ЖЭТФ, 2007, том 132, вып. 1 (7), стр. 45–51

НЕОДНОРОДНЫЕ УПОРЯДОЧЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ТРАНСЛЯЦИОННАЯ ПРИРОДА КАЛИБРОВОЧНОЙ ГРУППЫ В КОНТИНУАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ЛАНДАУ II. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ

А. Я. Брагинский [*]

НИИ физики Ростовского государственного университета
344090, Ростов-на-Дону, Россия

Развитый в работе [1] теоретико групповой метод описания фазовых переходов в неоднородное состояние применен для решения двух задач: 1) построения теории состояния смектика A(SmA) под действием одноосного давления; 2) построения теории упрочнения квазикристаллов. В обоих случаях основную роль в проявлении новых качественных особенностей вещества в неоднородно упорядоченном состоянии играют появляющиеся в результате фазового перехода упругие дислокации. Упругие дислокации согласно работе [1] необходимо возникают при фазовом переходе в неоднородное деформированное состояние дополнительно к статическим дислокациям, которые возникли в результате особенностей роста кристаллов или другой «предыстории». Плотность статических дислокаций слабо зависит от внешних воздействий. Упругие дислокации, наоборот, являются функциями состояния. В заключительном, третьем разделе обсуждается аналогия предлагаемого подхода к теории неоднородно упорядоченных состояний и квантово-полевой теории взаимодействия полей материи. На этой основе приводится подробный вывод уравнения сверхпроводящего состояния Гинзбурга – Ландау из принципа локальности трансформационных свойств сверхпроводящего параметра порядка по отношению к временным трансляциям.

PACS: 61.50.Ks

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к теории свойств веществ, претерпевающих фазовые переходы в пространственно-неоднородные состояния, обусловлен широким распространением этого явления. Магнитные структуры с периодом, зависящим от внешних условий (Dy, Nb, Ho), нестехиометрически упорядоченные твердые растворы типа K–W-бронз и релаксаторов атоков типа $PbMg_{1/3}Nb_{2/3}O_3$; фазы Франка – Каспера и икосаэдрические структуры в металлических сплавах, сверхпроводники второго рода, жидкие кристаллы во внешних полях и т. п. — все это вещества, в которых в результате фазового перехода возникает состояние с неоднородным распределением (на макрорасстояниях) заряда. Попыток понять, почему при фазовых переходах с понижением симметрии возникают и существуют термодинамически стабильные пространственно-неоднородные состояния, было довольно много. В работе [1], насколько нам известно, впервые рассмотрен вариант теории неоднородных состояний, в котором в теорию фазовых переходов Ландау автоматически (через взаимодействия, аналогичные минимальным взаимодействиям в квантовой теории поля [2]) включаются дефекты, компенсирующие напряжения, с необходимостью возникающие при образовании неоднородностей. В данной работе мы конкретизируем результаты работы [1], проиллюстрировав их приложением к теории SmA, возникающего в результате фазового перехода из нематической фазы. Такой фазовый переход с образованием периодического распределения центров тяжести молекул вдоль оси симметрии нематической фазы (N) описывается однокомпонентным параметром порядка (ПП) [3]. Под действием внешних напряжений вдоль оси симметрии (нормально к плоскостям скольжения SmA) в SmA образуются краевые дислокации, снижающие напряжения внутри жидкого кристалла. Образовавшиеся в результате фазового перехода и являющие-

[*] E-mail: a.braginsky@mail.ru

ся функциями состояния дислокации названы нами упругими. В отличие от дислокаций, порожденных предысторией материала, они исчезают в отсутствие внешних напряжений. Фазовый переход кристалл (Cr)→квазикристалл (QCr) намного более сложен. При таком переходе полностью теряется трансляционная симметрия кристалла и систему дислокаций, компенсирующих напряжения в кристалле, трудно визуализировать. Тем не менее, как показано ниже на конкретном примере сплавов AlMn(Fe)Si, возможно полное аналитическое описание неоднородного состояния. Под этим понимается возможность установить (выявить) структуру и явный вид уравнений состояния, связывающих степень упорядоченности QCr с плотностью упругих дислокаций. В заключительном разделе приведен вывод феноменологического уравнения состояния сверхпроводников Гинзбурга–Ландау, в котором минимальное взаимодействие куперовского конденсата и электромагнитного поля определяется инвариантностью функционала Ландау, учитывающего неоднородность конденсата относительно неоднородных сдвигов вдоль оси времени.

