечение эллипсоида вращения в плоскости yz; a и b являются полуосями этого эллипса; $d\omega_0$ и $d\omega$ — элементы площади поверхности соответственно сферы и эллипсоида вращения, представленные в сферической системе координат; $b = a\sqrt{1-\beta^2} = \rho_0\sqrt{1-\beta^2}$:

$$d\omega_0 = \rho_0^2 \sin\varphi_0 d\varphi_0 d\psi_0, \quad (37)$$

где ρ_0, φ_0 и ψ_0 — сферические координаты, когда $v = 0$.

При $v \to c$ элемент площади $d\omega$ будет равен (см. Приложение)

$$d\omega = d\omega_0\sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2\cos^2\varphi_0}}, \quad (38)$$

тогда из формулы (36), принимая во внимание (24), (37) и (38), получим

$$\sigma = \sigma_0 = \Delta L RT_0(\rho_{10}-\rho_{20}) \times \times \ln\left[\frac{\rho_{10}}{\rho_{20}}\left(1+\frac{2\sigma\sqrt{1-\beta^2}}{\rho_0 p_{ext}}\right)^{-1}\right] \times \times \left\{8\pi^2\sqrt{1-\beta^2\cos^2\varphi_0}\right\}^{-1}, \quad (39)$$

$$\Delta L = 8\pi^2\sigma\sqrt{1-\beta^2\cos^2\varphi_0}\left\{RT_0(\rho_{10}-\rho_{20}) \times \times \ln\left[\frac{\rho_{10}}{\rho_{20}}\left(1+\frac{2\sigma\sqrt{1-\beta^2}}{\rho_0 p_{ext}}\right)^{-1}\right]\right\}^{-1}. \quad (40)$$

Если $v = 0$, то $\Delta L = \Delta L_0$ $(a = b = r_0 = \rho_0)$; если $v \neq 0$, то имеем $\varphi_0 = 0$, $\Delta L = \Delta L_B$, $\varphi_0 = \pi/2$, $\Delta L = \Delta L_A$; наконец, если $v \to c$, но $\sigma \neq \sigma(\rho,\varphi)$, т. е. σ не меняет своего значения на поверхности эллипсоида, то $\Delta L = 8\pi^2\sigma\sin\varphi_0/RT_0(\rho_{10}-\rho_{20})\ln(\rho_{10}/\rho_{20})$. Если $\sigma = \sigma(\rho,\varphi)$ при $v \to c$, то имеются точки на поверхности эллипсоида, например, точка A (см. рис. 4), где один из двух главных радиусов кривизны $\rho_{(1)} \to 0$, в силу чего соотношения (39) и (40) в таких точках не являются справедливыми (см. разд. 3).

3. ДИСКУССИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ УСЛОВИЯХ

Как мы могли видеть, если T меняется согласно (11) при $v \to c$, то все приведенные выше противоречия в релятивистской термодинамике (во всяком случае в рамках СТО) устраняются. Справедливости ради тут следует отметить, что исследованиям были подвергнуты исключительно фундаментальные термодинамические уравнения состояния, т. е. термодинамические зависимости, качественно и по крайней мере полуколичественно (например, уравнение Ван дер Ваальса) описывающие соответствующие физические и физико-химические процессы. Уравнения состояния (25), (27), (30), (33), (39), а также зависимость (21) переходят в хорошо нам известные уравнения состояния, полученные при $v \ll c$. Если же температура менялась бы согласно (3) или (11), то мы бы получили, например, из (25):

$$p_0 = p = \frac{NkT}{V}(1-\beta^2), \tag{41}$$

и если $T = T_0$, то $p = p_0 = NkT\sqrt{1-\beta^2}$, т. е. давление становится зависимым от v, но тогда не может быть $p = p_0$; если же $T = T_0\sqrt{1-\beta^2}$, то $p = p_0 = NkT(1-\beta^2)$, и мы также приходим к абсурдной ситуации. Когда же $T = T_0/\sqrt{1-\beta^2}$, то $p = p_0$ при $v \ll c$.

