ЖЭТФ, 2007, том 132, вып. 5 (11), стр. 1127–1137

ТЕОРИЯ «РЕЗОНАНСНЫХ» МАГНИТООПТИЧЕСКИХ СТРУКТУР ДЛЯ СИНХРОТРОНОВ С КОМПЛЕКСНОЙ КРИТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Ю. В. Сеничев [a*], ***А. Н. Чеченин*** [b]

[a] *Institute of Nuclear Physics, FZJ, D-52428, Juelich D-52425, Juelich, Germany,*

Институт ядерных исследований Российской академии наук 117312, Москва, Россия

[b] *Санкт-Петербургский государственный университет 199034, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 24 июля 2007 г.

В ускорителях-синхротронах критическая энергия $W_{tr} = m_0c^2(\gamma_{tr} - 1)$ имеет принципиальное значение, поскольку определяет предельно возможные ускоряемые токи. С этой точки зрения коэффициент расширения орбиты $\alpha = 1/\gamma_{tr}^2$ желательно иметь как можно меньшим или даже отрицательным, что означает комплексность критической энергии и, как следствие, исключение прохождения частиц при ускорении через критическую энергию. В связи с этим развита теория «резонансных» магнитооптических структур с комплексной критической энергией, основанных на корреляционном принципе одновременной суперпериодической модуляции функций кривизны орбиты и градиентов линз.

PACS: 29.20.Lq, 29.27.-a, 29.27.Bd, 45.20.Jj

1. ВВЕДЕНИЕ

В синхротронах с жесткой фокусировкой существует критическая энергия $\gamma = \gamma_{tr}$ (здесь и далее мы будем использовать понятие приведенной энергии $\gamma = W/m_0c^2 + 1$), при которой производная периода T обращения частицы на орбите по импульсу p становится равной нулю,

$$\frac{dT}{T} = \left(\frac{1}{\gamma_{tr}^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{dp}{p}.$$

Величины $\alpha = 1/\gamma_{tr}^2$ и $\eta = \alpha - 1/\gamma^2$ известны в ускорительной физике соответственно как коэффициент расширения орбиты и фактор скольжения. В зарубежной литературе критическую энергию и коэффициент расширения орбиты называют соответственно энергией перехода (transition energy) и импульсным компакт-фактором (momentum compaction factor). Поскольку частота продольных колебаний пропорциональна корню квадратному из фактора скольжения [1], при прохождении через критическую энергию продольная частота становится равной нулю, что означает потерю устойчивости продольного движения. В ускорительной физике прохождение через критическую энергию выделяется в разряд наиболее важных проблем, а коэффициент расширения орбиты — наиболее важный параметр магнитооптической структуры синхротрона.

В связи с этим было развито множество методов прохождения через критическую энергию с минимальными значениями потерь частиц. Однако в высокоинтенсивных ускорителях из-за строгого ограничения по потерям прохождение через критическую энергию должно быть абсолютно исключено. Более того, поскольку из теории коллективных неустойчивостей следует тот факт, что предел по микроволновой неустойчивости, определяемый критерием Кейла–Шнелля, пропорционален фактору скольжения η, а требуемый минимальный разброс некогерентных частот $\delta\omega/\omega$ по продольному движе-

*E-mail: y.senichev@fz-juelich.de

нию в соответствии с теорией Ландау [2] имеет вид

$$\left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right)^2 = \eta^2\left(\frac{\delta p}{p}\right)^2 \geq \frac{eI_{peak}|\eta|}{2\pi m_0 c^2\gamma\beta^2}\left|\frac{Z_{II}(n)}{n}\right|, \quad (1)$$

при импульсном разбросе $\delta p/p$ в пучке с током I_{peak} и продольном импедансе $|Z_{II}(n)/n|$ фактор скольжения $|\eta|$ должен быть как можно большим по абсолютной величине.

Одним из способов решения описанной выше проблемы является создание структуры с отрицательным коэффициентом расширения орбиты, где данное условие формулируется следующим образом:

$$\alpha = \frac{1}{C}\int^{C}\frac{D(s)}{\rho(s)}\,ds \leq 0. \quad (2)$$

Здесь C — длина равновесной замкнутой орбиты, s — продольная координата вдоль равновесной орбиты, $D(s)$ — горизонтальная дисперсионная функция и $\rho(s)$ — радиус кривизны равновесной орбиты. В этом случае критическая энергия принимает комплексное значение

$$\gamma_{tr} = -\frac{i}{\sqrt{|\alpha|}}$$

и очевидно, что прохождения через критическую энергию никогда нет. Фактор скольжения

$$|\eta| = |\alpha| + \frac{1}{\gamma^2}$$

принимает при этом максимально возможное значение по абсолютной величине.

Впервые идея магнитооптической структуры с отрицательным коэффициентом расширения орбиты была высказана в 1955 г. Владимирским и Тарасовым [3]. Они предложили использовать реверсные магниты с отрицательной кривизной $\rho(s) < 0$. Чуть позже в 1958 г. Курант и Снайдер математически описали идею отрицательного импульсного компакт-фактора [4]. Они решили дисперсионное уравнение с использованием специального формализма в переменных

$$d\theta = \frac{ds}{\nu\beta},$$

позволяющих провести усреднение по быстрым осцилляциям:

$$\begin{gathered}\alpha = \frac{\nu^3}{\overline{R}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k^2}{\nu^2 - k^2},\\ a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\beta^{3/2}}{\rho}\,e^{-ik\theta}d\theta.\end{gathered} \quad (3)$$

Здесь ν — бетатронная частота горизонтальных колебаний, β — горизонтальная бета-функция, $\overline{R}$ — средний радиус орбиты.

На основании выражений (3) Курант и Снайдер сформулировали следующее простое заключение: «Если значение бетатронной частоты ν слегка меньше какого-то целочисленного значения k и значение a_k достаточно большое, то определяющее влияние нулевого члена a_0 может быть сведено к нулю». Владимирский и Тарасов предложили сделать это посредством введения реверсных магнитов.

