ЖЭТФ, 2007, том 132, вып. 2 (8), стр. 510–523

ГЕНЕРАЦИЯ МЕЛКОМАСШТАБНЫХ СТРУКТУР В РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

К. П. Зыбин**, В. А. Сирота, А. С. Ильин****, А. В. Гуревич***

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 января 2007 г.

Рассмотрено уравнение Навье – Стокса для несжимаемой жидкости в пределе бесконечно больших чисел Рейнольдса. Предполагается, что неустойчивость течения приводит к возникновению стационарных крупномасштабных пульсаций. Исследовано возбуждение и развитие мелкомасштабной турбулентности. Показано, что развившиеся мелкомасштабные пульсации обладают свойством перемежаемости. Наибольшее значение амплитуды флуктуаций завихренности достигается в вихревых нитях. На основе полученного решения вычислена парная корреляционная функция в пределе $r \to 0$. Показано, что она подчиняется закону Колмогорова $K(r) \propto r^{2/3}$.

PACS: 47.27.Jv

1. ВВЕДЕНИЕ

В турбулентном течении на фоне средней скорости потока возбуждаются случайные пульсации скорости. Последние могут быть представлены как наложение случайных движений разного масштаба. При этом основную роль играют крупномасштабные пульсации, масштаб которых L порядка характерных размеров течения (например, в трубе радиуса R масштаб $L \sim R/5$). Крупномасштабные флуктуации обладают наибольшими амплитудами.

Возбуждаются также и мелкомасштабные пульсации с масштабами $l \ll L$. Мелкомасштабные пульсации имеют значительно меньшие амплитуды скоростей, их можно рассматривать как мелкую структуру, накладывающуюся на основные крупномасштабные движения. В мелкомасштабных пульсациях заключена лишь малая часть всей кинетической энергии движения [1, 2].

Если вязкость жидкости ν достаточно мала, а число Рейнольдса R_u, соответственно, велико, то спектр мелкомасштабных пульсаций становится очень широким. Такую турбулентность называют развитой, а область масштабов $\lambda_0 \ll l \ll L$, где λ_0 — масштаб, на котором существенна вязкость, — инерционным интервалом. Развитие пульсаций разных масштабов определяется в инерционном интервале лишь нелинейными процессами, так как роль вязкости ν здесь несущественна. Поэтому оказывается возможным изучать инерционный интервал турбулентности в пределе $\nu \to 0$, $\lambda_0 \to 0$, $R_u \to \infty$ [3].

Поскольку в турбулентном течении скорость является случайной величиной, для ее описания можно использовать метод корреляционных функций. Многочисленные экспериментальные измерения парной корреляционной функции

$$K(r) = \left\langle [\mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r})]^2 \right\rangle,$$

описывающей связь между значениями скорости в двух близких точках области изотропной турбулентности $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r}$, привели к следующему универсальному результату:

$$K(r) = Cr^{2/3}. \tag{1}$$

Здесь r — модуль расстояния между точками. Расстояние ограничено условием $r \ll L$, т.е. результат измерений (1) относится только к инерционному интервалу пульсаций скорости. Естественно, что в силу изотропии турбулентных пульсаций наблюдаемая функция корреляций (1) зависит только от модуля расстояния между точками. Экспериментань-

*E-mail: zybin@lpi.ru
**E-mail: sirota@lpi.ru
***E-mail: asi@lpi.ru

но изучается и фурье-образ корреляционной функции (1), что дает зависимость

$$S(k) = C_f k^{-5/3}, \tag{2}$$

где k — волновой вектор. Спектр (2) называют законом «пяти третей». Предел $r \to 0$ соответствует $k \to \infty$. В развитой турбулентности закон «пяти третей» наблюдается в очень широком интервале волновых чисел — до трех–четырех порядков величины [2, 3].

Подчеркнем, что экспериментальные исследования корреляционной функции в мелкомасштабной области были инициированы предсказаниями теории.

Колмогоров в основополагающих работах 1941 г. [4] получил выражения (1), (2) для функции корреляции скоростей в однородной и изотропной турбулентности[1)]. Теория Колмогорова — феноменологическая. Она опирается на представление о равномерной диссипации энергии турбулентности. Стационарный поток энергии генерируется в крупномасштабных пульсациях и далее в виде равномерного каскада по масштабам протекает через весь инерционный интервал. Поток энергии при этом сохраняется. Диссипация происходит только вне инерционного интервала в самых маленьких «диссипативных» масштабах λ_0. На основе этих физических представлений с использованием соотношений подобия и размерности, а также общих свойств уравнений гидродинамики был найден вид функции корреляции.

Фундаментальный результат Колмогорова, подтвержденный данными эксперимента, вызвал огромное количество теоретических, математических, а в более позднее время и численных исследований, в которых представления теории турбулентности были чрезвычайно широко разработаны (см. монографии [2, 3, 6–9] и цитируемую в них литературу). В последние годы активно используются методы, предложенные в теории поля и физике твердого тела [10, 11], а также обобщенный статистический подход, основанный на суперстатистике Тсалиса [12, 13]. Однако вывести выражение для корреляционной функции путем решения уравнений Навье–Стокса без привлечения дополнительных соображений до сих пор не удалось (подробнее см. [3]).

Разрабатывается и другой подход, основанный на физических представлениях о решающей роли сингулярностей в мелкомасштабных структурах развитой турбулентности [3, 14]. Однако и здесь, несмотря на значительные усилия, пока не удалось путем последовательного решения уравнений Навье–Стокса не только найти корреляционную функцию, но и доказать существование сингулярных решений.

Таким образом, проблема обоснования фундаментального результата Колмогорова (1) на основе строгого решения уравнений гидродинамики до сих пор остается открытой (см. монографии [2, 3]).

В настоящей работе предложен новый подход к этой проблеме, позволивший на основе исследования решений гидродинамических уравнений в предположении эргодичности турбулентных движений выделить структурные особенности мелкомасштабной турбулентности и вычислить парную корреляционную функцию в пределе больших чисел Рейнольдса $R_u \to \infty$. Для этого мы выводим уравнение, описывающее совместную плотность вероятности завихренности

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$$

и ее производной по времени, и находим асимптотическое при больших временах решение. Это уравнение получено из уравнений гидродинамики в сопутствующей элементу жидкости системе отсчета.

Основу нашего подхода составляет представление о том, что турбулентный поток в реальных средах — атмосфере, каналах, реках, трубах и т. д. — ограничен и неоднороден в пространстве. Первое обстоятельство определяет граничное условие отсутствия возмущений на бесконечности. Второе служит причиной того, что крупномасштабные пульсации, в которых заключена основная энергия развитой турбулентности, не являются однородными и изотропными. Мы показываем, что именно асимметрия крупномасштабных пульсаций оказывает определяющее влияние на структуру мелкомасштабной турбулентности. Ее воздействие приводит к неограниченному росту моментов мелкомасштабной завихренности со временем. Это означает, что развитие во времени изначально гладких пульсаций скорости приводит к формированию в некоторых областях течения нитевидных вихревых структур, в центре которых завихренность стремится к бесконечности в пределе $t \to \infty$. Исходя из асимптотического решения для функции плотности вероятности завихренности, мы находим пространственное распределение завихренности в окрестности нитей. Именно эти области — вихревые нити — представляют основную особенность структуры мелкомасштабной турбулентности. Они вносят определяющий вклад в парную корреляционную функцию.

[1)] Закон (2), являющийся прямым следствием (1), в явном виде был получен в статьях Обухова [5].

Работа построена следующим образом.

Во втором разделе рассмотрены уравнения движения несжимаемой жидкости, проведено их разложение вблизи произвольной лагранжевой траектории жидкой частицы. Показано, что рост локальной завихренности определяется неизотропной частью крупномасштабных пульсаций давления.