Если, в свою очередь, мы будем оперировать зависимостью (30), то после несложных преобразований имеем

$$\sigma = \sigma_0 = \Delta L \frac{\omega}{\omega_0}(\rho_1 - \rho_2) RT \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{8\pi^2}. \tag{42}$$

Тогда при скорости $\mathbf{v}$, перпендикулярной к плоской межфазовой области раздела, т. е. когда $\Delta L = \Delta L_0\sqrt{1-\beta^2}$, $\omega = \omega_0$ и при $v \to c$,

$$T = T_0: \quad \sigma \sim \sqrt{1-\beta^2},$$

$$T = T_0\sqrt{1-\beta^2}: \quad \sigma \sim (1-\beta^2),$$

$$T = T_0/\sqrt{1-\beta^2}: \quad \sigma = \sigma_0.$$

Как видно выше, формула (20) будет корректной при $v \to c$ исключительно при изменении температуры T по Отту, т. е. по (11). Аналогичные результаты будут иметь место для других случаев, разобранных выше.

Таким образом (25), (27), (30), (33), (39) находятся в полном согласии со СТО и с зависимостью (11).

Однако помимо фундаментальных термодинамических уравнений состояния имеется множество и других термодинамических соотношений, описывающих связь термодинамических параметров между собою. Соотношения эти в основном эмпирические или же полуэмпирические. Часто они содержат разного рода коэффициенты, для которых установить закон преобразования при $v \to c$ крайне затруднительно. С нашей точки зрения, при исследованиях изменения температуры в релятивистских условиях ориентироваться необходимо исключительно на хорошо проверенные временем теоретические зависимости, во всяком случае, при рассмотрении разного рода процессов и явлений в инерциальной системе координат. В этой связи считаем необходимым проанализировать еще два уравнения, хорошо известные в термодинамике. Первым из упомянутых выше уравнений является так называемое полное уравнение Ван дер Ваальса, описывающее состояние газа в широком интервале плотностей. Уравнение имеет следующий вид [27]:

$$p = \frac{NkT}{V(1-Nb/V)} - \frac{N^2 a}{V^2}.$$

При больших плотностях коэффициенты a и b перестают быть константами, становятся зависимыми от температуры и не имеют уже точного смысла. Теоретический закон их преобразований не известен. Потому, естественно, нельзя получить и закон преобразования для всего уравнения.

Значительно интересней уравнение состояния, получаемое из первого начала термодинамики и используемое, в частности, в ОТО — в правой части уравнения Фридмана [28]. При $v \ll c$ и при условии, что энтропия постоянна, уравнение это будет иметь вид

$$dE = -p\,dV.$$

Учитывая в нем релятивистскую компоненту, получим

$$E = \frac{p_0 V_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

последнее соотношение в рамках СТО справедливо для всех скоростей v, начиная от 0 и кончая скоростью света в вакууме.

4. ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА ПРИ $v \to c$

Процессы переноса в рамках релятивистской термодинамики освещены весьма скудно, причем работы, которые касаются этой проблемы, относятся исключительно к области ОТО. В этой связи следует отметить статьи [13, 17, 18]. В работе [13] получена зависимость для теплопереноса, отличающаяся от аналогичной нерелятивистской зависимости только наличием в формуле метрического тензора $g^{\mu\alpha}$. В работе [17] на базе 1- и 2-го начал термодинамики получены релятивистские зависимости для переноса тепла, импульса и электрического заряда. В [18] отмечаются недостатки полученных в [17] уравнений: фактически мгновенное распространение тепловых и вязких эффектов. Отметим, что все уравнения переноса, фигурирующие в [13, 17], справедливы только при $v \ll c$.

Мы же будем искать уравнения переноса исключительно в рамках СТО, отталкиваясь от аналогичных уравнений, известных при $v \ll c$. Полученные результаты могут считаться верными, если правые и левые части вновь полученных формул будут одинаково преобразовываться при $v \to c$.

4.1. Массоперенос

Пусть имеется система, содержащая вещество двух сортов (растворитель и примесь), которая движется с релятивистской скоростью (см. рис. 5).

