ЖЭТФ, 2007, том 131, вып. 5, стр. 938–948

ЭФФЕКТ МЕЙССНЕРА В СВЕРХПРОВОДНИКАХ С КОНЕЧНЫМ ИМПУЛЬСОМ ПАР

*В. Ф. Елесин**

Московский инженерно-физический институт (государственный университет)
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 декабря 2006 г.

В работе дан анализ особенностей эффекта Мейсснера в сверхпроводниках с конечным импульсом спаривания. Рассчитан отклик на слабое магнитное поле для различных случаев, перекрывающих диапазон импульса пары от $q \ll \Delta/v_0$ до $q \sim p_0$, включая $q \approx \Delta_0/v_0$ (v_0 — скорость на поверхности Ферми, Δ_0 — параметр порядка при нулевой температуре, $\hbar = 1$). Найден отклик сверхпроводника, несущего транспортный ток, при температуре T, близкой к критической T_c. Показано, что при некотором критическом значении импульса (тока) отклик, параллельный импульсу, обращается в нуль, а лондоновская длина оказывается бесконечной. Отклик, перпендикулярный импульсу, не испытывает изменений. Вычислен отклик сверхпроводника в токовом состоянии при нулевой температуре. Обнаружен новый вклад в парамагнитный ток и выяснен его механизм. Этот вклад может оказаться существенным при больших импульсах $q \sim p_0$. Детально изучен эффект Мейсснера в состоянии, предложенном Ларкиным, Овчинниковым, Фулде, Феррелом [3, 4]. Показано, что отклик, параллельный вектору $\mathbf{q}$, отличен от нуля и имеет диамагнитный характер. Напротив, отклик, перпендикулярный импульсу, равен нулю при оптимальном значении импульса $\mathbf{q}_0$. В работе продемонстрирована чувствительность эффекта Мейсснера к тонким особенностям сверхпроводящего состояния, таким как спектр квазичастиц, когерентные факторы и др.

PACS: 74.20.-z, 74.20.Mn, 74.72.-h

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания ВТСП было предложено много различных моделей сверхпроводимости, в частности, с конечным импульсом спаривания q [1, 2] (в отличие от БКШ, где в основном состояния $q = 0$). Представляет интерес изучить их свойства, особенно такое фундаментальное, как эффект Мейсснера. Спаривание с конечным импульсом реализуется также в токовых состояниях сверхпроводника, несущего транспортный ток. Интересным и поучительным примером является так называемое ЛОФФ (FFLO)-состояние, предложенное в пионерских работах Ларкина, Овчинникова, Фулде и Феррела [3, 4]. В этом состоянии спаривание с конечным q является энергетически выгодным из-за присутствия обменного поля, стремящегося развернуть спины куперовской пары.

Цель работы — расчет отклика на внешнее слабое магнитное поле и анализ особенностей эффекта Мейсснера сверхпроводников, у которых спаривание идет с конечным значением импульса. С учетом того, что эффект Мейсснера является чувствительным к тонким особенностям сверхпроводящего состояния, таким как спектр квазичастиц, когерентные факторы и др., предполагается провести сравнительный анализ отклика для различных случаев, перекрывающих диапазон импульса пары от $qv_0 \ll \Delta_0$ до $q \sim p_0$, включая $qv_0 \sim \Delta_0$ (v_0 — скорость на поверхности Ферми, Δ_0 — параметр порядка при нулевой температуре).

В разд. 2 найден отклик сверхпроводника при $T \to T_c$, несущего транспортный ток, в рамках уравнений Гинзбурга–Ландау (ГЛ). Показано, что при некотором критическом значении импульса (тока) отклик, параллельный импульсу, обращается в нуль (соответственно, лондоновская длина оказывается равной бесконечности). Раздел 3 посвящен вычислению отклика сверхпроводника с током при $T = 0$. Обнаружен новый вклад в парамагнитный ток, который может оказаться существенным при

*E-mail: VEF@supercon.mephi.ru

больших импульсах спаривания $q \sim p_0$. Механизм нового вклада выясняется в разд. 4 с использованием формализма теории БКШ. Раздел 5 посвящен детальному изучению эффекта Мейсснера в ЛОФФ-состоянии. Дело в том, что в работе [3] были приведены только качественные оценки отклика, а в работе [4] отклик не вычислялся для важного случая $\Delta_0(\mathbf{r}) = \Delta_0 \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$.