В третьем разделе в предположении случайности крупномасштабных пульсаций давления получено уравнение для распределения плотности вероятности завихренности и ее производной по времени. Показано, что четные моменты завихренности экспоненциально нарастают со временем, причем высшие моменты растут быстрее низших, в чем проявляется перемежаемость гидродинамической турбулентности в малых масштабах.

В четвертом разделе получено асимптотическое решение для установившейся при больших временах функции совместной плотности вероятности для завихренности $\boldsymbol{\omega}$ и ее производной $\dot{\boldsymbol{\omega}}$.

В пятом разделе на основе полученных асимптотических решений исследованы возникающие в турбулентном движении пространственные структуры, которые дают основной вклад в асимптотику плотности вероятности. Показано, что именно вихревые нити определяют парную корреляционную функцию турбулентных пульсаций (1) при $r \to 0$.

В Заключении сформулированы основные результаты работы и проведено их обсуждение с физической точки зрения.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение Навье–Стокса для несжимаемой жидкости. Как известно, на масштабах, значительно больших «вязкого» масштаба λ_0, оно принимает вид уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость течения, p — давление, плотность ρ в дальнейшем выбрана единичной. Второе из этих уравнений выражает несжимаемость жидкости. Уравнения (3) можно использовать при описании процессов на масштабах инерционного интервала (подробное обоснование см. в работе [3]). Из уравнений (3) следует соотношение, связывающее давление и скорость течения:

$$-\Delta p = \nabla_i v_j \cdot \nabla_j v_i.$$

Целью нашей работы является исследование вопроса о возникновении сингулярных мелкомасштабных структур в гладком течении, скорость которого пульсирует достаточно произвольным образом. Для изучения локальных свойств такого потока, следуя работе [15], перейдем в систему координат, сопутствующую некоторому элементу объема жидкости с координатами $\boldsymbol{\xi}(t)$:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}(t), \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \dot{\boldsymbol{\xi}}, \quad \ddot{\boldsymbol{\xi}} = -\nabla p|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\xi}(t)}.$$

Точка означает дифференцирование по времени. При такой замене переменных уравнения (3) принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}'\cdot\nabla)\mathbf{v}' + \nabla P = 0,\\ \nabla P = \nabla p + \ddot{\boldsymbol{\xi}}, \quad \nabla\cdot\mathbf{v}' = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Поскольку выбрана сопутствующая система отсчета, в точке $\mathbf{r} = \boldsymbol{\xi}(t)$ выполняются соотношения

$$\nabla P(\mathbf{r}' = 0) = 0, \quad \mathbf{v}'(\mathbf{r}' = 0) = 0.$$

Разложим скорость $\mathbf{v}'$ и давление P в окрестности этой точки в ряд Тейлора и ограничимся первым главным членом:

$$v_i' = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}x_k + b_{ij}\right) r'^j, \tag{5}$$

$$P = \frac{1}{2}\rho_{ik} r'^i r'^k, \quad \rho_{ik} = \nabla_i\nabla_k P. \tag{6}$$

Здесь тензор $(\partial v_i'/\partial r'^j)|_{r'=0}$ разложен в сумму симметричного b_{ij} и антисимметричного $(1/2)\varepsilon_{ikj}x_k$ тензоров, причем $b_{ii} = 0$, поскольку $\nabla\mathbf{v}' = 0$; ρ_{ij} — симметричный тензор. Легко проверить, что вектор x_i, заданный антисимметричной частью $\partial v_i'/\partial r'^j$, есть завихренность ($\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\mathbf{v}$) потока в точке $\boldsymbol{\xi}$:

$$\omega_i|_{\mathbf{r}'=0} = x_i.$$

Отметим, что такое разложение гладких пульсаций всегда возможно. Как мы увидим в дальнейшем, в любой конечный момент времени пульсации останутся гладкими (несмотря на то, что $\nu = 0$), и лишь в пределе $t \to \infty$ в течении возникнут линии, вдоль которых $\omega \to \infty$. Наличие вязких членов в уравнении Навье–Стокса, естественно, обрежет эту сингулярность на вязком масштабе.

Подставляя выражения (5),(6) в первое уравнение (4), получим

$$\left[\left(\dot{b}_{ij} + \frac{1}{4}(x_i x_j - x^2)\delta_{ij} + b_{ik}b_{kj} + \rho_{ij}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ikj}\dot{x}_k - \varepsilon_{jkn}x_k b_{in} + \varepsilon_{ikn}x_k b_{jn}\right)\right] r'^j = 0.$$

Первый член в квадратных скобках — симметричный, а второй — антисимметричный. Поскольку уравнение должно выполняться для любого $\mathbf{r}'$, оба слагаемых равны нулю независимо. Действительно, умножая выражение в скобках на ε_{ijn} и учитывая соотношение $b_{ii} = 0$, получим уравнения для x_i и b_{ij}

$$\dot{b}_{ij} + \frac{1}{4}(x_i x_j - x^2 \delta_{ij}) + b_{ik} b_{kj} + \rho_{ij} = 0, \qquad (7)$$

$$\dot{x}_n = b_{nk} x_k. \qquad (8)$$

Дифференцируя уравнение (8) по времени, окончательно получим систему уравнений для трех компонент x_i:

$$\ddot{x}_n = -\rho_{nk} x_k. \qquad (9)$$

Выясним теперь физический смысл симметричной части скорости b_{ik}, а именно, выразим ее через пространственное распределение завихренности $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$. В реальном течении изотропия может нарушаться либо локально — за счет мелкомасштабных пульсаций давления в окрестности рассматриваемой точки, либо глобально — вблизи границ системы, на масштабах порядка L. Мы покажем, что величина b_{ij} определяется именно глобальным нарушением изотропии. Поскольку $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, существует векторный потенциал $\mathbf{A}$, такой что

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Тогда

$$\Delta \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}. \qquad (10)$$

Для аккуратного выделения сингулярности при $r = 0$ разложим $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ по сферическим гармоникам:

$$\mathbf{A} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \mathbf{A}_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \boldsymbol{\omega}_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Найдем решение уравнения Пуассона (10):

$$\mathbf{A}_{lm}(r) = \frac{r^{-l-1}}{2l+1} \int_0^r \boldsymbol{\omega}_{lm}(r_1) r_1^{l+2} dr_1 + \frac{r^l}{2l+1} \int_r^{\infty} \boldsymbol{\omega}_{lm}(r_1) r_1^{1-l} dr_1. \qquad (11)$$

Пределы интегрирования выбраны так, чтобы обеспечить сходимость интеграла при $r \to 0$ и $r \to \infty$. Тем самым мы удовлетворяем общему условию отсутствия возмущений на бесконечности. Отметим, что для аналитической функции

$$\boldsymbol{\omega}_{lm}(r) \propto r^l \quad \text{при} \quad r \to 0.$$

Для вычисления b_{ij} нам нужен предел при $r \to 0$ тензора

$$\nabla_k v_i = \varepsilon_{ijn} \nabla_k \nabla_j A_n.$$

Вклад в него дает только квадратичная по координатам r_i составляющая $\mathbf{A}$, которая выражается через нулевую и вторую сферические гармоники $\mathbf{A}_{00}$ и $\mathbf{A}_{2m}$.

Нулевая гармоника $\mathbf{A}_{00}$ определяет локальный вклад, соответствующий антисимметричной части тензора скорости:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}_{00}\big|_{r=0} = -\,\Delta \mathbf{A}_{00}\big|_{r=0}.$$

Однако в симметричном тензоре b_{ij} ее квадратичная составляющая $\mathbf{A}_{00} \propto r^2$ сокращается — это и дает $b_{ij} = 0$ в изотропном течении. Остается только вторая гармоника $\mathbf{A}_{2m}$. Поскольку

$$\boldsymbol{\omega}_{2m}(r) \propto r^2 \quad \text{при} \quad r \to 0,$$

первый интеграл в выражении (11) при $r \to 0$ ведет себя как r^4, а второй — как r^2. Следовательно, вклад «локального» слагаемого пренебрежимо мал и симметричная часть тензора скорости b_{ij} определяется «глобальными» крупномасштабными свойствами течения в целом[2)].