2. ДЕФОРМАЦИЯ В СМЕКТИКЕ *A*

Для описания деформированного SmA де Жен [4, 5] предложил использовать модель, аналогичную модели Гинзбурга–Ландау, так как появление дислокаций в SmA при деформации аналогично образованию вихрей в сверхпроводнике второго рода. Для построения модели был использован комплексный двухкомпонентный ПП (ψ, ψ^*) перехода нематик–SmA:

$$\delta\rho(\mathbf{x}) = \psi(x)\exp(i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}) + \psi^*(x)\exp(-i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\mathbf{k}_0$ — волновой вектор, характеризующий трансляционную симметрию SmA вдоль главной оптической оси с периодом $d = 2\pi/k_0$.

Поскольку число дислокаций, попадающих внутрь контура L, измеряется интегралом [4, 6]

$$\nu_L = \oint\limits_l (\mathbf{n}/d)\, d\mathbf{r}, \quad (2)$$

в предположении $d = \mathrm{const}$ число дислокаций определяется интегралом

$$\nu_L = \frac{1}{d}\oint\limits_L \mathbf{n}\, d\mathbf{r}. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — вектор директора, который перпендикулярен слоям в SmA. Наличие произвола в фазе у комплексного ПП (1) и зависимость вектора Бюргерса от направления директора $\mathbf{n}(x)$ (3) привели де Жена к интерпретации $\delta\mathbf{n}(x)$ (3) как компенсирующего поля ПП. Для описания упругих свойств SmA в потенциале Ландау было предложено использовать энергию Франка Φ_F для нематиков, которая, как известно, также является функцией $\mathbf{n}(x)$ [4–7]:

$$\Phi = \alpha|\psi|^2 + \beta|\psi|^4 + |(\nabla - ik_0\delta\mathbf{n})\psi|^2 + \Phi_F, \quad (4)$$

где

$$\Phi_F = \frac{1}{2}k_1(\operatorname{div}\mathbf{n})^2 + \frac{1}{2}k_2(\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n})^2 + \\ + \frac{1}{2}k_3(\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{n})^2. \quad (5)$$

Проблема предложенной в работах [4, 5] модели представлялась в том, что энергия Франка (5) содержит инварианты в виде дивергенции $\operatorname{div}\mathbf{n}(x) \neq 0$. Эти инварианты играют существенную роль при описании деформации у нематиков, и исключить их из потенциала (5) не представлялось возможным. Критика данной ситуации [8–10] привела к предложению использовать в качестве компенсирующего поля некоторое векторное поле, аналогичное вектор-потенциалу для электродинамики, однако физической интерпретации этого векторного поля предложено не было.

На наш взгляд, некорректность использования директора (или вариации директора) в качестве компенсирующего поля связана с его наблюдаемостью и с тем, что он вполне определен. В то же время, компенсирующее поле должно быть определено с точностью до градиента некоторой функции [2]. Так как волновой вектор ПП в каждой физической точке связан с директором простым соотношением $\mathbf{k} = 2\pi(\mathbf{n}/d)$, при $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ мы имеем дело с состоянием, характеризуемым локальной трансляционной симметрией и градиент (4) не инвариантен относительно трансляций (см. формулу (3) в работе [1]). Для получения инвариантных комбинаций градиентов (ψ, ψ^*) в теорию необходимо включить компенсирующее поле [1]. Упругую энергию деформированного SmA выразим через тензор напряжений (σ_{ik}) [1, 6]. Это даст возможность использовать потенциал поля напряжений в качестве компенсирующего поля для (ψ, ψ^*). Случай $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$, рассматриваемый де Женом [4, 5][1)], подробно разобран в работе [11].

[1)] Де Жен, скорее всего, использовал зависимость $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ для привлечения в потенциал Ландау энергии Франка в качестве упругой энергии.

В данной работе рассмотрим более реалистичный случай: $\mathbf{n} = \mathrm{const}$, $d = d(x)$.