2. ОТКЛИК НА СЛАБОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ПРИСУТСТВИИ ТРАНСПОРТНОГО ТОКА ПРИ ТЕМПЕРАТУРЕ, БЛИЗКОЙ К КРИТИЧЕСКОЙ

В токовом состоянии импульс куперовской пары (и конденсата) отличен от нуля. Спектр квазичастиц и волновая функция изменяются. Поэтому следует ожидать, что парамагнитный ток отреагирует на это. Простейшая для изучения ситуация возникает при температуре T вблизи критической. В этом случае применимы уравнения ГЛ (см. [5]):

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - 2ei\mathbf{A}\right)^2 + |\alpha| - \beta|\Delta|^2\right]\Delta(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{j} = \frac{C}{m}\left[ie\left(\Delta\frac{\partial\Delta^*}{\partial\mathbf{r}} - \Delta^*\frac{\partial\Delta}{\partial\mathbf{r}}\right) - 4e^2\mathbf{A}(\mathbf{r})|\Delta|^2)\right], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &C = \frac{7\zeta(3)N}{16(\pi T_c)^2}, \quad N = \frac{p_0^2}{3\pi^3}, \quad \beta = 6/v_0^2, \\ &\alpha = \frac{48(\pi T_c)^2}{7\zeta(3)v_0^2}, \quad p_0 = mv_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\Delta(\mathbf{r})$ — параметр порядка, $\mathbf{j}$ — ток (отклик), v_0 — скорость Ферми, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — медленно меняющийся вектор-потенциал, удовлетворяющий условию лондоновской калибровки

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \quad (4)$$

В отсутствие магнитного поля параметр порядка $\Delta_0(\mathbf{r})$ находится из уравнения

$$\frac{\partial^2\Delta_0}{\partial r^2} + |\alpha|\Delta_0 - \beta\Delta_0|\Delta_0|^2 = 0. \quad (5)$$

В слабом магнитном поле параметр порядка $\Delta(\mathbf{r})$ можно представить в виде

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0(\mathbf{r}) + \Delta_1(\mathbf{r}), \quad (6)$$

где $\Delta_1(\mathbf{r})$ — малая поправка, возникающая, вообще говоря, под действием поля. Уравнение для $\Delta_1(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\frac{\partial^2\Delta_1}{\partial r^2} + |\alpha|\Delta_1 - \beta\left[2\Delta_1|\Delta_0|^2 + \Delta_1^*\Delta_0^2\right] = \\ = 4ie\left(\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\Delta_0(\mathbf{r}). \quad (7)$$

В отсутствие транспортного тока $\Delta_0(\mathbf{r})$ не зависит от координаты. В этом случае из (6) и (7) следует

$$|\Delta_0|^2 = \frac{|\alpha|}{\beta}, \quad \Delta_1(\mathbf{r}) = 0. \quad (8)$$

Последнее вытекает из обращения в нуль правой части неоднородного уравнения (7). Этот хорошо известный результат связан с тем, что скалярная поправка $\Delta_1(\mathbf{r})$ может зависеть от вектора $\mathbf{A}$ только через $\operatorname{div}\mathbf{A}$, которая равна нулю согласно (4). Если $\Delta_1(\mathbf{r}) = 0$, то отклик (2) равен

$$\mathbf{j} = -\frac{4e^2\mathbf{A}\,C|\Delta_0|^2}{m}, \quad (9)$$

приводя к эффекту Мейсснера с лондоновской длиной

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{4\pi C|\Delta_0|^2 4e^2}{m}. \quad (10)$$

В токовом состоянии (и при $\mathbf{A} = 0$), когда импульс пары равен $\mathbf{q}$, параметр порядка зависит от координаты:

$$\Delta_0(\mathbf{r}) = \Delta_0(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad \Delta_0^2(\mathbf{q}) = \frac{|\alpha|^2 - q^2}{\beta} \quad (11)$$

и соответствующий ток равен

$$\mathbf{j}_0 = \frac{2\mathbf{q}e\,|\Delta_0(\mathbf{q})|^2 C}{m} \quad (12)$$

Здесь и ниже мы решаем упрощенную задачу, предполагая модуль $|\Delta_0|$ не зависящим от координаты (см. [6]).