Заметим, что все сказанное справедливо для гладких функций $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$. По мере формирования вихревой нити и стремления ω к бесконечности вклад «локального» слагаемого будет возрастать, так что $b_{ij} \to \infty$ одновременно с ω. Однако, как показано в Приложении 1, в полученных нами вихревых нитях этот тензор остается ортогональным вектору x_k, так что $b_{ik} x_k = 0$. Таким образом, в силу уравнения (8), «локальная» составляющая b_{ij} не оказывает влияния на динамику течения на протяжении всей его эволюции.

Возвращаясь в декартовы координаты и проводя дифференцирование, получим

$$b_{ij} = \varepsilon_{jnk} \int \frac{\omega_n(\mathbf{r}')}{r'^3} \left(\delta_{ik} - 3 \frac{r'_i r'_k}{r'^2} \right) d\mathbf{r}' + (i \leftrightarrow j)\,.$$

[2)] Отметим, что в двумерном течении такое разделение на локальную и крупномасштабную составляющие невозможно. Цилиндрическая нулевая гармоника $\mathbf{A}_0$ расходится логарифмически, и в результате «локальная» составляющая всегда оказывает влияние на крупномасштабную.

В соответствии со сказанным выше, подынтегральное выражение не имеет особенности при $r = 0$, а основной вклад в сам интеграл возникает на масштабах порядка L, где нарушается изотропия.

Аналогичное рассуждение показывает, что и пульсации давления ρ_{ik} (см. (7)) представимы как сумма локальных и крупномасштабных пульсаций, причем тензор локальных пульсаций есть $x_i x_k - \delta_{ik} x^2$. Этот тензор, как следует из выражения (9), не воздействует на локальную завихренность течения. Следовательно, локальная динамика завихренности, описываемая уравнением (9), задается только тензором крупномасштабных пульсаций давления ρ_{nk}.

Таким образом, мы получили первое важное свойство турбулентного потока: изменение локальной завихренности однородного и изотропного течения в окрестности линии тока определено неизотропной частью крупномасштабных пульсаций давления.

3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Поскольку нас интересуют статистические свойства течения, перейдем к вероятностному описанию. Завихренность $\boldsymbol{\omega}(t)$ в начале координат выбранной сопутствующей системы отсчета будем при этом считать случайной величиной, ее изменение по-прежнему задается уравнением (9). Вместо уравнения второго порядка рассмотрим систему двух уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_i = y_i, \quad \dot{y}_i = -\rho_{ij} x_j. \tag{12}$$

Здесь

$$x_i \equiv \omega_i, \quad y_i \equiv \dot{\omega}_i.$$

Введем совместную плотность вероятности

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}(t)) \rangle, \tag{13}$$

где $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ — решения уравнения (12) при данной реализации ρ_{ij} и начальных условиях, усреднение проводится по ансамблю всех возможных реализаций. В выражении для плотности вероятности $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — независимые переменные.

Целью настоящей работы является изучение свойств установившегося турбулентного потока в инерционном интервале масштабов, т. е. на масштабах l и временах t, удовлетворяющих условиям

$$l \ll L, \qquad t \gg \tau_c, \tag{14}$$

где L и τ_c — характерные пространственный и временной корреляционные масштабы крупномасштабных вихрей. Сами же крупномасштабные течения зависят от конкретной реализации турбулентного течения и от граничных условий. Воспользуемся вначале предположением, опирающимся на данные эксперимента [16], что крупномасштабные случайные пульсации скорости являются гауссовыми. Тогда в уравнениях (9) или (12), описывающих изменение со временем локальной завихренности, матрицу $\rho_{ij}(t)$, задаваемую крупномасштабными колебаниями давления, можно считать гауссовой. Кроме того, будем считать ее дельта-коррелированной по времени случайной величиной. Эти предположения будут подробнее обсуждены ниже.

Заметим, что «случайное» поведение завихренности (или скорости) обусловлено, как видно из уравнения (9), именно случайностью крупномасштабного течения, задающего матрицу $\rho_{ik}(t)$.

Гауссов случайный процесс задается парным коррелятором

$$\langle \rho_{ij}(t) \rho_{kl}(t') \rangle = D_{ijkl}\, \delta(t - t'). \tag{15}$$

Используя уравнения (12), после дифференцирования по времени функции плотности вероятности получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + y_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = x_p \frac{\partial}{\partial y_k} \langle \rho_{kp} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}(t)) \rangle . \tag{16}$$

Для вычисления коррелятора $\langle \rho_{kp} R[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \rho] \rangle$, где R — функционал ρ, воспользуемся стандартной техникой усреднения для случайного дельта-коррелированного процесса (см. монографию [17]):

$$\langle z_k R[z] \rangle = \sum_{k'} \int dt' \, \langle z_k(t) z_{k'}(t') \rangle \left\langle \frac{\delta R[z, t]}{\delta z_{k'}(t')} \right\rangle .$$

Отсюда с учетом (15) получим

$$\langle \rho_{kp} R[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \rho] \rangle = \sum_{k'p'} D_{kpk'p'} \left\langle \frac{\delta R[\mathbf{x}, \mathbf{y}, t]}{\delta \rho_{k'p'}(t)} \right\rangle . \tag{17}$$

Для вычисления вариационной производной (17) воспользуемся выражением для функции распределения и уравнениями движения (12), тогда получим

$$\left. \frac{\delta y_k(t)}{\delta \rho_{k'p'}(t')} \right|_{t=t'} = -\delta_{kk'} x_{p'}(t) , \qquad \left. \frac{\delta x_k(t)}{\delta \rho_{k'p'}(t')} \right|_{t=t'} = 0.$$

Используя эти соотношения, получим из (16) для функции $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ уравнение Фоккера – Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + y_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = D_{ijkl} x_j x_l \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k}. \tag{18}$$

Матрица $\rho_{ij}(t)$ — симметричная, см. (6), в условиях однородности и изотропии общее выражение для матрицы D_{ijkl} представимо в виде

$$D_{ijkl} = D\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \Gamma\delta_{ij}\delta_{kl}\right). \qquad (19)$$

Константы D и Γ, определяющиеся крупномасштабным течением, будем считать заданными. Наряду с однородностью и изотропностью, естественно предположить статистическую независимость различных компонент ρ_{ik}. В этом случае параметр $\Gamma = 0$. Отметим, однако, что сами значения констант D и Γ оказываются малосущественными, поскольку параметр D, как мы увидим ниже, в результате перенормировки времени исчезает из уравнения, а полученные свойства локально однородной и изотропной турбулентности слабо зависят от значения параметра Γ (требование положительной определенности квадратов пульсаций дает ограничение $\Gamma > -2$).

Подставляя выражение (19) в уравнение (18), получим окончательно

$$\frac{\partial f}{\partial t} + y_k\frac{\partial f}{\partial x_k} = \left[x^2\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{y}^2} + \gamma\left(x_k\frac{\partial}{\partial y_k}\right)^2 f\right]. \qquad (20)$$

Здесь $\gamma = 1 + \Gamma$ и время t нормировано на $D^{-1/3}$ ($D^{-1/3}$ — характерное время изменения плотности вероятности). Как было показано выше, в полностью изотропной турбулентности $D = 0$, поэтому с учетом слабой анизотропии $D^{-1/3} \gg \tau_c$, что и позволяет использовать приближение дельта-коррелированности при выводе уравнения (20).

Уравнение (20) обладает следующими важными свойствами.

1. Все моменты величин x_k и y_j суммарной степени n связаны только между собой системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому представляется возможным последовательно вычислить моменты любого порядка.