Однако в течение длительного времени эта идея об исключении прохождения через критическую энергию не была воспринята как метод. Позже, начиная с конца 80-х годов XX века, многие авторы пытались реализовать магнитооптическую структуру с комплексной энергией перехода. Так, например, в работе [5] был предложен «модульный» метод, в котором квадруполи, отстоящие друг от друга на 180°, специальным образом модулируют β-функцию для получения отрицательного коэффициента расширения орбиты. Этот же метод был использован научным коллективом из Лаборатории Ферми (США) для основного инжектора [6]. Идея, основанная на модуляции кривизны орбиты за счет введения пустых промежутков без поворотных магнитов при создании синхротрона «Saturne» (Франция), была развита в работе [7]. В ускорительном центре GSI («Gesellschaft für Schwerionenforschung», ФРГ) в синхротроне SIS-18 требуемая гармоника возбуждалась за счет введения групп квадрупольных линз [8]. На начальной стадии проектирования Каонной фабрики TRIUMF (Канада) было предложено использовать структуру с модуляцией дрейфовых промежутков [9]. Во всех этих методах использовалась либо модуляция β-функции посредством квадруполей, либо модуляция кривизны орбиты, что напрямую следует из выражения (3).

Однако наиболее успешным решением, нашедшим широкое применение во многих международных проектах, была магнитооптическая структура Московской каонной фабрики [10, 11]. Она основана на резонансно коррелируемых функциях модуляции кривизны орбиты и градиентов линз. В дальнейшем эта структура была адаптирована для Каонной фабрики TRIUMF [12, 13]. Позже она была признана, как лучшая структура для бустера ускорительного комплекса SSC (Superconducting Super Collider, США) [14], затем принята для Нейтринной фабрики в ЦЕРНе (Швейцария) [15] и, наконец, реализована в сооружаемом ускорительном комплексе J-PARC (Japan Proton Accelerator Research Center, Япония) [16, 17]. В настоящее время данная структура также принята для накопительного кольца высокой энергии антипротонов HESR (High Energy Storage Ring) в рамках международного проекта FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research, ФРГ) [18, 19].

Данная магнитооптическая структура имеет следующие отличительные особенности:

1) получение отрицательного коэффициента расширения орбиты посредством одновременной модуляции кривизны орбиты и градиентов линз;

2) вариация критической энергии в широком диапазоне от $\gamma_{tr} \approx \nu$ до $\gamma_{tr} \approx i\nu$ посредством только модуляции градиентов линз;

3) независимая настройка коэффициента расширения орбиты и бетатронных частот арок тремя семействами квадрупольных линз (два семейства фокусирующих и одно семейство дефокусирующих);

4) возможность получения нулевой дисперсии на прямых участках;

5) функциональное разделение магнитооптической структуры ускорителя на арки и прямые участки и независимая их настройка;

6) эффективная система коррекции хроматичности двумя семействами секступолей;

7) взаимная компенсация нелинейного воздействия хроматичных секступолей в первом порядке теории возмущения;

8) низкая чувствительность к мультипольным ошибкам в квадруполях и магнитах за счет специальной структуры арок.

В настоящей работе развита теория «резонансных» магнитооптических структур, позволяющая оптимально подойти к их построению.

2. ОБЩИЙ ВИД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СТРУКТУРЫ С ВВЕДЕННОЙ СУПЕРПЕРИОДИЧНОСТЬЮ

Авторы работ [5–9], основываясь на принципе Куранта–Снайдера (см. уравнение (3)), пытаются использовать модуляцию смешанной функции $\beta^{3/2}/\rho$ для контроля над коэффициентом расширения орбиты. Это не вполне корректно, поскольку в действительности коэффициент расширения орбиты определяется двумя функциями: кривизной орбиты $\rho(s)$ и градиентом в линзах $G(s)$, а модуляция функции $\beta(s)$ представляет собой следствие модуляции градиентов в линзах. Более того, при всех процедурах, проводимых нами с упомянутыми выше функциями, мы должны стремиться минимально возмущать β-функцию, модуляция которой в конечном счете влияет на динамическую апертуру ускорителя. Поскольку, как будет показано ниже, коэффициент расширения орбиты по-разному зависит от модуляции градиентов и модуляции кривизны, эти функции должны быть рассмотрены независимо друг от друга.

В общем виде дисперсионное уравнение для магнитооптической структуры с периодической переменной фокусировкой имеет вид

$$\frac{d^2D}{ds^2} + [K(s) + \varepsilon k(s)]\,D = \frac{1}{\rho(s)}, \tag{4}$$

где градиенты $G(s)$ и кривизна орбиты $\rho(s)$ связаны друг с другом через функции

$$K(s) = \frac{eG(s)}{p}, \quad \varepsilon k(s) = \frac{e\Delta G(s)}{p},$$

$p = m_0\gamma v$ — импульс частицы. Вторая из этих функций представляет собой суперпериодическую модуляцию градиентов $\Delta G(s)$. Очевидно, что в периодической магнитооптической структуре функция $K(s)$ имеет периодичность фокусирующей ячейки L_c, а функция $k(s)$ имеет периодичность суперпериода $L_s = nL_c$ с кратностью $n = 1, 2, \ldots$ Другими словами, магнитооптический канал имеет двойную периодичность, определяемую функциями $K(s+L_c) = K(s)$ и $k(s+L_s) = k(s)$. Кривизна орбиты имеет одинарную периодичность, совпадающую с длиной суперпериода, $\rho(s+L_s) = \rho(s)$.