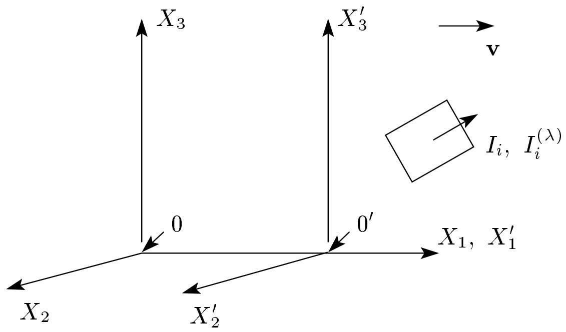

Рис. 5. X_1, X_2, X_3 и X'_1, X'_2, X'_3 — соответственно лабораторная система координат и система координат, движущаяся со скоростью $\mathbf{v}$; I_i и $I_i^{(\lambda)}$ — потоки массы и тепла через единицу площади

Пусть далее имеется градиент примеси внутри изучаемого объекта, и, стало быть, имеет место диффузия одного вещества в другом. Тогда коэффициент диффузии должен быть тензором, поскольку изучаемая система анизотропна. В этом случае имеем следующее выражение для диффузии примеси:

$$I_i = -D_{ij}\frac{\partial\rho}{\partial x_j} \approx -D_{ij}\lim\frac{\Delta\rho}{\Delta x_j}, \quad \Delta x_j \to a; \qquad D_{ij}=0, \quad \text{если} \quad i\neq j; \quad i,j=1,2,3, \tag{43}$$

где I_i — количество примеси, проходящей в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярной массопотоку (моль/см$^2\cdot$с); D_{ij} — коэффициент диффузии, он является тензором, именно, $D_{11}\neq D_{22}=D_{33}$; ρ — плотность примеси (моль/см^3) в точке x_j; здесь и ниже a некая величина (масштаб), при которой гладкая зависимость $\rho=\rho(x_j)$ нарушается; Δx — также некий линейный масштаб.

Коэффициент диффузии D (см^2/с) равен, как известно

$$D=\Delta^2/2t, \tag{44}$$

где Δ — величина средне-квадратичного смещения микрочастицы (молекулы, атома) за время t ее пробега от столкновения до столкновения. Тогда

$$I_1 = I_{01}\sqrt{1-\beta^2}, \quad I_2=I_{02}, \quad I_2=I_{03}, \tag{45a}$$

$$D_{11}=D_{011}\left(1-\beta^2\right)^{3/2}, \qquad D_{22}=D_{33}=D_{022(033)}\sqrt{1-\beta^2}, \tag{45b}$$

$$\rho=\rho_0/\sqrt{1-\beta^2}, \tag{45c}$$

$$\Delta x_1=\Delta x_{01}\sqrt{1-\beta^2}, \qquad \Delta x_2=\Delta x_{02}, \quad \Delta x_3=\Delta x_{03}, \tag{45d}$$

и левая, и правая части (43) будут преобразовываться при $v\to c$ идентично; тут следует также заметить, что $\Delta_{11}=\Delta_{011}\sqrt{1-\beta^2}$, $\Delta_{22}=\Delta_{022}$, $\Delta_{33}=\Delta_{033}$ (см. (44)).

Если в выражении (43) плотность массы ρ заменить на плотность электрического заряда q, то мы фактически получим закон Ома при релятивистских условиях, т. е. закон переноса электрического заряда, электронов, например. Действительно, в этом случае в левой части зависимости будем иметь плотность тока, а в ее правой части коэффициент, характеризующий перенос электронов, помноженный (коэффициент) на градиент плотности электрического заряда. Здесь лишь остается добавить, что электрический заряд остается неизменным при $v\to c$.

4.2. Теплоперенос

Уравнение для теплопереноса в случае стационарного состояния в простейшем случае имеет следующий вид:

$$I_i^{(\lambda)} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}, \tag{46}$$

где $I_i^{(\lambda)}$ (Дж/см$^2\cdot$с) — количество тепла, проходящее в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярной к вектору теплового потока; λ — коэффициент теплопроводности; T — температура.

В дальнейшем, однако, будем использовать равенство, подобное по структуре своей выражению (43), т. е.

$$I_i^{(\lambda)} = -D_{ij}^{(\lambda)}\frac{\partial q}{\partial x_j}, \tag{47}$$

где q — плотность количества теплоты в точке x_j (Дж/см^3); $D_{ij}^{(\lambda)}$ — вводимый нами коэффициент так называемой «тепловой диффузии» (см^2/с); $D_{ij}^{(\lambda)}\neq 0$, если $i\neq j$.