2. Четные моменты растут экспоненциально быстро, причем независимо от начальных условий на больших временах совместная плотность вероятности в (20) зависит только от модулей x, y и косинуса угла между векторами

$$\mu = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{xy}.$$

3. Высшие четные моменты растут быстрее низших.

Для иллюстрации этих утверждений рассмотрим моменты второго и четвертого порядков. Интегрированием уравнения (20) по $\mathbf{x}$ и по $\mathbf{y}$ получим для моментов второго порядка:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\langle x_i x_j\rangle = \langle x_i y_j + x_j y_i\rangle,\\ &\frac{d}{dt}\langle x_i y_j + x_j y_i\rangle = 2\langle y_i y_j\rangle,\\ &\frac{d}{dt}\langle y_i y_j\rangle = 2\delta_{ij}\langle x^2\rangle + 2\gamma\langle x_i x_j\rangle. \end{aligned} \qquad (21)$$

Отсюда видно, что инвариантные моменты второго порядка $\langle x^2\rangle$, $\langle y^2\rangle$ и $\langle\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\rangle$ образуют замкнутую систему, а их эволюция определяется характеристическим уравнением

$$\lambda^3 - 4\Gamma - 16 = 0.$$

Следовательно, асимптотически при $t\to\infty$ получаем

$$\langle x^2\rangle \propto \langle y^2\rangle \propto \langle\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\rangle \propto \exp(\Lambda_2 t),$$

где

$$\Lambda_2 = (16 + 4\Gamma)^{1/3}.$$

Для остальных моментов ($i \neq j$) имеем

$$\lambda_2^3 = 4 + 4\Gamma.$$

Видно, что $\Lambda_2 > \lambda_2$. Следовательно, при больших временах основную роль играют инвариантные моменты. Иначе говоря, произвольная начальная функция плотности вероятности, которая зависит в общем случае от шести переменных, с ростом времени становится функцией лишь трех основных переменных $x, y, \mu = x_i y_i/xy$.

Характеристическое уравнение для инвариантных моментов четвертого порядка имеет вид

$$\lambda^6 - (84\Gamma + 244)\lambda^3 - 1280 = 0,$$

откуда, например, для $\langle x^4\rangle$ имеем

$$\langle x^4\rangle \propto \exp(\Lambda_4 t),$$

где

$$\Lambda_4 = 2^{-1/3}\left[\left((84\Gamma{+}224)^2{+}5120\right)^{1/2}{+}(84\Gamma{+}224)\right]^{1/3}.$$

Непосредственно можно убедиться, что для всех значений $\Gamma > -2$ оказывается $\Lambda_4 > 2\Lambda_2$, в этих условиях при $t\to\infty$ имеем

$$\langle x^4\rangle \gg \langle x^2\rangle^2.$$

Полученные соотношения наглядно демонстрируют экспоненциальное увеличение со временем высших моментов модуля завихренности в мелкомасштабной турбулентности. Это свойство называется перемежаемостью и проявляется в неустойчивости мелкомасштабного течения. Поясним физическую сущность процесса. Капля жидкости под действием крупномасштабных случайных сил вытягивается, превращаясь в нитеобразную вихревую структуру. Главную роль в этом процессе играет несжимаемость жидкости. С одной стороны, она обеспечивает сохранение объема капли. Благодаря этому вытягивание капли сопровождается сильным сокращением ее поперечного масштаба, при этом из-за сохранения момента усиливается поперечное вращение. С другой стороны, не менее важно, что скорость звука в несжимаемой среде стремится к бесконечности. Это обеспечивает мгновенный перенос пульсаций давления. А именно, анизотропия крупномасштабных пульсаций давления служит основной причиной экспоненциально быстрого вытягивания капли. Подробно этот процесс пояснен на простом примере, приведенном в Приложении 2.

Как будет показано в дальнейшем, определяющую роль при построении решения уравнения (20) играет область значений параметров $y \gg x$, т. е. область, где $|\dot{\omega}| \gg |\omega|$. В этой области предположение о гауссовом характере случайного процесса не существенно. Действительно, из уравнений (12) следует, что изменение величины y за корреляционное время (Δy) составляет $\Delta y \sim x$, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{x}{y} \ll 1 \quad \text{при} \quad y \gg x. \tag{22}$$

В этих условиях флуктуации функции плотности вероятности $\delta f \ll \langle f \rangle$ и уравнение (20) можно получить, используя теорию возмущений. В результате оно всегда будет иметь вид уравнения Фоккера–Планка.

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Как было показано в предыдущем разделе, функция плотности вероятности в (20) при больших временах зависит только от модулей векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и угла μ между ними:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(x, y, \mu).$$

Кроме того, уравнение (20) и начальное условие для функции плотности вероятности допускают интегрирование по трем остальным переменным.

В результате в переменных x, y, μ уравнение (20) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu x^2 f\right) + \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)f\right) = \\ = \frac{x^2}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{x^2}{y^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial f}{\partial \mu}\right) + \\ + \gamma\left(\mu x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{y}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial \mu}\right)^2 f.\end{aligned} \tag{23}$$

Помимо условия нормировки

$$\int f d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int f x^2 y^2 dx\, dy\, d\mu = 1,$$

функция f должна удовлетворять условиям отсутствия потоков от границ $x = 0$ и $y = 0$. Поясним, что означают эти условия. Для этого удобно вернуться к уравнению (20), так как оно имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla_\alpha \mathbf{J}^\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, 6,$$

где вектор плотности потока $\mathbf{J}^\alpha$ в шестимерном пространстве $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ равен

$$\mathbf{J} = \left\{-\mathbf{y} f, x^2\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} + \gamma \mathbf{x}\left(\mathbf{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\right)\right\}.$$

Требование отсутствия источника на границе $y = 0$ означает, что интеграл $\mathbf{J}$ по пятимерной поверхности $|\mathbf{y}| = \epsilon$ должен стремиться к нулю при $\epsilon \to 0$. Переходя к переменным x, y, μ и интегрируя по угловым переменным

$$d\Omega_x d\Omega_y = 4\pi \cdot 2\pi d\mu,$$

получим

$$\begin{aligned}\int \left(x^2\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} + \gamma\mathbf{x}\left(\mathbf{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\right)\right)\cdot\frac{\mathbf{y}}{y}x^2 dx\, d\Omega_x y^2 d\Omega_y = \\ = 8\pi^2\int(1+\gamma\mu^2)\frac{\partial f}{\partial y}x^2y^2 dx\, d\mu \to 0, \quad y \to 0.\end{aligned} \tag{24}$$

Условие отсутствия источника на гиперповерхности $x = 0$ аналогичным образом приводит к требованию

$$\int \mu y f x^2 y^2 d\mu\, dy \to 0, \quad x \to 0. \tag{25}$$

Перейдем опять к уравнению (23). Будем искать асимптотическое по времени стационарное решение. При этом удобно перейти к переменным

$$x,\; z = y^3/3x^3, \mu.$$

Эти переменные разделяются, поэтому функцию $f(x,y,\mu)$ можно представить в виде

$$f(x,y,\mu)=\sum_{\alpha} x^{-2}x^{-\alpha}F(z,\mu;\alpha). \qquad (26)$$

Здесь α — собственные значения, которые должны определиться в ходе решения нашей задачи.