Теперь рассмотрим токовое состояние ($\mathbf{q} \neq 0$) в присутствии слабого магнитного поля. Будем искать поправку $\Delta_1(\mathbf{r})$ в виде

$$\Delta_1(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (13)$$

Для функций $f(\mathbf{r})$ и $f^*(\mathbf{r})$ получаем уравнения

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - 2i\mathbf{q}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{r}} + b(f + f^*) = \\ = \widetilde{A}(\mathbf{r}) \equiv 4e\Delta_0(\mathbf{q})\left(\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{q}\right) \quad (14)$$

$$-\frac{\partial^2 f^*}{\partial r^2}+2i\mathbf{q}\frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{r}}+b(f+f^*)=\widetilde{A}(\mathbf{r}), \quad b=\beta\Delta_0^2(\mathbf{q}). \tag{15}$$

Вектор-потенциал зададим в форме

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=A_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}+A_k^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad A_k=A_k^*, \tag{16}$$

причем ввиду медленности изменения поля будем считать $\mathbf{k}$ малым. Несмотря на внешнюю простоту системы уравнений (14) и (15), ее решение и последующий предельный переход $k\to 0$ требуют определенной тщательности. Поэтому опишем эту процедуру достаточно подробно. Ищем решение уравнений (14) и (15) в виде

$$f(\mathbf{r})=B_+e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}+B_-e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad f^*(\mathbf{r})=\widetilde{B}_+e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}+\widetilde{B}_-e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{17}$$

В свою очередь, B_+ и B_- удовлетворяют системе неоднородных алгебраических уравнений

$$\left(k^2+b+2\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}\right)B_+ + b\widetilde{B}_+ = 4e\Delta_0(\mathbf{q})(\mathbf{A}_k\mathbf{q})\equiv\widetilde{A}(\mathbf{q}), \tag{18}$$

$$bB_+ + \left(k^2+b-2\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}\right)\widetilde{B}_+=\widetilde{A}(\mathbf{q}). \tag{19}$$

Решение системы (18) и (19) выглядит следующим образом:

$$B_+=\frac{\left(k^2-2\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}\right)\widetilde{A}(\mathbf{q})}{D}, \quad \widetilde{B}_+=\frac{\left(k^2+2\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}\right)\widetilde{A}(\mathbf{q})}{D}, \tag{20}$$

$$D=2k^2b+k^4-4(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})^2. \tag{21}$$

Аналогично, для B_- и $\widetilde{B}_-$ нетрудно найти

$$B_-=\frac{\left(k^2+2\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}\right)\widetilde{A}(\mathbf{q})}{D}=\widetilde{B}_+, \quad \widetilde{B}_-=\frac{\left(k^2-2\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}\right)\widetilde{A}(\mathbf{q})}{D}=B_+. \tag{22}$$

Следует отметить, что необходимо удерживать квадратичные по $\mathbf{k}$ члены, поскольку вклад в определитель D (который стремится к нулю при $k\to 0$) от квадратичного члена имеет тот же порядок, что и от линейного. Если сразу в (18), (19) опустить k^2, то придем к неправильному результату.