Выражение (46) может быть получено из (47); действительно:

$$C_v=\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V=\left[\frac{\partial(Q/V)}{\partial(T/V)}\right]_V=\left[\frac{\partial q}{\partial(T/V)}\right]_V, \tag{48}$$

где Q — теплота, C_v — теплоемкость (Дж/град) при постоянном объеме V

$$\left(\frac{C_v}{V}\right)=c_v=\left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_V, \tag{49}$$

если мы считаем, что величина c_v неизменна по всему объему. Тогда

$$dq_v=c_v dT, \tag{50}$$

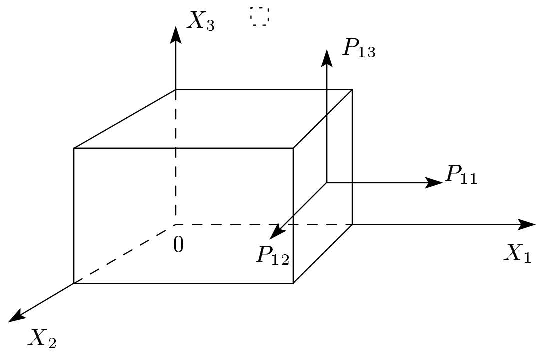

Рис. 6. Компоненты P_{11}, P_{12}, P_{13} тензора P_{ij} согласно теории упругости

$$D_{ij}^{(\lambda)} c_v = \lambda_{ij}. \tag{51}$$

В конечном итоге имеем

$$I_1^{(\lambda)} = I_{01}^{(\lambda)}, \quad I_2^{(\lambda)} = \frac{I_{02}^{(\lambda)}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad I_3^{(\lambda)} = \frac{I_{03}^{(\lambda)}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{52a}$$

$$D_{11}^{(\lambda)} = D_{011}^{(\lambda)} (1-\beta^2)^{3/2}, \quad D_{22}^{(\lambda)} = D_{33}^{(\lambda)} = D_{022}^{(\lambda)}\sqrt{1-\beta^2} = D_{033}^{(\lambda)}\sqrt{1-\beta^2}, \tag{52b}$$

$$q = \frac{q_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{52c}$$

подставив (52a), (52b) в (47), можно видеть, учитывая (52c), что левая и правая части выражения (47) преобразуются при $v \to c$ идентично.

4.3. Вязкое течение

Существуют два выражения для вязкого течения жидкости или газа при условии, что перепады скоростей не слишком велики:

$$P_{ij} = P_{ji} = -\eta\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\operatorname{div}\mathbf{w}\right), \tag{53}$$

$$P = -\zeta \operatorname{div}\mathbf{w}, \tag{54}$$

где P_{ij} — тензор напряжений (Н/м^2; некоторые его компоненты представлены на рис. 6); η — коэффициент сдвиговой вязкости (Н·с/м^2), ζ — коэффициент объемной вязкости, $\mathbf{w}$ — скорость жидкости или газа; δ_{ij} — символ Кронекера, P — избыточное давление, т. е. давление, когда

$$i = j, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = \frac{\partial w_3}{\partial x_3}, \quad P_{ij} = P_{ji} = 0$$

(см. (53)).

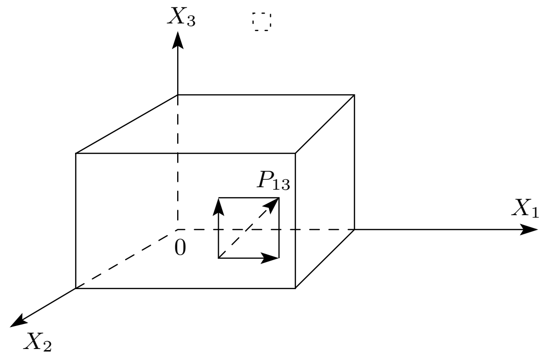

Рис. 7. Компонента P_{13} тензора P_{ij} согласно тензорному исчислению. Штрих-стрелка обозначает модуль данной тензорной компоненты

Далее, однако, мы не станем оперировать компонентами тензора, например, P_{13}, представленными на рис. 6, а используем тензорный объект, находящийся в полном соответствии с тензорным исчислением. В этом случае упомянутая выше компонента $P_{13} = -\eta\partial w_1/\partial x_3$ имеет следующее представление (см. рис. 7), т. е. P_{13} есть касательная составляющая тензора напряжений, относящаяся к боковой грани элемента объема, которая перпендикулярна к оси X_2. Компонента эта имеет две ориентации в пространстве и некую величину (модуль), равный векторной сумме двух векторов, входящих в состав P_{13} (см. рис. 7).