Для функции F получим уравнение

$$z\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+\left(\frac{4}{3}+\mu z\right)\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\alpha}{3}\mu F-
-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)F\right]+\frac{1}{9z}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial F}{\partial\mu}\right]+
+\gamma\left[z\left(\mu\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1-\mu^2}{3z}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^2F+
+\frac{2}{3}\mu\left(\mu\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1-\mu^2}{3z}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)F\right]=0. \qquad (27)$$

Проинтегрируем уравнение (27) по μ и введем функции $\bar\mu(z)$ и $\bar{\mu^2}(z)$ согласно соотношениям

$$\bar\mu(z)=\frac{\int\limits_{-1}^{1}\mu F\,d\mu}{\int\limits_{-1}^{1}F\,d\mu}=\frac{F_1}{3F_0},$$
$$\bar{\mu^2}(z)=\frac{\int\limits_{-1}^{1}\mu^2 F\,d\mu}{\int\limits_{-1}^{1}F\,d\mu}=\frac{2F_2}{15F_0}+\frac{1}{3}. \qquad (28)$$

Здесь $F_k(z)$ — k-й коэффициент в разложении функции F по полиномам Лежандра. Уравнение (27) примет вид

$$z(1+\gamma\bar{\mu^2})\frac{\partial^2 F_0}{\partial z^2}+\left(\frac{4}{3}+\bar\mu z+
+\gamma\left(2z\frac{\partial\bar{\mu^2}}{\partial z}+\frac{7\bar{\mu^2}-1}{3}\right)\right)\frac{\partial F_0}{\partial z}+
+\left(\frac{\alpha}{3}\bar\mu+z\frac{\partial\bar\mu}{\partial z}+\gamma\left(z\frac{\partial^2\bar{\mu^2}}{\partial z^2}+\frac{7}{3}\frac{\partial\bar{\mu^2}}{\partial z}+\frac{3\bar{\mu^2}-1}{9z}\right)\right)F_0=
=0. \qquad (29)$$

Заменой

$$F_0(z)=w(z)\exp\left(-\int\limits_0^z\frac{\bar\mu(p)\,dp}{1+\gamma\bar{\mu^2}}\right)$$

уравнение (29) сводится к виду

$$(1+\gamma\bar{\mu^2})z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\left(\frac{4}{3}+\gamma\frac{7\bar{\mu^2}-1}{3}+2\gamma z\frac{\partial\bar{\mu^2}}{\partial z}-\bar\mu z\right)\frac{\partial w}{\partial z}+
+\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{4}{3(1+\gamma\bar{\mu^2})}\right)\bar\mu w+
+\gamma\left(z\frac{\partial^2\bar{\mu^2}}{\partial z^2}+\frac{7}{3}\frac{\partial\bar{\mu^2}}{\partial z}+\frac{3\bar{\mu^2}-1}{9z}-\frac{z\bar\mu\frac{\partial\bar{\mu^2}}{\partial z}}{1+\gamma\bar{\mu^2}}-
-\frac{\bar\mu(7\bar{\mu^2}-1)}{3(1+\gamma\bar{\mu^2})}\right)w=0. \qquad (30)$$

Уравнение (30) имеет решения в виде ряда [3)]

$$w=z^s\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n.$$

Этот ряд сходится везде при $0<z<\infty$, если только $\bar\mu(z)$ и $\bar{\mu^2}(z)$ не имеют особенностей.

Значения параметра s и коэффициентов c_n можно определить из асимптотики $z\to\infty$ [4)]. Разложим сначала уравнение (29) по полиномам Лежандра, получим

$$z\frac{\partial^2 F_0}{\partial z^2}+\frac{4}{3}\frac{\partial F_0}{\partial z}+\frac{1}{3}\left[z\frac{\partial F_1}{\partial z}+\frac{\alpha}{3}F_1\right]=0,$$

$$z\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}+\frac{4}{3}\frac{\partial F_1}{\partial z}+\left(z\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\alpha}{3}\right)\left(F_0+\frac{2}{5}F_2\right)+
+\frac{2}{3}F_0-\frac{2}{15}F_2=\frac{2}{9z}F_1,$$

....

$$z\frac{\partial^2 F_m}{\partial z^2}+\frac{4}{3}\frac{\partial F_m}{\partial z}+\left(z\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\alpha}{3}\right)\times
\times\left(\frac{m}{2m-1}F_{m-1}+\frac{m+1}{2m+3}F_{m+1}\right)+
+\frac{1}{3}\left(\frac{m(m+1)}{2m-1}F_{m-1}-\frac{m(m+1)}{2m+3}F_{m+1}\right)-
-\frac{m(m+1)}{9z}F_m+
+\frac{\gamma}{9z}\left(\frac{m^2(m-1)(m-2)}{(2m-1)(2m-3)}F_{m-2}-\right.$$

3) Нуль — правильная особая точка уравнения (30), что следует из ограниченности $\bar\mu(z)$ и $\bar{\mu^2}(z)$ и условия $1+\gamma>0$.

4) Как указывалось ранее (22), при этом уравнение для плотности вероятности всегда имеет вид уравнения Фоккера–Планка независимо от статистических свойств крупномасштабного случайного процесса.

$$
\begin{aligned}
- m(m+1)\frac{2m(m+1)-1}{(2m-1)(2m+3)}F_m + \\
+\frac{(m+1)^2(m+2)(m+3)}{(2m+3)(2m+5)}F_{m+2}\Bigg) + \\
+\gamma z\left(\frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-3)}\,\frac{\partial^2 F_{m-2}}{\partial z^2} +\right. \\
+\frac{2m(m+1)-1}{(2m-1)(2m+3)}\,\frac{\partial^2 F_m}{\partial z^2} + \\
\left.+\frac{(m+2)(m+1)}{(2m+3)(2m+5)}\,\frac{\partial^2 F_{m+2}}{\partial z^2}\right) + \\
+\frac{\gamma}{3}\left(-\frac{m(m-1)(2m-5)}{(2m-1)(2m-3)}\,\frac{\partial F_{m-2}}{\partial z} +\right. \\
+\frac{8m(m+1)-4}{(2m-1)(2m+3)}\,\frac{\partial F_m}{\partial z} + \\
\left.+\frac{(m+1)(m+2)(2m+7)}{(2m+3)(2m+5)}\,\frac{\partial F_{m+2}}{\partial z}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

При $z \to \infty$, пренебрегая в каждом уравнении цепочки, начиная со второго, членом, пропорциональным F_n/z, получим систему уравнений, решение которой имеет вид

$$
F_m = (2m+1)F_0(z). \tag{31}
$$

При этом все уравнения цепочки сводятся к одному, совпадающему с (29) при

$$
\bar{\mu} = \bar{\mu^2} = 1.
$$

(В действительности, коэффициенты (31) — это коэффициенты разложения по полиномам Лежандра функции $2\delta(1-\mu)F_0(z;\alpha)$.) С учетом определения $\bar{\mu}(z)$ и $\bar{\mu^2}(z)$ (28) в асимптотике (31) имеем

$$
\bar{\mu}(z) = 1 - O\left(\frac{1}{z}\right), \quad \bar{\mu^2}(z) = 1 - O\left(\frac{1}{z}\right).
$$

При этом уравнение (30) сводится к

$$
(1+\gamma)z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left(\frac{4}{3} + 2\gamma - z\right)\frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{4}{3(1+\gamma)}\right)w + \\
+ 2\gamma\left(\frac{1}{9z} - \frac{1}{(1+\gamma)}\right)w = 0.
$$

Это уравнение эквивалентно уравнению для вырожденной гипергеометрической функции Куммера [18], а его решения имеют вид

$$
w_1(z) = z^{-\frac{2}{3}\frac{\gamma}{1+\gamma}} M\left(a, b; \frac{z}{1+\gamma}\right), \tag{32}
$$

$$
w_2(z) = z^{-1/3} M\left(1+a-b, 2-b; \frac{z}{1+\gamma}\right),
$$

где M — функция Куммера:

$$
M(a,b,z) = 1 + \frac{a}{b}\,\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}\,\frac{z^2}{2!} + \ldots,
$$

а параметры a и b равны

$$
a = \frac{4-\alpha}{3}, \quad b = \frac{2}{3}\,\frac{2+\gamma}{1+\gamma}.
$$

Мы нашли общее решение уравнения (30). Рассмотрим теперь выполнение граничных условий нашей задачи (24), (25). Решение w_2 при $z \to 0$ приводит к функции

$$
F_0 \propto z^{-1/3},
$$

для которой

$$
\int y^2 \frac{\partial f}{\partial y} d\mu
$$

не стремится к нулю при $y \to 0$. Это противоречит граничному условию (24). Поэтому нас может интересовать только первое решение w_1, которое удовлетворяет условию (24).