Перейдем к другой продольной координате

$$d\phi = \frac{2\pi}{L_s}\,ds,$$

измеряемой в радианах и изменяющейся на одном суперпериоде на величину 2π. Учитывая, что длина суперпериода может быть выражена через средний радиус орбиты $\overline{R}$ как

$$L_s = \frac{2\pi\overline{R}}{S},$$

где S — число суперпериодов, можно записать уравнение (4) в системе с новой продольной координатой

$$\frac{d^2D}{d\phi^2} + \left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2 [K(\phi) + \varepsilon k(\phi)]\,D = \left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2 \frac{1}{\rho(\phi)}, \tag{5}$$

$$d\phi = \frac{S}{\overline{R}}\,ds.$$

Уравнение (5) представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Чтобы его решить, мы должны сначала найти фундаментальную систему решений φ_1 и φ_2 соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2X}{d\phi^2} + \left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2 [K(\phi) + \varepsilon k(\phi)]\, X = 0, \qquad (6)$$

а затем, используя метод вариации постоянных [20], получить частное решение дисперсионного уравнения с учетом вариации градиентов и кривизны орбиты:

$$D(\phi) = \left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2 \left[\varphi_2 \int \frac{\varphi_1}{\rho W}\, d\phi - \varphi_1 \int \frac{\varphi_2}{\rho W}\, d\phi\right], \qquad (7)$$

где W — вронскиан фундаментальной системы решений однородного уравнения.

3. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СТРУКТУРЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ГРАДИЕНТОМ

Поскольку по физическому определению дисперсия — это частное решение неоднородного уравнения бетатронных колебаний с правой частью, пропорциональной разбросу по импульсам, т. е.

$$\propto \frac{1}{\rho}\,\frac{\Delta p}{p},$$

в уравнении (6) мы заменили переменную D на переменную X. Тем самым подчеркивается, что решение однородного уравнения представляет собой лишь промежуточное решение, не являющееся дисперсией.

В соответствии с теоремой Флоке фундаментальная система решений уравнения (6) при $\varepsilon \to 0$ представимо в следующем виде:

$$x_{1,2} = a_{1,2} f(\phi) e^{\pm i\psi(\phi)}, \qquad (8)$$

где $f(\phi)$ — модуль функции Флоке, имеющий периодичность, $f(\phi) = f(\phi + 2\pi)$, $\psi(\phi)$ — фаза функции Флоке, $a_{1,2}$ — произвольные постоянные. Следует заметить, что модуль функции Флоке совпадает с квадратным корнем из $\beta(\phi)$-функции.

Подставляя решение (8) в уравнение (6) и разделяя полученное выражение на реальную и мнимую части, получаем систему уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d^2 f}{d\phi^2} + \left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2 K(\phi) f - \frac{1}{f^3} = 0, \\ \frac{d\psi}{d\phi} = \frac{1}{f^2}. \end{gathered} \qquad (9)$$

Второе уравнение системы (9) легко интегрируется, и на произвольной длине $\phi = 2\pi j$, состоящей из $1, \ldots, j$ суперпериодов, решение имеет вид

$$\psi(2\pi j) = \int\limits_0^{2\pi j} \frac{d\xi}{f^2(\xi)} + \psi(0). \qquad (10)$$

В дальнейшем мы полагаем $\psi(0) = 0$, так как в рассматриваемом классе структур суперпериод имеет зеркальную симметрию относительно своей середины и отсчет координаты ϕ идет от этой точки. Поскольку функция $f(\phi)$ периодична с периодом 2π, интеграл (10) представим в виде суммы j интегралов на длине интегрирования 2π:

$$\begin{gathered} \psi(2\pi j) = j \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\xi}{f^2(\xi)} \\ \text{или} \\ \psi(\phi) = \phi \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\xi}{f^2(\xi)}. \end{gathered} \qquad (11)$$

Определим нормированную на 2π величину набега фазы μ на одном суперпериоде как среднее значение величины $1/f^2$:

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\xi}{f^2(\xi)}\,. \qquad (12)$$

Тогда фаза функции Флоке может быть представлена как

$$\psi(\phi) = \mu\phi. \qquad (13)$$

Кроме того, мы знаем, что функция Флоке может быть представлена как произведение среднего значения f_0 на функцию, описывающую осцилляцию в магнитооптическом канале с переменной фокусировкой:

$$f(\phi) = f_0 \left[1 + q(\phi)\right]. \qquad (14)$$

Функция $q(\phi)$, введенная Капчинским в работе [21], периодична с периодом ячейки, $q(\phi) = q(\phi + 2\pi/n)$, а ее среднее значение по периоду равно нулю:

$$\overline{q(\phi)} = \int\limits_0^{2\pi/n} q(\phi)\, d\phi = 0.$$

Функция

$$\frac{f}{f_0} = 1 + q(\phi)$$

представляет собой нормализованную функцию, описывающую осцилляции огибающей пучка в фокусирующем канале. Обозначим ее как

$$\hat{f} = \frac{f}{f_0}.$$

Принимая во внимание малость функции $q(\phi) \ll 1$ и ее периодичность и подставляя выражение (14) в (12), получим выражение, связывающее функцию Флоке с нормированным набегом фазы:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{f_0^2}, \\ f(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[1 + q(\phi)\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, зная функцию $K(\phi)$, мы можем получить решение уравнения (6) для случая $\varepsilon = 0$, где величины μ и f определены выражениями (9), (12) и (14).

Теперь рассмотрим случай, когда суперпериодичность вводится с помощью функции $\varepsilon k(\phi)$. Для определения фундаментальной системы решений уравнения (6) при $\varepsilon \neq 0$ в бипериодической структуре с учетом модуляции градиентов воспользуемся методом Боголюбова – Митропольского [22]. Поскольку обычно суперпериод имеет зеркальную симметрию, в разложении функции возмущения в ряд Фурье останутся только члены с косинусами:

$$\varepsilon k(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \cos k\phi, \tag{16}$$

где

$$g_k = \frac{1}{\overline{R}B} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta G \cos k\phi \, d\phi. \tag{17}$$

Здесь используется хорошо известное соотношение

$$\frac{e}{p} = \frac{1}{\overline{R}B},$$

где B — максимальная величина магнитного поля в поворотных магнитах.

Подставляя выражение (16) в уравнение (6) и перенося в правую часть член, отвечающий за возмущение, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{d\phi^2} + \left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2 K(\phi) X = \\ = -X \left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} g_k \cos k\phi. \end{aligned} \tag{18}$$

Правая часть уравнения (18) зависит от X и ϕ. Решение этого уравнения следует искать асимптотическим методом Боголюбова – Митропольского [22] в виде

$$X = a_1(\phi) f(\phi) \cos\psi + a_2(\phi) f(\phi) \sin\psi, \tag{19}$$

где коэффициенты a_1 и a_2 — функции продольной координаты ϕ, а фаза $\psi = \mu\phi$.