Далее мы можем записать для $P_{ij} = P_{ji}$, когда $i \neq j$:

$$P_{ij} = P_{ji} = \frac{P_{ij} + P_{ji}}{2} = -\eta\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right). \tag{55}$$

Если $\partial w_1/\partial x_1 = \partial w_2/\partial x_2 = \partial w_3/\partial x_3$ и $i \neq j$, то вместо (53) и (54) будем иметь только (54), так как при этих условиях $P_{ij} = 0$. Наконец, если $i = j$ и $\partial w_2/\partial x_2 = \partial w_3/\partial x_3$, то, суммируя (53) и (54), получим для P_{11},

$$P_{11} = -\left(\frac{4}{3}\eta_{11} + \zeta_{11}\right)\frac{\partial w_1}{\partial x_1}, \tag{56}$$

т. е. имеет место так называемая продольная вязкость.

Пусть изучаемая система движется со скоростью $v \to c$. Тогда величина η будет тензором, т. е. η_{ik}. Каким же образом левая и правая части (55) будут преобразовываться при релятивистских условиях?

В качестве примера рассмотрим случай P_{13} (см. рис. 7). Компонента P_{13} представляет собой удельный поток количества движения, проходящий через

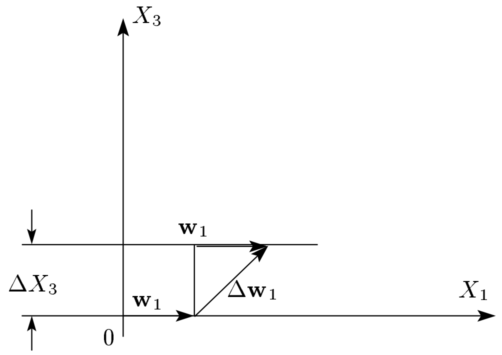

Рис. 8. Частное приращение вектора скорости $\mathbf{w}_1$ как функции x_3

боковую единичную грань ω элемента объема, которая перпендикулярна к координатной оси X_2. Поток этот движется в плоскости, включающей в себя эту единичную грань.

Модуль P_{13}

$$P_{13} \sim \frac{m}{t} w_{13} = \frac{m}{t} \left| \sqrt{w_1^2 + w_3^2} \right|, \tag{57}$$

при этом следует отметить, что единичная боковая грань ω при $v \to c$ будет пропорциональной $\sqrt{1-\beta^2}$, так как данная грань параллельна вектору скорости $\mathbf{v}$, т. е. скорости изучаемого объекта; величина w_{13} — проекция вектора $\mathbf{w}$ на плоскость X_1X_3.

Согласно СТО (см., например, [27]),

$$w_1 = \frac{w_1' + v}{1 + vw_1'/c^2}, \tag{58}$$

$$w_3 = \frac{w_3'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + vw_1'/c^2}, \tag{59}$$

где w_1' и w_3' — проекции скорости $\mathbf{w}'$ вязкого потока в координатой системе изучаемого объекта, т. е. $\mathbf{w}' = \mathbf{w}_0$.

Чтобы левая и правая части (55) преобразовывались идентично при релятивистских условиях, мы должны представить эту зависимость следующим образом:

$$P_{ij} = P_{ji} = -\eta_{i\beta}\frac{\partial w_\beta}{\partial x_j} - \eta_{j\beta}\frac{\partial w_\beta}{\partial x_i}, \tag{60}$$

здесь η (кг/см·с) уже тензор, и $\eta_{i\beta} = 0$, если $i \neq \beta$ и $P_{ij} = P_{ji}$. Тогда, например, η_{11} будет трансформироваться при релятивистских условиях следующим образом:

$$\eta_{11} = \eta_{011}/\sqrt{1-\beta^2}\,. \tag{61}$$

Частное приращение $\Delta w_1 = \ldots \Delta x_3$ будет иметь вид, представленный на рис. 8, т. е. подобно величине w_{13} оно имеет две проекции на оси X_1 и X_3 и, соответственно, эти проекции должны меняться при указанных выше условиях согласно (58) и (59). Так как $x_3 = x_{03}$, левая и правая части зависимости (60), в свою очередь, будут одинаково трансформироваться при $v \to c$. Переходя затем к пределам, получаем $dw_1 = \ldots dx_3$.