Далее, функции Куммера при $z \to \infty$ ведут себя как

$$
M(a,b,z) \propto e^z z^{a-b},
$$

если a не является отрицательным целым числом. Поэтому при нецелых $\alpha/3$ имеем

$$
F(z) \propto z^{-\alpha/3}, \quad fx^2 \propto y^{-\alpha}
$$

при малых x, и условие отсутствия потока от границы $x = 0$ (25) не выполняется. Значит, удовлетворяет граничным условиям (24), (25) только функция w_1 при значениях параметра α, соответствующих «дискретному спектру». Это означает, что ряд M содержит конечное число членов. Из условия обращения в нуль коэффициента при старшем члене ряда получается условие для собственного значения параметра α[5]:

$$
\alpha = 4 + 3n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{33}
$$

Решение (32) вместе с (33) и (31) задают асимптотическое поведение функции f при $t \to \infty$. Подчеркнем, что при $x \to \infty$, как следует из (26), (33), полная функция плотности вероятности $f(x,y,\mu)$ ведет себя в основном порядке ($n = 1$) как

$$
f(x,y,\mu) \propto x^{-9} F(z,\mu;7).
$$

В дальнейшем нам потребуется только существование интеграла от функции F.

[5] Значение $n = 0$ исключено условием нормировки функции f.

5. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИХРЕННОСТИ. ОСОБЕННОСТЬ ЗАВИХРЕННОСТИ И ПАРНАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

В предыдущем разделе мы получили асимптотическое решение для плотности вероятности величин $\boldsymbol{\omega}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$. Это решение обладает важным свойством — при $x \to \infty$ оно убывает по степенному закону, что означает значительную вероятность появления высокоамплитудных флуктуаций $|\boldsymbol{\omega}|$. Такое свойство решения является отражением перемежаемости турбулентности. Перемежаемость означает, что в реализации турбулентного течения существуют пространственные области, где $|\boldsymbol{\omega}|$ значительно превосходит свое среднее значение. Выясним теперь, каким должно быть течение в этих областях, чтобы функция плотности вероятности такого течения совпадала с полученной выше асимптотикой.

Для этого, с одной стороны, исходя из совместной плотности вероятности (13), (20), введем функцию плотности вероятности модуля завихренности $x \equiv |\boldsymbol{\omega}|$:

$$P(x,t) = \int f(\mathbf{x},\mathbf{y},t)x^2 d\mathbf{y}d\mu = \langle \delta(x - |\mathbf{x}(t)|)\rangle\,. \quad (34)$$

С другой стороны, независимо от (34) введем плотность вероятности $P_1(x,t)$ путем непосредственного усреднения по объему некоторой реализации турбулентного течения:

$$P_1(x,t) = \frac{1}{V}\int \delta(x - X(\mathbf{r},t))\,d\mathbf{r}, \quad (35)$$

где $X(\mathbf{r},t) = |\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)|$ — модуль завихренности турбулентного течения в момент времени t и в точке пространства $\mathbf{r}$, V — объем, занимаемый течением.

Первое соотношение для плотности вероятности $P(x,t)$ получено в результате усреднения по ансамблю траекторий жидких частиц $\boldsymbol{\xi}(t)$, второе соотношение для функции $P_1(x,t)$ является результатом усреднения по пространству.

В силу эргодичности (т. е. в предположении, что среднее по ансамблю совпадает со средним по пространству) получим

$$P(x,t) = P_1(x,t). \quad (36)$$

Если функция $P(x,t)$ известна, то можно на основании (36), (35) сделать выводы о пространственном распределении модуля завихренности $X(\mathbf{r},t)$. Поскольку нас интересует возможность существования особенностей и структура течения вблизи них, рассмотрим предел $t \to \infty$, а затем предел $x \to \infty$.

Пусть особенность достигается на некоторой поверхности. Выбрав начало координат на этой поверхности и ось z перпендикулярно ей, получим

$$P_1(x,t) = \frac{1}{V}\int \delta\left(x - X(z,t)\right)\,d\sigma\,dz = \left.\frac{1}{|X'_z|}\right|_{X(z,t)=x}.$$

Здесь $d\sigma$ — элемент площади поверхности. Простейшим примером поверхности, на которой завихренность стремится к бесконечности, является тангенциальный разрыв скорости течения. Действительно, если с одной стороны контактной поверхности скорость равна V_0, а с другой стороны $-V_0$, то завихренность сосредоточена на контактной поверхности в виде дельта-функции.

В наиболее интересном для нас случае, когда максимум $X(t,\mathbf{r})$ достигается вдоль вихревой линии, выбирая переменную z вдоль линии и цилиндрические переменные r,ϕ, получим

$$P_1(x,t) = \frac{1}{V}\int \delta\left(x - X(r,t)\right) r\,dr\,d\phi\,dz = \\ = \left.\frac{r}{|X'_r|}\right|_{X(r,t)=x}.$$

В случае точечного максимума, вводя сферические переменные r,θ,ϕ, мы получили бы

$$P_1(x,t) = \frac{1}{V}\int \delta\left(x - X(r,t)\right) r^2 dr \sin\theta\,d\theta\,d\phi = \\ = \left.\frac{r^2}{|X'_r|}\right|_{X(r,t)=x}.$$

Переходя теперь к пределу $t \to \infty$ и учитывая (36), найдем пространственное распределение модуля завихренности в окрестности возможных особенностей:

$$\begin{aligned} &X'(z)P(X) = 1 \text{ — особая поверхность},\\ &X'(r_\perp)P(X) = r_\perp \text{ — особая линия},\\ &X'(r)P(X) = r^2 \text{ — особая точка}. \end{aligned} \quad (37)$$

В разд. 4 было получено асимптотическое выражение для функции плотности вероятности

$$F_0 = \int F(z,\mu,x)\,d\mu$$

(см. (32), (33)). Проинтегрировав его по z, получим функцию $P(x)$:

$$\begin{gathered} P(x) = \sum_\alpha p_\alpha x^{3-\alpha},\\ \alpha = 4 + 3n, \quad n = 1,2,3,\ldots \end{gathered} \quad (38)$$

Подставляя (38) в выражения (37) и интегрируя получившиеся выражения в окрестности особенности, находим

$$\begin{aligned} &X(z) \propto z^{-1/3} \text{ — особенность вихревой поверхности,} \\ &X(r_\perp) \propto r_\perp^{-2/3} \text{ — особенность вихревой линии,} \\ &X(r) \propto r^{-1} \text{ — точечная особенность.} \end{aligned} \quad (39)$$

Видно, что $X(r)$ для точечной особенности расходится слабее, чем любая точечная особенность уравнения Лапласа (которым и определяются всевозможные точечные особенности вихревого поля). Это значит, что такой уединенной точечной особенности завихренности существовать не может.