В отсутствие возмущения, когда $\varepsilon = 0$ и величины a_1 и a_2 не зависят от ϕ, производная $dX/d\phi$ может быть определена посредством простого дифференцирования (19):

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\phi} = a_1 \frac{df}{d\phi} \cos\psi + a_2 \frac{df}{d\phi} \sin\psi - \\ - a_1 f \frac{d\psi}{d\phi} \sin\psi + a_2 f \frac{d\psi}{d\phi} \cos\psi. \end{aligned} \tag{20}$$

В случае $\varepsilon \neq 0$ уравнения (19), (20) остаются в силе при условии, если величины a_1 и a_2 являются функциями ϕ. Поэтому мы будем рассматривать эти уравнения как замену переменных и примем величины $a_1(\phi)$ и $a_2(\phi)$ за новые функции переменной ϕ, найдя которые, мы сможем определить решение уравнения (18). Продифференцировав с учетом сказанного уравнение (19), получим

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\phi} = \frac{da_1}{d\phi} f \cos\psi + a_1 \frac{df}{d\phi} \cos\psi + \frac{da_2}{d\phi} f \sin\psi + \\ + a_2 \frac{df}{d\phi} \sin\psi - a_1 f \frac{d\psi}{d\phi} \sin\psi + a_2 f \frac{d\psi}{d\phi} \cos\psi. \end{aligned} \tag{21}$$

Теперь, приравнивая правую часть этого уравнения к правой части уравнения (20), получаем первое соотношение для определения $a_1(\phi)$ и $a_2(\phi)$:

$$\frac{da_1}{d\phi} f \cos\psi + \frac{da_2}{d\phi} f \sin\psi = 0. \tag{22}$$

Второе уравнение находим аналогичным образом. Продифференцируем уравнение (20) без учета зависимости a_1 и a_2 от ϕ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{d\phi^2} = a_1 \frac{d^2 f}{d\phi^2} \cos\psi - 2a_1 \frac{df}{d\phi} \frac{d\psi}{d\phi} \sin\psi + \\ + a_2 \frac{d^2 f}{d\phi^2} \sin\psi + 2a_2 \frac{df}{d\phi} \frac{d\psi}{d\phi} \cos\psi - \\ - a_1 f \left(\frac{d\psi}{d\phi}\right)^2 \cos\psi - a_2 f \left(\frac{d\psi}{d\phi}\right)^2 \sin\psi, \end{aligned} \tag{23}$$

а уравнение (21) продифференцируем с учетом зависимости a_1 и a_2 от ϕ:

$$\begin{aligned}\frac{d^2X}{d\phi^2} = \frac{da_1}{d\phi}\frac{df}{d\phi}\cos\psi + a_1\frac{d^2f}{d\phi^2}\cos\psi - \\ - a_1\frac{df}{d\phi}\frac{d\psi}{d\phi}\sin\psi + \frac{da_2}{d\phi}\frac{df}{d\phi}\sin\psi + \\ + a_2\frac{d^2f}{d\phi^2}\sin\psi + a_2\frac{df}{d\phi}\frac{d\psi}{d\phi}\cos\psi - \\ - \frac{da_1}{d\phi}f\frac{d\psi}{d\phi}\sin\psi - a_1\frac{df}{d\phi}\frac{d\psi}{d\phi}\sin\psi - \\ - a_1 f\left(\frac{d\psi}{d\phi}\right)^2\cos\psi + \frac{da_2}{d\phi}f\frac{d\psi}{d\phi}\cos\psi + \\ + a_2\frac{df}{d\phi}\frac{d\psi}{d\phi}\cos\psi - a_2 f\left(\frac{d\psi}{d\phi}\right)^2\sin\psi. \quad (24)\end{aligned}$$

После подстановки уравнений (23) и (24) в уравнение (18) и их сравнения получаем второе соотношение, необходимое для нахождения $a_1(\phi)$ и $a_2(\phi)$:

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{d\phi}\left[\frac{df}{d\phi}\cos\psi - f\frac{d\psi}{d\phi}\sin\psi\right] + \\ + \frac{da_2}{d\phi}\left[\frac{df}{d\phi}\sin\psi + f\frac{d\psi}{d\phi}\cos\psi\right] = \\ = -\varepsilon k(\phi)\left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2\left[a_1 f\cos\psi + a_2 f\sin\psi\right]. \quad (25)\end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем два уравнения (22) и (25), которые вместе со вторым уравнением системы (9) позволяют найти величины $a_1(\phi)$ и $a_2(\phi)$ в первом порядке асимптотической теории приближения Боголюбова–Митропольского:

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{d\phi} = f^2\left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2\sum_{k=0}^{\infty} g_k\cos k\phi \times \\ \times (a_{10}\cos\mu\phi + a_{20}\sin\mu\phi)\sin\mu\phi, \\ \frac{da_2}{d\phi} = -f^2\left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2\sum_{k=0}^{\infty} g_k\cos k\phi \times \\ \times (a_{10}\cos\mu\phi + a_{20}\sin\mu\phi)\cos\mu\phi,\end{aligned} \quad (26)$$

где a_{10}, a_{20} относятся к нулевому приближению решения (19). В системе уравнений (26) используется представление Фурье (16) функции возмущения $\varepsilon k(\phi)$.