Зависимость $\mathbf{k} = \mathbf{k}(x)$ определяет наличие дислокаций [1]. Положим $\mathbf{n}(x \upuparrows \mathbf{x}_3)$ и перейдем к переменным

$$\mathbf{k}(x) = 2\pi \frac{\mathbf{n}_3}{d(x)} = 2\pi \left(1 + \mu_3(x)\right) \frac{\mathbf{n}_3}{d_0}. \qquad (6)$$

В этом случае

$$(E|\mathbf{a}_3) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\exp(2\pi i \mu_3(\mathbf{x})) \psi(\mathbf{x})\right) =$$
$$= \exp(2\pi i \mu_3(\mathbf{x})) \left[2\pi i \frac{\partial \mu_3(\mathbf{x})}{\partial x_j} \psi(\mathbf{x}) + \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right],$$
$$(E|\mathbf{a}_3)(\gamma A_{3j}) = \gamma A_{3j} + 2\pi \frac{\partial \mu_3}{\partial x_j}, \qquad (7)$$
$$D_j \psi = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\gamma A_{3j}\right) \psi,$$
$$D_j^* \psi^* = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\gamma A_{3j}\right) \psi^*.$$

Мы получили модель, аналогичную рассмотренной в [12]. Отличие между моделью [12] и моделью, описывающей деформированный SmA, при условии $\mathbf{n} = \mathrm{const}$ заключается только в базисных инвариантах упругой энергии:

$$\sigma_{33}^2, \sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2, \quad \sigma_{3i} = e_{ikj}(\partial A_{3j}/\partial x_k). \qquad (8)$$

Упругая энергия, выраженная через инварианты (8), согласуется с упругой энергией, выраженной через тензор деформации, используемой в [6] для описания деформированного SmA без дислокаций.

Опишем эффект экранировки поля напряжений дислокациями в SmA. Согласно (1), (7), (8), локальный потенциал Ландау имеет вид

$$\Phi(\psi, \psi^*, A_{3j}) = \alpha\psi\psi^* + \frac{\beta}{2}(\psi\psi^*)^2 +$$
$$+ \nu_1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\gamma A_{31}\right) \psi \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\gamma A_{31}\right) \psi^* + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - i\gamma A_{32}\right) \psi \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\gamma A_{32}\right) \psi^*\right] +$$
$$+ \nu_3 \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_3} - i\gamma A_{33}\right) \psi \left(\frac{\partial}{\partial x_3} + i\gamma A_{33}\right) \psi^*\right] +$$
$$+ \lambda_1 \left[\left(e_{1kj} \frac{\partial A_{3j}}{\partial x_k}\right)^2 + \left(e_{2kj} \frac{\partial A_{3j}}{\partial x_k}\right)^2\right] +$$
$$+ \lambda_3 \left[\left(e_{3kj} \frac{\partial A_{3j}}{\partial x_k}\right)^2\right]. \qquad (9)$$

Потенциал (9) по форме совпадает с анизотропным потенциалом Гинзбурга–Ландау, если формально компоненты магнитной индукции в уравнениях Гинзбурга–Ландау заменить на компоненты тензора напряжений. Покажем, что система уравнений состояния для потенциала (9) содержит уравнения аналогичные уравнениям Лондонов [13]. В отсутствие внешнего поля напряжений будем искать решение первой пары уравнений состояния $\delta\Phi/\delta\psi = 0$, $\delta\Phi/\delta\psi^* = 0$ в виде

$$\sigma_{3i} = \sigma_{3i}(x_3), \quad |\psi|^2 = \mathrm{const} = -(\alpha/\beta). \qquad (10)$$

Из вариации по полю A_{3j} получаем уравнения состояния:

$$\frac{\delta\Phi}{\delta A_{3j}} = \rho_{3j} - e_{jki} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{3i}}\right) = 0$$

или (11)

$$\rho_{3j} = e_{jki} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{3i}}\right),$$

где плотность дислокаций ρ_{3j} по определению равна

$$\rho_{3j} = \frac{\partial \Phi}{\partial A_{3j}} = -i\gamma\nu_j \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x_j} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) +$$
$$+ 2\gamma^2 \nu_j \psi\psi^* A_{3j}. \qquad (12)$$

При выполнении условий (10) плотность дислокаций ρ_{3j} пропорциональна полю A_{3j}:

$$\rho_{3j} = 2\gamma^2 \nu_j \frac{\alpha}{\beta} A_{3j}. \qquad (13)$$

Подействуем на левую и правую части уравнения (11) оператором rot:

$$e_{nqj} \frac{\partial}{\partial x_q} \rho_{3j} = e_{nqj} e_{jki} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_q} w_{3i}. \qquad (14)$$