Наибольшая расходимость в выражениях (39) обеспечивается особенностью вихревой линии. Покажем, что зависимость

$$X(r_\perp) \propto r_\perp^{-2/3}$$

соответствует закону Колмогорова. Рассмотрим коррелятор поперечных скоростей

$$K(r_\perp) = \left\langle (\mathbf{v}_\perp(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_\perp(0, t))^2 \right\rangle. \quad (40)$$

Здесь $v_\perp$ означает компоненту скорости, перпендикулярную линии тока $\boldsymbol{\xi}(t)$. Но, согласно определению (4), выражение $\mathbf{v}_\perp(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_\perp(0, t)$ в окрестности особенности завихренности тождественно равно $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Поэтому при $r \to 0$ имеем

$$K(r_\perp) \propto \omega^2 r_\perp^2 \propto r_\perp^{2/3}. \quad (41)$$

Поскольку направление оси нити произвольно, под действием турбулентных пульсаций оно быстро меняется. В силу изотропии турбулентности естественно полагать, что можно провести усреднение по углам. Соотношение (41) при этом примет вид

$$K(r) \propto r^{2/3}. \quad (42)$$

Таким образом, основное соотношение (1), (42) естественно следует из нашего рассмотрения. Главный вклад в корреляционную функцию (42) вносят при этом вихревые нити. Вклад же в корреляционную функцию от регулярной части течения пренебрежимо мал ($\propto r^2$).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена исследованию генерации локальной структуры мелкомасштабной турбулентности. Предполагается, что исходные крупномасштабные пульсации, оказывающие определяющее влияние на рост мелкомасштабных структур, не обладают свойством изотропии и однородности вследствие пространственной неоднородности основного турбулентного потока, характерной для реальных течений (ветры в атмосфере, течение в реках, каналах, трубах и т. д.). То же обстоятельство служит основанием для выбранного нами граничного условия — отсутствие возмущений на бесконечности. Подчеркнем, что оба указанных условия не удовлетворяют представлению об однородной изотропной турбулентности, если оно распространяется на все пространство.

Кратко сформулируем и обсудим основные результаты.

Вихревые структуры. Путем преобразования уравнений Навье–Стокса при $\nu \to 0$ выведены уравнения, описывающие рост вдоль лагранжевой траектории мелкомасштабных пульсаций под воздействием заданной крупномасштабной турбулентности. Показано, что мелкомасштабная составляющая модуля завихренности экспоненциально растет со временем. Этот рост приводит к возникновению системы вихревых нитей и вихревых поверхностей, на которых и происходит интенсивный рост завихренности. Определены характерные параметры роста вихревой структуры во времени. Отметим, что хаотическая сетка вихревых структур хорошо видна в эксперименте [19]. Более того, проведенные в последнее время детальные исследования распределения ускорения мелких примесных частиц в турбулентной системе бесспорно демонстрируют, что наиболее сильное ускорение достигается в окрестности вихревых нитей [20, 21].

Наша теория предсказывает возможность следующей экспериментальной проверки. Исключим из всего наблюдаемого в эксперименте объема турбулентного течения цилиндрические области радиуса r^* вокруг вихревых нитей. Выберем r^* таким, что $\lambda_0 \ll r^* \ll L$, где λ_0 — вязкий масштаб, а L — размер крупномасштабных пульсаций. Тогда парная корреляционная функция, вычисленная по оставшемуся большому объему, будет обрезаться не на вязком масштабе λ_0, а на масштабе r^*.

Сингулярность. Показано, что в бездиссипативном пределе $\nu \to 0$ на оси таких вихревых нитей при $t \to \infty$ величина завихренности ω стремится к бесконечности. Отметим, что при построении функции плотности вероятности (20) мы линеаризовали уравнения гидродинамики вблизи лагранжевой траектории (9). При этом мы получили экспоненциальное во времени возрастание завихренности, которое может ограничиваться либо нелинейными поправками, либо вязкостью течения. Поэтому возникает вопрос о влиянии нелинейных поправок на полученное решение в рассматриваемом нами пределе $\nu \to 0$.

Такие нелинейные поправки можно оценить, исходя из энергетических соображений. В сносовом турбулентном течении нелинейность начинает оказывать обратное влияние на крупномасштабное движение, когда плотность энергии мелкомасштабных пульсаций становится порядка плотности энергии основных крупномасштабных пульсаций. Плотность энергии основных пульсаций на основном турбулентном масштабе L составляет

$$E_0 = \frac{1}{2}\rho U^2,$$

где U — скорость крупномасштабных пульсаций жидкости. Из выражений (39) находим оценку скорости на масштабе толщины нити r_0:

$$v_n \sim U\left(\frac{r_0}{L}\right)^{1/3}.$$

С учетом доли объема, занимаемого нитью, получаем долю плотности энергии, сосредоточенную в нити:

$$\frac{E_n}{E_0} \sim N_f\left(\frac{v_n}{U}\right)^2\left(\frac{r_0}{L}\right)^2 \sim N_f\left(\frac{r_0}{L}\right)^{8/3} \ll 1,$$

где N_f — отношение числа нитей к числу крупномасштабных вихрей в единице объема.

Таким образом, мы видим, что нелинейные поправки к скорости в окрестности нити не могут оказать обратного влияния на основной масштаб случайных пульсаций. Следовательно, сингулярность будет обрезаться за счет вязкости. Ситуация здесь вполне аналогична сверхзвуковой гидродинамике, где возникающие в эйлеровском течении сингулярности — сильные и слабые разрывы — размываются лишь вследствие вязкости.

Корреляционная функция. Получено уравнение, описывающее распределение завихренности в окрестности оси вихревой нити. Получено решение этого уравнения, определяющее структуру завихренности и распределение скоростей в окрестности сингулярности. Она имеет вид закона

$$|v_\perp| \propto r_\perp^{1/3}$$

в плоскости, ортогональной к направлению вихревой нити. Эта структура определяет вид парной корреляционной функции в малых масштабах. Таким образом, на основе решения уравнения Навье – Стокса при учете крупномасштабных пульсаций давления в пределе бесконечно малой вязкости $\nu \to 0$ определена корреляционная функция скоростей (1), (42) в установившемся турбулентном течении.

Перемежаемость. Согласно исходному предположению Колмогорова – Ричардсона, поток энергии турбулентности перетекает от крупных масштабов к малым, диссипируя в самых мелких масштабах равномерно и однородно в пространстве. Ландау указал, что это предположение противоречиво (см. [3, § 6.4]). В 1960 г. Гурвич [22], а позднее и другие исследователи экспериментально обнаружили сильную неоднородность в пространстве и во времени пульсаций скорости и потока диссипируемой энергии. Это свойство турбулентности получило название «перемежаемости». Исследованию различных подходов к явлению перемежаемости посвящено большое количество работ (см. монографии [2, 3] и цитируемую в них литературу).

Обсудим, какие особенности «перемежаемости» вытекают из представленной здесь теории.

1. Завихренность ω распределена крайне неоднородно в пространстве. Вблизи оси вихря ω может принимать очень высокие значения, во много раз превышающие средние значения $\bar{\omega}$.

2. Значения четных моментов корреляционных функций должны возрастать с ростом номера моментов.

3. Диссипация энергии в развитом турбулентном движении локализована вблизи вихревых нитей и вихревых поверхностей. Она распределена крайне неоднородно в пространстве, а поскольку вихревые структуры движутся — то и во времени. Кроме того, в диссипации перемежаемость турбулентного течения проявляется наиболее ярко [23].

Отметим также, что хотя нить дает наибольшую степень особенности течения при $t \to \infty$ и определяет вид парной корреляционной функции, на процесс диссипации энергии могут оказать влияние и особенности типа поверхности, поскольку они могут занимать значительную долю объема турбулентного течения.

Авторы признательны В. Л. Гинзбургу за внимание к работе, А. С. Гурвичу, В. Е. Захарову, В. С. Львову, Е. А. Кузнецову, С. М. Апенко, В. В. Лосякову и М. О. Птицыну за полезные обсуждения. Авторы благодарны В. В. Лебедеву за плодотворную дискуссию и ценные замечания.

Работа частично финансировалась Программой Президиума РАН «Математические методы нелинейной динамики».