Следует заметить, что поскольку рассматриваемое возмущение заведомо не будет находиться точно в резонансе (по крайней мере, такой случай должен быть исключен), первого приближения асимптотической теории должно быть вполне достаточно. После интегрирования системы (26) получаем

$$\begin{aligned}a_1 = a_{10} + \left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2\int_0^{\phi} f^2\sum_{k=0}^{\infty} g_k\cos kt \times \\ \times \sin\mu t(a_{10}\cos\mu t + a_{20}\sin\mu t)\,dt, \\ a_2 = a_{20} - \left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2\int_0^{\phi} f^2\sum_{k=0}^{\infty} g_k\cos kt \times \\ \times \cos\mu t(a_{10}\cos\mu t + a_{20}\sin\mu t)\,dt.\end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя решения (27) в исходное решение (19), получаем

$$\begin{aligned}X(\phi) = a_{10}f\Bigg[\cos\mu\phi + \cos\mu\phi\left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2 \times \\ \times\int_0^{\phi} f^2\sum_{k=1}^{\infty} g_k\cos kt\sin\mu t\cos\mu t\,dt - \\ - \sin\mu\phi\left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2\int_0^{\phi} f^2\sum_{k=1}^{\infty} g_k\cos kt\cos\mu t\cos\mu t\,dt\Bigg] + \\ + a_{20}f\Bigg[\sin\mu\phi - \sin\mu\phi\left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2 \times \\ \times\int_0^{\phi} f^2\sum_{k=1}^{\infty} g_k\cos kt\sin\mu t\cos\mu t\,dt + \cos\mu\phi\left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2 \times \\ \times\int_0^{\phi} f^2\sum_{k=1}^{\infty} g_k\cos kt\sin\mu t\sin\mu t\,dt\Bigg]. \quad (28)\end{aligned}$$

Поскольку функция Флоке f является быстроосциллирующей по сравнению с другими функциями, стоящими под интегралом (см. выражение (15)), она может быть вынесена за знак интеграла. Учитывая определение (12), а также то, что $\mu = \nu/S$, после несложных преобразований выражение в первых квадратных скобках в (28) можно привести к виду

$$\begin{aligned}\cos\mu\phi\left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2\int_0^{\phi} f^2\sum_{k=1}^{\infty} g_k\cos kt\sin\mu t\cos\mu t\,dt - \\ - \sin\mu\phi\left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2\int_0^{\phi} f^2\sum_{k=1}^{\infty} g_k\cos kt\cos\mu t\cos\mu t\,dt = \\ = -\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \times\end{aligned}$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left\{ \frac{\cos(\mu\phi + k\phi)}{1-(1+kS/\nu)^2} + \frac{\cos(\mu\phi - k\phi)}{1-(1-kS/\nu)^2} \right\} = \\ = -\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{\infty} g_k \frac{\cos(\mu\phi - k\phi)}{1-(1-kS/\nu)^2}. \quad (29)$$

То же самое может быть сделано и для вторых скобок в (28):

$$-\sin\mu\phi \left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2 \int_0^{\phi} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos kt \sin\mu t \cos\mu t\, dt + \\ + \cos\mu\phi \left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2 \int_0^{\phi} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos kt \sin\mu t \sin\mu t\, dt = \\ = -\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left\{ \frac{\sin(\mu\phi + k\phi)}{1-(1+kS/\nu)^2} + \frac{\sin(\mu\phi - k\phi)}{1-(1-kS/\nu)^2} \right\} = \\ = -\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{\infty} g_k \frac{\sin(\mu\phi - k\phi)}{1-(1-kS/\nu)^2}. \quad (30)$$

На последнем шаге преобразований в (29) и (30) мы перешли от суммирования по $k = 1$–∞ к суммированию по $k = -\infty$–∞, приняв во внимание, что $g_k = g_{-k}$.

Теперь окончательное выражение для решения уравнения (18) можно представить в компактном виде:

$$X(\phi) = a_{10}\varphi_1 + a_{20}\varphi_2, \quad (31)$$

где φ_1 и φ_2 — фундаментальная система решений уравнения (6) для бипериодической структуры с модуляцией градиентов:

$$\varphi_1 = f(\phi)\left[\cos\mu\phi - \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \times \right. \\ \left. \times \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{\infty} g_k \frac{\cos(\mu\phi - k\phi)}{1-(1-kS/\nu)^2}\right], \\ \varphi_2 = f(\phi)\left[\sin\mu\phi - \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \times \right. \\ \left. \times \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{\infty} g_k \frac{\sin(\mu\phi - k\phi)}{1-(1-kS/\nu)^2}\right]. \quad (32)$$

В дальнейшем мы везде будем иметь в виду, что суммирование ведется по всем значениям $k = -\infty$–∞, за исключением $k = 0$.

4. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ГРАДИЕНТОМ И КРИВИЗНОЙ ОРБИТЫ

Получив фундаментальную систему решений однородного уравнения (6), мы можем решить общее дисперсионное уравнение (5) с бипериодически изменяющимися градиентом $K(\phi)+\varepsilon k(\phi)$ и периодически изменяющейся кривизной орбиты $1/\rho(\phi)$. С учетом зеркальной симметрии суперпериода кривизна орбиты может быть представлена в виде ряда Фурье

$$\frac{1}{\rho(\phi)} = \frac{1}{\overline{R}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos n\phi\right), \quad (33)$$

где r_n — гармоники Фурье нормализованной на $\overline{R}$ функции кривизны орбиты:

$$r_n = \frac{\overline{R}}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} \frac{\cos n\phi}{\rho(\phi)}\, d\phi. \quad (34)$$

В соответствии с методом вариации постоянных [20], общее решение определяется выражением (7) с вронскианом

$$W = \varphi_1 \frac{d\varphi_2}{d\phi} - \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{d\phi} = \\ = f^2\left[\cos^2\psi \frac{d\psi}{d\phi} + \sin^2\psi \frac{d\psi}{d\phi}\right] = f^2 \frac{1}{f^2} = 1. \quad (35)$$