Учитывая, что, согласно определению (8), $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}_3 = 0$, в плоском случае (10) получаем $\partial\sigma_{33}/\partial x_3 = 0$, откуда следует, что $\mathrm{div}(\mathbf{w}_3) = 2\lambda_1 \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}_3 + 2(\lambda_3 - \lambda_1)\partial\sigma_{33}/\partial x_3 = 0$, а правая часть формулы (14) имеет вид

$$-\Delta(\omega_{31}, \omega_{32}, \omega_{33}) = -\Delta(\mathbf{w}_3) =$$
$$= 2\lambda_1 (\partial^2\sigma_{31}/\partial^2 x_3, \partial^2\sigma_{32}/\partial^2 x_3, 0). \qquad (15)$$

Подставляя в левую часть (14) выражение (13), получаем для третьей компоненты вектора:

$$e_{3qj} \frac{\partial}{\partial x_q} \rho_{3j} = 2\nu_1 \gamma^2 \frac{\alpha}{\beta} \sigma_{33}$$

и, согласно (15), $\sigma_{33} = 0$. Учитывая, что $\partial A_{33}/\partial x_1 = \partial A_{33}/\partial x_2 = 0$, получаем левую часть формулы (14) в виде

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{\rho}_3) = 2\nu_1 \gamma^2 \frac{\alpha}{\beta} (\sigma_{31}, \sigma_{32}, 0). \qquad (16)$$

Итак, в плоском случае при $|\psi|^2 = \mathrm{const}$ анизотропия (8) не проявляется и мы получили уравнения (16), аналогичные уравнениям Лондонов [13]. Подставляя (15), (16) в (14), получаем уравнения, описывающие эффект выталкивания поля напряжений из SmA:

$$2\nu_1\gamma^2\frac{\alpha}{\beta}\boldsymbol{\sigma}_3 = 2\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\boldsymbol{\sigma}_3. \tag{17}$$

Решение (17) имеет вид $\boldsymbol{\sigma}_3 = \boldsymbol{\sigma}_{03}\exp(-x_3/\delta)$, где $\delta = (-\lambda_1\beta/\nu_1\gamma^2\alpha)^{1/2}$ — глубина проникновения неоднородных искажений в SmA. Из уравнений состояния (15) при условии (10) следует, что

$$\rho_{31} = -2\lambda_1\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}, \quad \rho_{32} = 2\lambda_1\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}, \quad \rho_{33} = 0 \tag{18}$$

и вектор Бюргерса $b_3 = \int\limits_S \rho_{3j}\,dS_j$ направлен перпендикулярно, а линии дислокаций — параллельно плоскостям SmA.

3. ДЕФОРМАЦИИ В КВАЗИКРИСТАЛЛАХ И ЭФФЕКТ УПРОЧНЕНИЯ ДИСЛОКАЦИЯМИ

Рассмотрим приложение данной теории в случае ПП с многолучевой звездой $\{k_l\}$. В качестве примера рассмотрим сплавы, в которых произошел фазовый переход в квазикристаллическое состояние [14]. В квазикристаллическом состоянии сплавы не обладают трансляционной симметрией, в результате чего в них невозможны однородные деформации даже при относительно малых внешних напряжениях. Как известно [15, 16], QCr обладают повышенной прочностью, которая, как предполагается в [15, 16], обусловлена линейными дефектами. Для описания QCr выберем структурный ПП, соответствующий шести волнам плотности, которые приводят к икосаэдрической дифракции [17]. В этой модели, помимо главных минимумов плотности вероятности распределения заряда, существует бесконечно большое число незанятых позиций, полученных в результате интерференции шести волн плотности [17], т. е. компонент ПП, каждой из которых соответствует свой вектор $k_i = k_i(\mathbf{x})$. Поскольку положения второстепенных и главных минимумов достаточно близки, при деформации атомы, скорее всего, будут занимать соседние позиции, и энергия образования дефектов в QCr может быть достаточно малой. Это позволяет нам предположить существование упругих дислокаций в QCr при малых деформациях. Для описания деформированного состояния QCr в модели [17] предположим, что волны плотности обладают локальной трансляционной симметрией, а точечная группа симметрии икосаэдра сохраняется в каждой физической точке QCr. В этом случае компенсирующие поля $\{A^l_{pj}\}$ волн плотности можно выразить через одно поле, которое является потенциалом поля напряжений [1]. Положим, что потенциал поля напряжений A_{pj} при деформациях компенсирует изменение базисных векторов обратного пространства $\mathbf{e}_p(x)$, т. е. будем полагать, что при деформации QCr $\mathbf{k}^i(x) = \mu^l_p\mathbf{e}_p(x)$ и в каждой точке $\mathbf{x}$ волновые векторы составляют звезду $\{k_l\}$. Тогда для звезды, определяющей переход в QCr по [17],