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Выясним локальную структуру тензора деформации скоростей $\partial V_i / \partial r_k$ вблизи оси вихревой нити. Для этого рассмотрим вихревую трубку, поперечный размер которой r_0, а продольный $L_t \gg r_0$. Пренебрегая медленными изменениями завихренности ω_i, которые связаны с изгибом вихревой трубки на масштабах L_t, представим локальную скорость в виде

$$V_i = \varepsilon_{iml} r_m q_l \phi(r_\perp),$$

где

$$q_l = \frac{\omega_l}{\omega}, \quad r_\perp = \sqrt{r^2 - (q_i r_i)^2}.$$

Тогда функция $\phi(r_\perp)$ связана с локальной завихренностью соотношением

$$\frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} \left(r_\perp^2 \phi(r_\perp) \right) = -\omega(r_\perp).$$

Как следует из уравнения (8), локальная динамика завихренности определяется произведением симметричной части тензора деформации скоростей

$$b_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial r_k} + \frac{\partial V_k}{\partial r_i} \right)$$

на значение завихренности ω_k:

$$\dot{\omega}_i = b_{ik} \omega_k.$$

Вычислив симметричный тензор b_{ik}, получим

$$b_{ik} = \left[\varepsilon_{iml} r_m q_l \left(\frac{r_k}{r_\perp} - q_k \frac{r_n q_n}{r_\perp} \right) + \right. \\ \left. + \varepsilon_{kml} r_m q_l \left(\frac{r_i}{r_\perp} - q_i \frac{r_n q_n}{r_\perp} \right) \right] \frac{d\phi}{dr_\perp}.$$

На масштабах вихря порядка r_0 имеем $|\omega| \sim |b_{ik}|$. Однако этот тензор ортогонален ω_k (т. е. $b_{ik}\omega_k = 0$), в чем легко убедиться непосредственно. Следовательно, его наличие никак не сказывается на динамике завихренности.

Таким образом, самодействие вихря не влияет на его динамику. При нарушении аналитичности функции $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ вдоль вихревой нити, как и в случае гладкой функции, рассмотренном в разд. 2, локальный вклад в поперечную часть тензора b_{ik} пренебрежимо мал, а главным оказывается вклад крупномасштабных пульсаций. Здесь сказывается возможность мгновенной передачи давления на значительные масштабы благодаря несжимаемости жидкости. Что же касается природы асимметрии крупномасштабных пульсаций, то она определена неоднородностью всего турбулентного потока.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим аксиально симметричное течение. Уравнения гидродинамики для компонент скоростей вдоль радиуса v_r, азимутального угла v_ϕ и оси цилиндра v_z имеют вид

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_\phi v_r}{r} = 0, \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{A.3}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{A.4}$$

Будем искать решение системы (A.1)–(A.4) в виде

$$v_\phi = \omega r, \quad v_r = ar, \quad v_z = bz. \tag{A.5}$$

Тогда давление должно быть представлено в виде

$$p(r, z, t) = \frac{P_1(t)}{2} r^2 + \frac{P_2(t)}{2} z^2.$$

Из уравнения (A.4) следует связь между a и b:

$$2a + b = 0. \tag{A.6}$$

Эта связь выражает сохранение объема жидкости. Действительно, рассмотрим элемент жидкости, занимающий в текущий момент цилиндр радиуса $R(t)$ и длины $Z(t)$. Тогда из (A.5) следует

$$\dot{R} = a(t) R, \quad \dot{Z} = b(t) Z,$$

отсюда

$$R(t) = R_0 \exp \left(\int_0^t a(t_1)\, dt_1 \right),$$

$$Z(t) = Z_0 \exp \left(\int_0^t b(t_1)\, dt_1 \right).$$

Объем цилиндра в произвольный момент t равен

$$\pi R(t)^2 Z(t) = \pi R_0^2 Z_0 \exp \int_0^t \left(2a(t_1) + b(t_1) \right) dt_1 = \\ = \pi R_0^2 Z_0.$$

Видно, что он действительно сохраняется. Например, если $b > 0$, то цилиндр растягивается, при этом его поперечный радиус уменьшается.

После подстановки (A.5) в систему (A.1)–(A.4) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{a} + a^2 - \omega^2 = -P_1, \\ &\dot{\omega} + 2a\omega = 0, \\ &\dot{b} + b^2 = -P_2. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Заметим, что полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений содержит одну произвольную функцию от времени, так как с учетом (A.6), мы имеем четыре уравнения и пять неизвестных функций: a, b, ω, P_1, P_2. Без ограничения общности в качестве такой произвольной функции можно выбрать $P_2(t)$. Отметим также, что изменение завихренности $\omega(t)$ однозначно связано с изменением «длины цилиндра» $Z(t)$:

$$\omega(t) = \omega_0 Z(t)/Z_0.$$

После дифференцирования второго уравнения системы (A.7) и подстановки в него всех остальных уравнений получим

$$\ddot{\omega} = -P_2(t)\,\omega.$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (9). Здесь $P_2(t)$ характеризует перепад давлений вдоль длины цилиндра. Эта величина отражает свойства крупномасштабных пульсаций. Предполагаем, что, как и крупномасштабные пульсации, $P_2(t)$ — достаточно сложная «случайная» функция, такая что среднее по времени от нее равно нулю. Тогда в среднем интервалы времени, когда $P_2(t) > 0$ и $P_2(t) < 0$, представлены равновероятно. Но при $P_2(t) > 0$ функция $\omega(t)$ осциллирует, причем амплитуда осцилляций меняется мало. Наоборот, при $P_2(t) < 0$ функция $\omega(t)$ экспоненциально растет. Ясно, что в среднем будет происходить рост ω. Ввиду пропорциональности ω и Z, такой рост означает «вытягивание» цилиндра и, соответственно, сжатие поперечного размера вихря.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
2. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидродинамика*, том 1, Гидрометиздат, Санкт-Петербург (1992), том 2, Гидрометиздат, Санкт-Петербург (1996).
3. У. Фриш, *Турбулентность. Наследие Колмогорова*, ФАЗИС, Москва (1988).
4. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **30**, 9 (1941); **31**, 583 (1941); **32**, 16 (1941).
5. А. М. Обухов, ДАН СССР **32**, 22 (1941); Изв. АН СССР, сер. геофиз. **5**, 453 (1941).
6. V. E. Zakharov, V. S. L'vov, and G. Falkovich, *Kolmogorow Spectra of Turbulence*, Springer, Berlin (1992).
7. M. J. Vishik and A. F. Fursikov, *Mathematical Problems of Statistical Hydrodynamics*, Kluwer, Dordrecht (1988).
8. C. Foias, O. Manley, R. Rosa, and R. Temam, *Navier–Stokes Equations and Turbulence*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2001).
9. P. G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1992).
10. V. S. L'vov and I. Procaccia, Phys. Rev. E **62**, 8037 (2000).
11. V. Yakhot, E-print archives physics/0512102.
12. C. Beck and E. Cohen, Physica A **322**, 267 (2003).
13. T. Gotoh and R. H. Kraichnan, Physica D **193**, 231 (2004).
14. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, ЖЭТФ **118**, 893 (2000).
15. В. И. Белинчер, В. С. Львов, ЖЭТФ **66**, 349 (1977).
16. A. Noullez, G. Wallace, W. Lempert, R. Miles, and U. Frisch, J. Fluid. Mech. **339**, 287 (1997).
17. В. И. Кляцкин, *Динамика стохастических систем*, Физматлит, Москва (2003).
18. М. Абрамович, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
19. А. С. Гурвич, В. В. Пахомов, А. М. Черемухин, Радиофизика **7**, 76 (1971).
20. B. L. Sawford et al., Phys. Fluids, **15**, 3478 (2003).
21. A. M. Reynolds, N. Mordant, A. M. Crawford et al., New J. Phys. **7**, 58 (2005).
22. А. С. Гурвич, Изв. АН СССР, сер. геофиз. **7**, 1042 (1960).
23. C. M. Menevean and K. R. Sreenivasan, J. Fluid. Mech. **224**, 429 (1991).