Продемонстрируем это на примере ключевой величины $f+f^*$, определяющей отклик в магнитном поле:

$$f(\mathbf{r})+f^*(\mathbf{r})=\left(B_++\widetilde{B}_+\right)\left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}+e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right]. \tag{23}$$

Как следует из формулы (20), интересующая нас сумма $B_++\widetilde{B}_+$ при $k\to 0$,

$$B_++\widetilde{B}_+=\frac{2k^2\widetilde{A}(\mathbf{q})}{D}\approx\frac{\widetilde{A}(\mathbf{q})}{[b-2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})^2/k^2]}, \tag{24}$$

отлична от нуля (и конечна при $k\to 0$). Если же ограничиться в (18), (19) линейным по $\mathbf{k}$ членом, то сумма равна нулю:

$$B_++\widetilde{B}_+=0, \quad B_+=-\widetilde{B}_+=\frac{\widetilde{A}(\mathbf{q})}{2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})}. \tag{25}$$

Как увидим ниже (см. разд. 4), именно такое приближение сделано в работе [3].

Переходим к вычислению отклика. Подставляя поправку $\Delta_1(\mathbf{r})$ из (20) и (17) в (2), получаем

$$\mathbf{j}(\mathbf{r})=\frac{e\Delta_0(\mathbf{q})C}{m}\times\left\{\left[2\mathbf{q}(f+f^*)+i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(f^*-f)\right]-4e\Delta_0(\mathbf{q})\mathbf{A}\right\}= \tag{26}$$

$$=\frac{4e^2\Delta_0^2(\mathbf{q})C}{m}\left[\frac{2\mathbf{q}^{tr}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}))}{\left(b-2\frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})^2}{k^2}\right)}-\mathbf{A}(\mathbf{r})\right], \tag{27}$$

$$\mathbf{q}^{tr}=\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})}{k^2}, \quad (\mathbf{q}^{tr}\cdot\mathbf{k})=0.$$

Отметим, что отклик (27) удовлетворяет условию сохранения тока $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$ с учетом калибровки (4). Можно выполнить расчеты в калибровочно-инвариантной форме. В результате приходим к равенству (27), но вектор-потенциал $\mathbf{A}$ следует заменить на

$$\mathbf{A}^{tr}=\mathbf{A}-\frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})}{k^2}, \quad (\mathbf{A}^{tr}\cdot\mathbf{k})=0, \tag{28}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r})=\frac{4e^2\Delta_0^2(\mathbf{q})C}{m}\times\left[\frac{2\mathbf{q}^{tr}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}^{tr}(\mathbf{r}))}{\left(b-2\dfrac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})^2}{k^2}\right)}-\mathbf{A}^{tr}(\mathbf{r})\right]. \tag{29}$$

Отклик (29) автоматически удовлетворяет условию $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$.

Далее удобно представить вектор-потенциал в виде вектора $\mathbf{A}_\parallel^{tr}$, параллельного $\mathbf{q}$, и $\mathbf{A}_\perp^{tr}$, перпендикулярного $\mathbf{q}$ (см. [4]). Нетрудно видеть, что вклад в парамагнитный отклик вносит только $\mathbf{A}_\parallel^{tr}$. Учитывая, что вектор $\mathbf{k}$ перпендикулярен $\mathbf{A}_\parallel^{tr}$, а следовательно и $\mathbf{q}$, имеем $(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})=0$. Таким образом, получаем

$$\mathbf{J}_\parallel(\mathbf{r})=-\frac{\mathbf{A}_\parallel^{tr}(\mathbf{r})}{4\pi\lambda_\parallel^2(q)}, \quad \frac{1}{\lambda_\parallel^2(q)}=\frac{1}{\lambda^2}\left(1-\frac{3q^2}{|\alpha|}\right), \tag{30}$$

$$\mathbf{J}_{\perp}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r})}{\lambda_{\perp}^2}, \quad \frac{1}{\lambda_{\perp}^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{31}$$

Как видно из формул (30) и (31), отклик становится анизотропным, причем $\mathbf{J}_{\perp}$ остается прежним (как при $\mathbf{q} = 0$) с обычной лондоновской длиной λ^2 (см. (10)). Напротив, $\mathbf{J}_{\parallel}$ уменьшается с ростом q^2 и при некотором критическом значении

$$q_c^2 = |\alpha|/3 \tag{32}$$

обращается в нуль, а лондоновская длина $\lambda_{\parallel}(q_c)$ — в бесконечность.