$$\begin{gathered}\mathbf{k}_1 \to (0,1,h), \quad \mathbf{k}_2 \to (0,1,\bar{h}), \quad \mathbf{k}_3 \to (h,0,1),\\ \mathbf{k}_4 \to (\bar{h},0,1), \quad \mathbf{k}_5 \to (1,h,0), \quad \mathbf{k}_6 \to (1,\bar{h},0),\\ h = \left(\sqrt{5}+1/2\right).\end{gathered} \tag{19}$$

Удлиненные производные имеют вид

$$\begin{aligned}
&D^1_j\eta_1 = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} - i\gamma(A_{2j} + hA_{3j})\right]\eta_1,\\
&D^2_j\eta_2 = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} - i\gamma(-A_{2j} + hA_{3j})\right]\eta_2,\\
&D^3_j\eta_3 = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} - i\gamma(hA_{1j} + A_{3j})\right]\eta_3,\\
&D^4_j\eta_4 = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} - i\gamma(hA_{1j} - A_{3j})\right]\eta_4,\\
&D^5_j\eta_5 = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} - i\gamma(A_{1j} + hA_{2j})\right]\eta_5,\\
&D^6_j\eta_6 = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} - i\gamma(-A_{1j} + hA_{2j})\right]\eta_6,\\
&D^{l*}_j\eta^*_j = (D^l_j\eta_l)^*.
\end{aligned} \tag{20}$$

Локальный потенциал Ландау — функция трансляционных инвариантов типа (8) в [1] — инвариантен относительно точечной группы симметрии икосаэдра. Для получения плотности дислокаций в случае многолучевой звезды (19) введем обозначения

$$H^l_j = \frac{\partial\Phi}{\partial(\partial\eta_l/\partial x_j)}\eta_l, \quad H^{l*}_j = \frac{\partial\Phi}{\partial(\partial\eta^*_l/\partial x_j)}\eta^*_l. \tag{21}$$

Из (21) получаем

$$\begin{aligned}
\rho_{1j} = -i\gamma\,&\left[hH^3_j - hH^{3*}_j + hH^4_j - hH^{4*}_j + \right.\\
&\left. + H^5_j - H^{5*}_j - H^6_j + H^{6*}_j\right],\\
\rho_{2j} = -i\gamma\,&\left[H^1_j - H^{1*}_j - H^2_j + H^{2*}_j + \right.\\
&\left. + hH^5_j - hH^{5*}_j + hH^6_j - hH^{6*}_j\right],\\
\rho_{3j} = -i\gamma\,&\left[hH^1_j - hH^{1*}_j + hH^2_j - hH^{2*}_j + H^3_j - \right.\\
&\left. - H^{3*}_j - H^4_j + H^{4*}_j\right].
\end{aligned} \tag{22}$$

Компоненты ρ_{pj} (22) при поворотах из точечной группы икосаэдра преобразуются как компоненты тензора второго ранга. Тензор плотности дислокаций (22) является функцией ПП и поля напряжений и, в конечном итоге, является функцией внешних условий, заданных на термостате.