Когда $v \ll c$ и $i \neq j$, тогда $\eta_{ij} = \eta$, и мы приходим к (57). Кроме того, подобно P_{13}, $\eta_{11}\partial w_1/\partial x_3$ будет лежать в плоскости X_3X_1.

Теперь установим, как (54) будет трансформироваться при $v \to c$. Прежде всего необходимо заметить, что коэффициент объемной вязкости ζ при данных условиях будет уже тензором подобно коэффициенту вязкости η сдвиговой. Далее, как и при рассмотрении трансформации теплопереноса при релятивистских условиях, рассматриваем величину $D_{ij}^{(\zeta)} = \xi_{ij}/\rho$, где ρ — плотность вещества (кг/см^3). Тогда, если скорость w вязкого потока мала (см. выше), имеем для (54) при $v \to c$

$$P = D_{\alpha\beta}^{(\zeta)}\frac{\partial \rho\, w_\alpha}{\partial x_\beta} = D_{\alpha\beta}^{(\zeta)}\rho\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\beta} + D_{\alpha\beta}^{(\zeta)}w_\alpha\frac{\partial \rho}{\partial x_\beta} \approx$$
$$\approx D_{\alpha\beta}^{(\zeta)}\rho\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad D_{\alpha\beta}^{(\zeta)} = 0, \quad \alpha \neq \beta. \tag{62}$$

Поскольку

$$w_2 = \frac{w_2'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + vw_1'/c^2}, \tag{63}$$

как нетрудно видеть, каждый член в правой части (62) не зависит от v, так как

$$D_{11}^{(\zeta)} = D_{011}^{(\zeta)}(1-\beta^2)^{3/2}, \tag{64a}$$

$$D_{22}^{(\zeta)} = D_{022}^{(\zeta)}\sqrt{1-\beta^2}, \tag{64b}$$

$$D_{33}^{(\zeta)} = D_{033}^{(\zeta)}\sqrt{1-\beta^2}, \tag{64c}$$

$$\rho = \rho_0/(1-\beta^2), \quad \Delta x_1 = \Delta x_{01}\sqrt{1-\beta^2}. \tag{65}$$

Тогда P (избыточное давление) подобно обычному давлению p не будет зависеть от скорости $v \to c$, если среда несжимаема. Если же $v \ll c$, то $D_{11}^{(\zeta)} = D_{22}^{(\zeta)} = D_{33}^{(\zeta)}$ и мы приходим к (54).

Наконец, как будет трансформироваться (56) при $v \to c$, когда $\partial w_2/\partial x_2 = \partial w_3/\partial x_3 = 0$? Величина $P_{11} \sim mw_1'/t$, поэтому P_{11} не зависит от $\mathbf{v}$, так как боковая грань элементарного объема, к которому эта грань относится, перпендикулярна оси X_1 (см. рис. 7) и $\omega = \omega_0$ в силу $v \to c$. Тогда правая часть (56) не должна меняться при релятивистских условиях, она и не меняется. В самом деле, если w_1' мала, то можно записать

$$P_{11} = -D_{11}^{(\eta\zeta)}\frac{\partial \rho\, w_1}{\partial x_1}, \tag{66}$$

где

$$\mathbf{D}_{11}^{(\eta\zeta)} = \left(\frac{4}{3}\eta_{11} + \zeta_{11}\right)/\rho,$$

$$\mathbf{D}_{11}^{(\eta\zeta)} = \mathbf{D}_{011}^{(\eta\zeta)}(1-\beta^2)^{3/2}, \qquad (67a)$$

$$\rho = \rho_0/(1-\beta^2), \qquad (67b)$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_{01}\sqrt{1-\beta^2}, \qquad (67c)$$

w_1 будет меняться соответственно (58), но если $w_1' \ll c$, то $1 + vw_1'/c^2 \approx 1$ и $\partial w_1 = \partial w_1'$, поскольку скорость v является тут величиною постоянной (изучаемая система — инерциальная). Тогда правая часть (66) не зависит от v/c, потому что два ребра элемента объема также не зависят от v/c, имея ориентации в направлении осей X_2 и X_3.