Подставляя выражения (32), (33) и (35) в (7), получаем следующее общее выражение для дисперсии:

$$D(\phi) = \left(\frac{\overline{R}}{S}\right)^2 \frac{1}{\overline{\overline{R}}}\left\{ f(\phi)\left[\sin\mu\phi - \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \times \right.\right. \\ \left. \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \frac{\sin(\mu-k)\phi}{1-(1-kS/\nu)^2}\right] \times \\ \times \int_0^{\phi} f(t)\left[\cos\mu t - \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \frac{\cos(\mu-k)t}{1-(1-kS/\nu)^2}\right] \times \\ \times \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos nt\right] dt - \\ - f(\phi)\left[\cos\mu\phi - \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \frac{\cos(\mu-k)\phi}{1-(1-kS/\nu)^2}\right] \times$$

$$\times \int_0^{\phi} f(t) \left[\sin \mu t - \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{R}}{\nu} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \frac{\sin(\mu-k)t}{1-(1-kS/\nu)^2} \right] \times \\ \times \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos nt \right] dt \Bigg\}. \quad (36)$$

Произведение двух сумм может быть заменено двойным суммированием:

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos k\phi \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos n\phi = \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=-\infty, \\ n\neq 0}}^{\infty} g_k r_n \cos(k-n)\phi. \quad (37)$$

В дальнейшем мы также везде будем иметь в виду, что суммирование ведется по всем значениям $n = -\infty$–∞, за исключением $n = 0$.

Используя то же самое свойство функции $f(\phi)$, что мы использовали при получении пары фундаментальных решений (32), а именно то, что период этой функции много меньше периода гармоник, входящих в подынтегральные выражения в формуле (36) и определяющих конечное решение, мы можем вынести эту функцию за пределы интеграла в виде ее средней величины $f_0^2 = 1/\mu$. После интегрирования выражения (36), используя свойство (37) и условие периодичности $D(\phi) = D(\phi + 2\pi)$, получаем выражение для периодической дисперсии:

$$D(\phi) = \frac{\overline{R}}{\nu^2} \hat{f} \left\{ \left[\sin \mu\phi - \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{R}}{\nu} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \frac{\sin(\mu-k)\phi}{1-(1-kS/\nu)^2} \right] \left[\sin \mu\phi - \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{R}}{\nu} \right)^2 \times \right.\right. \\ \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \frac{\sin(\mu-k)\phi}{(1-kS/\nu)[1-(1-kS/\nu)^2]} \right] + \left[\cos \mu\phi - \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{R}}{\nu} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \frac{\cos(\mu-k)\phi}{1-(1-kS/\nu)^2} \right] \times \\ \times \left[\cos \mu\phi - \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{R}}{\nu} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \frac{\cos(\mu-k)\phi}{(1-kS/\nu)[1-(1-kS/\nu)^2]} \right] + \\ + \left[\sin \mu\phi - \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{R}}{\nu} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \frac{\sin(\mu-k)\phi}{1-(1-kS/\nu)^2} \right] \left[\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \frac{\sin(\mu-n)\phi}{1-nS/\nu} - \frac{1}{4} \left(\frac{\overline{R}}{\nu} \right)^2 \times \right. \\ \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_k r_n \frac{\sin[\mu-(k-n)]\phi}{[1-(k-n)S/\nu][1-(1-kS/\nu)^2]} \right] + \left[\cos \mu\phi - \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{R}}{\nu} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \frac{\cos(\mu-k)\phi}{1-(1-kS/\nu)^2} \right] \times \\ \left. \times \left[\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \frac{\cos(\mu-n)\phi}{1-nS/\nu} - \frac{1}{4} \left(\frac{\overline{R}}{\nu} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_k r_n \frac{\cos[\mu-(k-n)]\phi}{[1-(k-n)S/\nu][1-(1-kS/\nu)^2]} \right] \right\}. \quad (38)$$

Очевидно, что для произведения трех сумм верно правило, аналогичное правилу (37). Выполнив преобразования в выражении (38), получаем

$$D(\phi) = \frac{\overline{R}}{\nu^2} \hat{f} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{R}}{\nu} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{g_k \cos k\phi}{(1-kS/\nu)[1-(1-kS/\nu)^2]} - \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{R}}{\nu} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{g_k \cos k\phi}{1-(1-kS/\nu)^2} + \right. \\ + \frac{1}{4} \left(\frac{\overline{R}}{\nu} \right)^4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{g_k g_n \cos(k-n)\phi}{(1-kS/\nu)[1-(1-kS/\nu)^2][1-(1-nS/\nu)^2]} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{r_n \cos n\phi}{1-nS/\nu} - \frac{1}{4} \left(\frac{\overline{R}}{\nu} \right)^2 \times \\ \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{g_k r_n \cos(k-n)\phi}{[1-(k-n)S/\nu][1-(1-kS/\nu)^2]} - \frac{1}{4} \left(\frac{\overline{R}}{\nu} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{g_k r_n \cos(k-n)\phi}{(1-kS/\nu)[1-(1-kS/\nu)^2]} + \\ \left. + \frac{1}{8} \left(\frac{\overline{R}}{\nu} \right)^4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{g_k r_n g_m \cos(k-n-m)\phi}{[1-(k-n)S/\nu][1-(1-kS/\nu)^2][1-(1-mS/\nu)^2]} \right\}. \quad (39)$$

Из этого выражения следует, что в случае отсутствия модуляции градиента ($g_k = 0$) и кривизны ($r_k = 0$) дисперсия определяется простым выражением

$$D(\phi) = \frac{\overline{R}}{\nu^2}\hat{f}(\phi),$$

совпадающим с известным выражением для обычной периодической структуры.