Полученные выражения для плотности ρ_{ij} (22), совместно с

$$\delta\Phi/\delta\eta_l = 0, \quad \delta\Phi/\delta\tilde{\eta}_l = 0, \tag{23}$$

где $l = 1, \ldots, 6$, приводят к икосаэдрической симметрии уравнений состояния:

$$\frac{\delta\Phi}{\delta A_{pj}} = \rho_{pj} - e_{jki}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{pi}}\right) = 0. \tag{24}$$

Очевидно, что уравнения минимизации не имеют решения $\rho_{pj}(x) = 0$, $\eta^l(x) \neq 0$, так как в этом случае уравнения (24) распадаются на две системы уравнений для $\eta^l(x)$ и $A_{pj}(x)$, одна из которых отвечает распределению поля напряжений без взаимодействия с ПП и в случаях малых деформаций допускает однородные решения $\boldsymbol{\sigma}_p = \mathrm{const}$, $\mathbf{A}_p = |\boldsymbol{\sigma}_p \times \mathbf{x}|$. Подставим решения уравнений состояния для свободного поля напряжений $A_{pj}(x)$ в (23) и в систему $\rho_{pj}(x) = 0$. Очевидно, что решения системы уравнений состояния (23) для $\eta_l(x)$, $\eta_l^*(x)$ не будут совместны с системой уравнений $\rho_{pj}(x) = 0$, которая имеет вид (22).

Следовательно, при условии $\eta_l(x) \neq 0$ система уравнений минимизации при наличии поля напряжений может иметь только решения $\rho_{pj}(x) \neq 0$ и описывает эффект упрочнения квазикристаллических сплавов путем образования плотности дислокаций при внешних воздействиях. Мы не говорим о полной экранировке поля напряжений в QCr. Для нас важно то, что в деформированном состоянии система с необходимостью содержит упругие дислокации [1]. Это обстоятельство дает нам основание говорить об упрочнении QCr дислокациями, поскольку они являются функциями состояния и появляются даже при малых деформациях. Приведенный пример для нас важен еще и с методологической точки зрения. Он иллюстрирует метод построения локального потенциала Ландау для сложных моделей с многолучевой звездой вектора $\mathbf{k}$, характеризующего преобразование ПП QCr под действием операций трансляции высокосимметричной (кристаллической) фазы металла.

4. ТРАНСЛЯЦИОННАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛА ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ

Для описания эффектов экранировки поля напряжений, обусловленных взаимодействием ПП и тензора напряжений, мы воспользовались требованием трансляционной инвариантности при построении локального потенциала Ландау. При этом были получены модели, аналогичные исследуемым в [13], но понятие калибровочной симметрии при построении неоднородного потенциала Ландау не использовалось. Аналогия в структуре уравнений состояния, описывающих эффекты экранировки поля напряжений в SmA и магнитного поля в сверхпроводниках, позволяет предположить существование аналогии и в обосновании процедуры удлинения производных. Приведем такой формальный вывод уравнений Гинзбурга – Ландау, исходя из локальности трансформационных свойств сверхпроводящего ПП по отношению к временным трансляциям. Действительно, все неприводимые представления подгруппы временных трансляций $\hat{\tau}$ одномерны и нумеруются одним непрерывным размерным параметром ω [2, с. 92]:

$$\hat{\tau}\psi = e^{i\omega\tau}\psi, \quad \hat{\tau}\psi^* = e^{-i\omega\tau}\psi^*. \tag{25}$$

Предположим, что волновая функция $\psi(x)$ пространственно-неоднородного сверхпроводящего состояния является собственной функцией оператора временных трансляций $\hat{\tau}$ и рассмотрим случай $\omega = \omega(x)$. Тогда компенсирующее поле сверхпроводящего ПП определено с точностью до градиента $\omega(x)$:

$$\hat{\tau}(\gamma A_j) = \gamma A_j + \frac{\partial\omega}{\partial x_j}\tau \tag{26}$$

и необходимо перейти к удлиненным производным:

$$\begin{aligned} D_j\psi &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\gamma A_j\right)\psi, \\ D_j^*\psi^* &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\gamma A_j\right)\psi^*. \end{aligned} \tag{27}$$

По своим трансформационным свойствам введенное компенсирующее поле соответствует электромагнитному потенциалу, так как из (25)–(27) следует, что поле $A_j(x)$ — векторное и меняет знак при инверсии времени. Точно так, как это предполагается в теории поля [2, с. 93], вектор $A_j(x)$ может быть отождествлен с вектор-потенциалом электромагнитного поля. Соответственно, полагая в (25)–(27) $\gamma = 2e/\hbar c$