Таким образом, термодинамические уравнения состояния и законы переноса (массы, тепла, потока импульса, электрического заряда) при релятивистских условиях имеют иную структуру, чем те же зависимости при $v \ll c$. Первые переходят в последние, если скорости движения изучаемых объектов становятся много меньше скорости света в вакууме.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Получение выражения для $d\omega$ — элемента поверхности эллипсоида вращения

Следует найти выражение вида $d\omega = d\omega_0 F(\varphi_0)$, где φ_0 — угол, $\varphi = \varphi(v)$ (см. рис. 4). В сферической системе координат

$$d\omega = \rho^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi = -\rho^2 d\psi\, d\cos\varphi, \qquad (\text{П.1})$$

и для нашего случая $\psi \neq \psi(v)$, поэтому чтобы разрешить данную проблему, нужно найти отношение $d\cos\varphi/d\cos\varphi_0$, так как

$$\frac{d\omega}{d\omega_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \frac{d\cos\varphi}{d\cos\varphi_0}. \qquad (\text{П.2})$$

Как можно видеть на рис. 4,

$$D = \rho_0 \sin\varphi_0 = \rho\sin\varphi = \\ = \rho_0\sqrt{1-\beta^2\cos^2\varphi_0}\,\sin\varphi_0, \qquad (\text{П.3})$$

$$\sin\varphi = \sin\varphi_0/\sqrt{1-\beta^2\cos^2\varphi_0}, \quad \beta = v/c, \qquad (\text{П.4})$$

$$\cos\varphi = \left(\frac{\cos^2\varphi_0(1-\beta^2)}{1-\beta^2\cos^2\varphi_0}\right)^{3/2}, \qquad (\text{П.5})$$

$$\frac{d\cos\varphi}{d\cos\varphi_0} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta^2\cos^2\varphi_0)^{3/2}}, \qquad (\text{П.6})$$

и мы получаем приведенное выше выражение (38), принимая во внимание, что $\rho^2 = \rho_0^2(1-\cos^2\varphi_0)$ (см. рис. 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Planck, Ann. Phys. **26**, 1 (1909).
2. M. von Laue, Die Relativitäts Theorie, Braunschweig (1961, die 7-te Ausgabe; 1911, die erste Ausgabe), s. 138, 177, 178.
3. X. Ott, Zs. Phys. **175**, 70 (1963).
4. H. Callen and G. Horwitz, J. Phys. **39**, 938 (1971).
5. R. Hakim and A. Mangeney, Lett. al Nuovo Cimento **1S1**, 429 (1969).
6. V. N. Streltsov, **JINR-D2-91-367** (1992).
7. И. П. Базаров, *Термодинамика*, Высшая школа, Москва (1983), гл. 8.
8. G. Cavalleri and G. Salgarelli, Nuovo Cimento **A62**, 733 (1969).
9. P. T. Landsberg, Essays in Physics **2** (1970).
10. D. Eimerl, Ann. Phys. **91**, 481 (1975).
11. Meng Quan-shui and Chang Lin, J. Xi'an Univ. Sci. and Technol., **24**, 516 (2004).
12. Р. Хаазе, *Термодинамика необратимых процессов*, Мир, Москва (1967), гл. 4.
13. S. Garsia-Colin and A. Sandoval-Villalbazo. J. Nonequil. Therm. **31**, 11 (2006).
14. G. M. Kremer and F. P. Devecchi, Phys. Rev. D **65**, 983515 (2002).
15. P. Ilg and H. C. Ottinger, Phys. Rev. D **61**, 023510 (2000).
16. H. Blas, B. M. Pimentel, and J. L. Tomazelli, Phys. Rev. E **60**, 6164 (1999).
17. C. Eckart, Phys. Rev. **58**, 919 (1940).
18. W. Israel, Ann. Phys. **100**, 310 (1976).
19. R. Maartens and J. Triginer, Phys. Rev. D **56**, 4640 (1997).
20. V. N. Hamity, Phys. Rev. **187**, 1745 (1969).
21. R. Hagedom and K. Redlich, Z. Phys. C **27**, 541 (1985).
22. J. E. Krizan, Phys. Lett. A **71**, 174 (1979).
23. W. Israel and J. M. Stewart, Ann. Phys. **118**, 341 (1979).
24. E. V. Veitsman, Colloid Interface Sci. **265**, 174 (2003).
25. E. V. Veitsman, ibid, **275**, 555 (2004).
26. E. V. Veitsman, ibid, **214**, 207 (1999).
27. В. Г. Левич, *Курс теоретической физики*, т. 1, Физматгиз, Москва (1962), ч. 2.
28. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. II, *Теория поля*, Наука, Москва (1973), с. 458.