Максимальное значение дисперсии определяется следующими тремя членами:

$$\begin{aligned} D_{max} = \frac{\overline{R}}{\nu^2}\hat{f}\Bigg\{ & 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \times \\ & \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{g_k}{(1-kS/\nu)[1-(1-kS/\nu)^2]} - \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{g_k}{1-(1-kS/\nu)^2} + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{r_k}{1-kS/\nu} + O(g_k^i, r_k^j, i+j \ge 2)\Bigg\}. \end{aligned} \quad (40)$$

Таким образом, мы видим, что максимальное значение дисперсии зависит от множителя $1/(1-kS/\nu)$, т. е. от того, насколько отличается частота гармоники возмущения от горизонтальной бетатронной частоты.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ «РЕЗОНАНСНОЙ» СТРУКТУРЫ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Теперь нам известны функции $D(\phi)$ и $\rho(\phi)$, необходимые для вычисления коэффициента расширения орбиты α в структуре с модуляцией градиентов и кривизны орбиты. В соответствии с формулой (2), коэффициент расширения орбиты α определяется средним значением функции $D(\phi)/\rho(\phi)$. При этом дисперсия и кривизна орбиты могут быть представлены в общем виде через их средние значения $\overline{D}$ и $\overline{R}$ и функции, осциллирующие вокруг этих средних значений:

$$D(\phi) = \overline{D} + \tilde{D}(\phi), \quad \frac{1}{\rho(\phi)} = \frac{1}{\overline{R}}\left(1 + \tilde{r}(\phi)\right).$$

Тогда коэффициент расширения орбиты может быть записан в виде суммы:

$$\alpha = \frac{\overline{D}}{\overline{R}} + \frac{\overline{\tilde{D}(\phi)\tilde{r}(\phi)}}{\overline{R}}. \quad (41)$$

В обычной структуре без модуляции градиентов и кривизны орбиты осциллирующие компоненты равны нулю, $\tilde{D}(\phi) = 0$, $\tilde{r}(\phi) = 0$, и коэффициент расширения орбиты определяется первым слагаемым в выражении (41), а именно, $\alpha = \overline{D}/\overline{R}$. С другой стороны, средняя дисперсия в этом случае равна $\overline{D} = \overline{R}/\nu^2$ (см. уравнение (39)). Очевидно, что в таких структурах коэффициент расширения орбиты полностью определяется значением частоты бетатронных колебаний, $\alpha = 1/\nu^2$, и изменение его величины ограничено.

В структуре с модуляцией градиентов и кривизны ситуация существенно иная. Действительно, если модулировать обе функции (градиент и кривизну орбиты) с одинаковой частотой ($k = n$ в уравнении (39)), то при условии малости величины $1 - kS/\nu$ второе слагаемое в выражении (41) может дать значительный вклад в коэффициент расширения орбиты. Такую структуру, основанную на резонансном возмущении параметров магнитооптического канала, мы называем «резонансной». Наиболее близкая гармоника, оказывающая максимальное влияние на коэффициент расширения орбиты, называется фундаментальной. Эта гармоника имеет kS осцилляций на всей рассматриваемой магнитооптической структуре. В большинстве исследуемых нами случаев эта гармоника совпадает с количеством суперпериодов, т. е. $kS = S$.

Для реализации «резонансной» структуры должны быть выполнены следующие условия:

1) горизонтальная бетатронная частота должна быть меньше фундаментальной частоты модуляции параметров суперпериода, $\nu < kS$, но максимально возможно приближена к ней;

2) модуляция кривизны орбиты должна быть в противофазе по отношению к модуляции градиентов линз, $g_k r_k < 0$;

3) величины амплитуд каждой из фундаментальных гармоник должны быть максимально возможны.

При этом необходимо исключить точное равенство частот $\nu = kS$ и $\nu = kS/2$, когда дисперсия и β-функция растут неограниченно.

6. КОЭФФИЦИЕНТ РАСШИРЕНИЯ ОРБИТЫ В «РЕЗОНАНСНОЙ» СТРУКТУРЕ С СУПЕРПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ГРАДИЕНТОВ ЛИНЗ И КРИВИЗНЫ ОРБИТЫ

Предположим, что мы имеем возможность модулировать градиент в линзах и кривизну орбиты с произвольной частотой, кратной количеству суперпериодов S. В результате получим два дополнительных фактора, позволяющих влиять на коэффициент расширения орбиты.

Первый фактор — это среднее значение дисперсии

$$\overline{D} = \frac{\overline{R}}{\nu^2}\hat{f}\left\{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^4 \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{g_k^2}{(1-kS/\nu)[1-(1-kS/\nu)^2]^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{g_k r_k}{1-(1-kS/\nu)^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{g_k r_k}{(1-kS/\nu)[1-(1-kS/\nu)^2]} + O(g_k^i r_k^j,\ i+j \ge 3)\right\}. \quad (42)$$

Мы видим, что величину средней дисперсии в «резонансной» структуре можно варьировать в широких пределах от положительных до отрицательных значений, при этом степень ее зависимости от модуляции градиента g_k и кривизны r_k значительно определяется тем, насколько горизонтальная бетатронная частота ν близка к фундаментальной гармонике модуляции суперпериода kS. Следует заметить, что модуляция градиента оказывает существенное влияние на среднее значение дисперсии: при отсутствии модуляции градиента среднее значение дисперсии остается неизменным.

Второй фактор — это корреляция фаз резонансных гармоник возмущения градиентов и кривизны орбиты. Она может служить наиболее эффективным инструментом для контроля над коэффициентом расширения орбиты ускорителя. Рассмотрим сначала один суперпериод, где

$$\alpha_s = \frac{1}{2\pi\overline{R}} \int_0^{2\pi} D(\phi)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos n\phi\right) d\phi. \quad (43)$$

В так называемых круглых структурах, состоящих из S суперпериодов, коэффициент расширения орбиты полностью совпадает с его значением для одного суперпериода. В структурах же, состоящих из арок с совокупным числом суперпериодов S, разделенных прямыми участками длиной L_{str}, коэффициент расширения орбиты определяется выражением

$$\alpha = \alpha_s \frac{SL_s}{SL_s + L_{str}}.$$

Таким образом, зная коэффициент расширения орбиты для одного суперпериода, легко найти его значение для всего ускорителя. Подставляя выражение (39) в (43), интегрируя и оставляя в конечном выражении члены не выше второго порядка, получаем выражение для коэффициента расширения орбиты

$$\alpha_s = \frac{1}{\nu^2}\left\{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^4 \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{g_k^2}{(1-kS/\nu)[1-(1-kS/\nu)^2]^2} + \frac{1}{4}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r_k^2}{1-kS/\nu} - \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r_k g_k}{(1-kS/\nu)[1-(1-kS/\nu)^2]} - \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r_k g_k}{1-(1-kS/\nu)^2} + O(g_k^i r_k^j,\ i+j \ge 3)\right\}. \quad (44)$$