и учитывая в потенциале Ландау пространственно-неоднородные (роторные) инварианты компенсирующего поля $B_i = e_{ikj}\partial A_j/\partial x_k$, получаем в точности потенциал Гинзбурга–Ландау [13], описывающий сверхпроводящее состояние. Другими словами, если $\gamma = 2e/\hbar c$, то электромагнитный потенциал может выполнять роль компенсирующего поля для ПП (25) с локальными трансформационными свойствами. Действительно, так как звезда компенсирующих полей для (25) тривиальна и состоит из двух полей: поля $A_j(x)$, соответствующего $\psi(x)$, и поля $A_j^*(x) = -A_j(x)$, соответствующего $\psi^*(x)$, то, чтобы диагонализовать градиенты ПП, достаточно одного векторного поля, которое меняло бы знак при инверсии времени. Обратим внимание на то обстоятельство, что трансформационные свойства компенсирующего поля при инверсии времени в калибровочной теории поля постулируются [2, 18], так как калибровочное преобразование $\hat{g}\psi(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ — это преобразование в пространстве функции, где $\alpha(x)$ — безразмерный параметр, и оно не связано со сдвигом во времени. В методе получения потенциала Гинзбурга–Ландау, по аналогии с рассуждениями [1], для ПП с локальными трансформационными свойствами при временных трансляциях изменение знака компенсирующего поля при инверсии времени есть необходимое требование, связанное с построением удлиненных производных (27). Это обстоятельство и дает нам возможность интерпретировать компенсирующее поле как электромагнитный потенциал для уравнений Максвелла.

Таким образом, для построения потенциала Гинзбурга–Ландау, описывающего переход в сверхпроводящее состояние, достаточно потребовать локальности трансформационных свойств ПП относительно временных трансляций. И наоборот, если проследить аналогию со SmA, то можно сделать вывод, что взаимодействие сверхпроводящего ПП с электромагнитным потенциалом $A_j(x)$ через удлиненные производные приводит к неоднородному распределению частотных характеристик ПП: $\omega = \omega(x)$, аналогично распределению $\mathbf{k} = \mathbf{k}(x)$ в деформированном SmA. Таким образом, внешнее магнитное поле должно размывать спектр сверхпроводящего ПП по координате $\mathbf{x}$, что приводит к взаимодействию (27) и образованию токов, выталкивающих это поле.

Попробуем определить ток, исходя из зависимости $\omega = \omega(x)$, по аналогии с выражением для определения числа дислокаций (2) в состоянии с $\mathbf{k} = \mathbf{k}(x)$. Следуя формальной логике, посчитаем число «колебаний» за время T в объеме с координатой $\mathbf{x}$:

$$\nu_T(x) = \int_T \omega(x)\,dt. \tag{28}$$

Выражение (28) аналогично числу ячеек в кристалле, просуммированному по длине L. Тогда разность числа «колебаний» в соседних областях за время T, $\nu_T(x_1) - \nu_T(x_2)$, характеризует несовместность на границе между областями (физическими точками) x_1 и x_2. Возникающая несовместность числа «колебаний» должна индуцировать ток, по аналогии с несовместностями решетки, при $\mathbf{k} = \mathbf{k}(x)$, которые и определяют дислокации [19]. В построенной нами формальной аналогии моделей с удлиненными производными возникающие несовместности связаны с локальностью трансформационных свойств ПП и определяют наблюдаемые поля. Поэтому вслед за дислокациями и ток должен быть определен как несовместность — несовместность числа «колебаний». Определим несовместный поток за время T как производную

$$j_k^T(x) = \partial\nu_T(x)/\partial x_k. \tag{29}$$

Выражение (29) обусловлено зависимостью $\omega = \omega(x)$, которая одновременно характеризует трансформационные свойства волновой функции. Мы использовали здесь представление о волновой функции $\psi(x)$ как бесконечного числа осцилляторов в каждой точке пространства, которое так же, как и калибровочное преобразование в [13], заимствовано из теории поля.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Если в феноменологической теории Ландау учитывать локальные трансформационные свойства ПП при действии операторов трансляции, то физические состояния описываются парами переменных компонент ПП и их компенсирующими полями. Трансляционная инвариантность неравновесного потенциала приводит к симметрийно обусловленному взаимодействию ПП с потенциалом поля напряжений и электромагнитным потенциалом. Неоднородный потенциал Ландау содержит уравнения теории упругости Кренера и уравнения Максвелла, в которых плотность дислокаций и плотность тока являются функциями состояния. В рамках построенного формализма нам удалось решить проблему де Жена, написать инвариантный потенциал Ландау, описывающий выталкивание поля напряжений из SmA. Предложенный формализм также позволяет описывать процедуру упрочнения дислокациями упорядочивающихся сплавов при внешних напряжениях, что было показано нами на примере QCr. Удивительным образом оказалось, что локальный потенциал Ландау содержит в точности потенциал Гинзбурга–Ландау, если ПП обладает локальными трансформационными свойствами по отношению к временным трансляциям.

При написании моделей неоднородных состояний в континуальной теории Ландау мы нигде не прибегали к использованию абстрактной калибровочной группы симметрии. Модели с удлиненными производными, которые и задают взаимодействие ПП и компенсирующих полей, были получены из предположения локальности неприводимого представления подгруппы трансляции.

Полученные положительные результаты, представленные в данной работе, убедили нас в том, что для получения минимальных взаимодействий [2, 18] в потенциале Ландау достаточно учесть инвариантность потенциала относительно пространственно-временных смещений. Неоднородные состояния описываются неоднородными неприводимыми представлениями подгруппы трансляций, что приводит, в конечном итоге, к выявлению структуры взаимодействий ПП и его компенсирующего поля, записанной через удлиненные производные. В отличие от теории поля, где исследуются калибровочные абелевы модели с одним параметром $\alpha(x)$ [2, 18], наше представление — произведение трех неприводимых неоднородных представлений абелевых групп с тремя параметрами $\mu_p(x)$. Поскольку под действием оператора из точечной группы симметрии эти параметры переходят друг в друга и преобразуются как векторы, для их компенсации потребовалось введение тензорного поля $A_{pj}(x)$. Так как многопараметрические абелевы модели в теории поля не рассматривались [2, 18], то мы и получили оригинальную математическую модель с новыми результатами. Использование концепции неоднородного неприводимого представления для подгруппы временных трансляций привело к тому, что для компенсации $\partial\omega/\partial x_j$ нам потребовалось введение векторного поля, которое меняет знак при инверсии времени по определению, так как ω — размерный параметр. Все сказанное выше позволяет сделать вывод о том, что абелевы калибровочные группы в физических моделях, отвечающие за минимальные взаимодействия [2, 18], являются следствием локальности трансформационных свойств ПП, описывающего неоднородное физическое состояние, по отношению к подгруппе трансляций пространства-времени.

Автор признателен Ю. М. Гуфану за обсуждение результатов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-02-16858а).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Брагинский, ЖЭТФ **132**, вып. 7 (2007).
2. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Квантовые поля*, Наука, Москва (1980).
3. J.-Cl. Toledano and P. Toledano, *The Landau Theory of Phase Transitions*, World Science, Singapore (1990).
4. P. G. De Geness, Sol. St. Comm. **10**, 753 (1972).
5. P. G. De Geness, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon Press, Oxford (1974).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, т. 7, Наука, Москва (1987).
7. С. Чандрасекар, *Жидкие кристаллы*, Мир, Москва (1980).
8. B. I. Halperin and T. C. Lubensky, Sol. St. Comm. **14**, 997 (1974).
9. T. C. Lubensky and J.-H. Chen, Phys. Rev. B **17**, 366 (1978).
10. T. C. Lubensky, S. G. Dunn, and J. Isaacson, Phys. Rev. Lett. **47**, 1609 (1981).
11. A. Ya. Braginsky, Phys. Rev. B **67**, 174113 (2003).
12. А. Я. Брагинский, ФТТ **32**, 2121 (1990).
13. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **20**, 1064 (1950).
14. D. Shechtman, I. Blech, B. Gratias, and J. W. Cahn, Phys. Rev. Lett. **53**, 1951 (1984).
15. A. J. Melmed and A. R. Klein, Phys. Rev. Lett. **56**, 1478 (1986).
16. K. Hiraga and M. Hirabayaschi, J. Appl. Phys. **26**, L155 (1987).
17. В. П. Дмитриев, С. Б. Рошаль, В. Л. Лорман, П. Толедано, ФТТ **33**, 1990 (1991).
18. А. А. Славнов, Л. Д. Фадеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, Москва (1978).
19. Дж. Эшелби, *Континуальная теория дислокаций*, Изд-во иностр. лит., Москва (1963).