Таким образом, в «резонансной» магнитооптической структуре коэффициент расширения орбиты в основном определяется четырьмя суммами, входящими в выражение (44). Первая и вторая суммы отражают тот факт, что модуляции градиентов и кривизны орбиты могут контролировать коэффициент расширения орбиты независимо друг от друга. Третья и четвертая суммы соответствуют их совместному воздействию на коэффициент расширения орбиты. Первые три суммы имеют резонансный множитель $1/(1 - kS/\nu)$, усиливающий воздействие в случае, если частота модуляции близка к частоте горизонтальных бетатронных колебаний. Очевидно, что при резонансном воздействии четвертая сумма практически не вносит никакого вклада и может быть опущена. Следует отметить, что для усиления интегрального эффекта модуляции градиентов и кривизны орбиты должны быть возбуждены в противофазе $g_k r_k < 0$. Учитывая, что основной вклад дают только фундаментальные модуляционные гармоники, мы можем упростить выражение (44), представив его в виде

$$\alpha_s = \frac{1}{\nu^2}\left\{1 + \frac{1}{4(1-kS/\nu)} \times \left[\left(\frac{\overline{R}}{\nu}\right)^2 \frac{g_k}{1-(1-kS/\nu)^2} - r_k\right]^2\right\}. \quad (45)$$

Это выражение позволяет определить величину модуляции функций градиентов и кривизны орбиты магнитооптической структуры и их соотношение для получения требуемого коэффициента расширения орбиты.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье развита теория «резонансных» структур для ускорителей-синхротронов, позволяющая корректно сформулировать требования к разработке магнитооптической структуры без прохождения через критическую энергию и получить ее оптимальные параметры. Теория базируется на решении дисперсионного уравнения для структуры с введенной суперпериодичностью с помощью модуляции функций градиентов линз и кривизны орбиты. На основе этого решения получены математические выражения для дисперсии и коэффициента расширения орбиты при раздельной и совместной резонансно коррелируемой модуляции упомянутых выше функций. Из общих выражений получены простые формулы, позволяющие делать оценки для случая одной фундаментальной модуляционной гармоники. Данный класс структур уже нашел широкое применение в различных международных ускорительных центрах.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, *Теория циклических ускорителей*, Гос. изд-во физ.-мат. лит., Москва (1962).

2. J. L. Laclare, Preprint CERN 94-01 (1994), Vol. 1, p. 349.

3. В. В. Владимирский, Е. К. Тарасов, *Некоторые вопросы теории циклических ускорителей*, Изд-во АН СССР, Москва (1955).

4. E. Courant and H. Snyder, Ann. Phys. **3** (1958).

5. L. C. Teng, Particle Accelerator **4**, 81 (1972).

6. K. Ng, D. Trbojevic, and S. Lee, in *IEEE Proc. Particle Accelerator Conf.*, San Francisco, CA (1991), p. 159; http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/p91/pdf/pac1991_0159.pdf.

7. H. Bruck, in *Proc. IXth Int. Conf. High Energy Accelerator*, SLAC (1974), p. 615.

8. B. Franczak, K. Blasche, and K. Reich, IEEE Trans. Nucl. Sci. (1983), Vol. NS-30, p. 2308; http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/p83/pdf/pac1983_2120.pdf.

9. R. Gupta, J. Botman, and M. Craddock, IEEE Trans. Nucl. Sci. (1985), Vol. NS-32, p. 2308; http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/p85/pdf/pac1985_2308.pdf.

10. Yu. Senichev, in *Proc. XIth Meeting Int. Collab. on Advanced Neutron Sources*, KEK Tsukuba (1990); Yu. Senichev et al., IEEE Proc. Particle Accelerator Conf., San Francisco, CA (1991), p. 2823; http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/p91/pdf/pac1991_2823.pdf.

11. N. Golubeva, A. Iliev, and Yu. Senichev, Int. Seminar on Intermediate Energy Physics, Moscow (1989).

12. M. Craddock, in *IEEE Proc. Particle Accelerator Conf.*, San Francisco, CA (1991), p. 57; http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/p91/pdf/pac1991_0057.pdf.

13. U. Wienands, N. Golubeva, A. Iliev, Yu. Senichev, and R. Servranckx, in *Proc. XVth Int. Conf. on High Energy Accelerators*, Hamburg, Germany (1992), p. 1073.

14. E. Courant, A. Garen, and U. Wienands, in *IEEE Proc. Particle Accelerator Conf.*, San Francisco, CA (1991), p. 2829; http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/p91/pdf/pac1991_2829.pdf.

15. H. Schönauer, B. Autin, R. Cappi, J. Gareyte, R. Garoby, M. Giovannozzi, H. Haseroth, I. Hofmann, M. Martini, E. Metral, W. Pirkl, C. Prior, G. Rees, and Yu. Senichev, in *Proc. Europ. Particle Accelerator Conf.*, Vienna, Austria (2000), p. 966; http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/e00/papers/THP2A09.pdf.

16. Y. Mori, in *Proc. Int. Com. Future Accelerator*, Beam Dynamics Newsletter (1996), № 11, p. 12; http://icfa-usa.jlab.org/archive/newsletter/icfa_bd_nl_11.pdf.

17. Y. Ishi, S. Machida, Y. Mori, and S. Shibuya, in *Proc. Asia Particle Accelerator Conf.* (2002); http://hadron.kek.jp/jhf/apac98/5D002.pdf.

18. Yu. Senichev, in *Proc. 33rd Int. Com. Future Accelerator*, Bensheim, Germany (2004), p. 443.

19. Yu. Senichev et al., in *Proc. Europ. Particle Accelerator Conf.*, Lucerne, (2004), p. 653; http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/e04/papers/moplt047.pdf.

20. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, Москва (1976).

21. И. М. Капчинский, *Теория линейных резонансных ускорителей*, Энергоиздат, Москва (1982).

22. N. Bogolyubov and Yu. Mitropolsky, *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, Hindustan Publishing Corpn., Delhi (1961).