Причина такого поведения состоит в следующем. Вектор-потенциал $\mathbf{A}_{\parallel}$ взаимодействует с электронами той области импульсного пространства, где импульс $\mathbf{q}$ уменьшает щель спектра квазичастиц и число пар ($T \neq 0$). Напротив, $\mathbf{A}_{\perp}$ имеет дело с электронами, не испытывающими разрушающего действия $\mathbf{q}$.

Если далее увеличивать $q > q_c$, то отклик (30) и квадрат длины $\lambda_{\parallel}^2(q)$ меняют знак, что соответствовало бы парамагнетизму. (Заметим, что параметр порядка $\Delta_0(q)$, согласно формуле (11), оставался бы не равным нулю в интервале $q_c^2 < q^2 < 3q_c^2$.) Однако известно (см., например, [7]), что отрицательность $1/\lambda^2(q)$ (плотности сверхтекучей компоненты) означает неустойчивость системы относительно неоднородных возмущений.

Критерий неустойчивости (32) согласуется с критерием фазового перехода первого рода сверхпроводника с током в нормальное состояние [6]. Действительно, рассмотрим состояние с заданным током j_0 (12) (а не $\mathbf{q}$!). Полагая $\Delta_0^2(q) = |\alpha|\psi^2/\beta$ и исключая q из (12) и (11), получаем связь тока с безразмерным параметром порядка ψ:

$$j_0 = \psi^2(1-\psi^2)^{1/2}\left[\frac{4eC|\alpha|^{3/2}}{m\beta}\right]. \tag{33}$$

Зависимость параметра порядка ψ от тока носит двузначный характер. В интервале $1 > \psi^2 > 2/3$ величина ψ уменьшается с ростом тока j_0, а затем при $2/3 > \psi^2 > 0$ начинает расти. Естественно, эта область является неустойчивой, и поэтому параметр порядка, достигнув $\psi_c^2 = 2/3$, скачком (переход первого рода) обращается в нуль. Соответствующий импульс

$$q^2 = |\alpha|(1-\psi^2) = \frac{|\alpha|}{3} \tag{34}$$

в точности совпадает с критическим (32).

В заключение отметим, что изменение отклика на слабое поле связано только с поправкой параметра порядка $\Delta_1(\mathbf{r})$.

3. ОТКЛИК СВЕРХПРОВОДНИКА В ПРИСУТСТВИИ ТРАНСПОРТНОГО ТОКА ПРИ НУЛЕВОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Рассмотрим другой предельный случай, когда температура равна нулю. Он интересен тем, что поправка к параметру порядка $\Delta_1(\mathbf{A})$ отсутствует, но парамагнитный ток оказывается конечным. Анализ позволяет выяснить физический смысл этого результата, а также микроскопический механизм обращения в нуль парамагнитного тока при $q = 0$.

Будем исходить из уравнений Горькова (см. [5])

$$\left\{i\omega + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - ie\mathbf{A}\right)^2 + \mu\right\}G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') + {} + \Delta(\mathbf{r})\mathcal{F}_\omega^+(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{35}$$

$$\left\{-i\omega + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} + ie\mathbf{A}\right)^2 + \mu\right\}\mathcal{F}_\omega^+(\mathbf{r},\mathbf{r}') - {} - \Delta^*(\mathbf{r})G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0, \tag{36}$$

$$\Delta(\mathbf{r}) = |\lambda|\sum_\omega \mathcal{F}_\omega^+(\mathbf{r},\mathbf{r}), \tag{37}$$

где $G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \mathcal{F}_\omega^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ (а также $\mathcal{F}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}')$) — температурные функции Грина, остальные обозначения стандартные. В токовом состоянии параметр порядка зависит от $\mathbf{r}$:

$$\Delta(\mathbf{r}) = \widetilde{\Delta}(\mathbf{r})e^{2i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \tag{38}$$

Удобно перейти к новым функциям:

$$G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') = e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\widetilde{G}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\omega^+(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{r}')}\widetilde{\mathcal{F}}_\omega^+(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \\ \mathcal{F}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{r}')}\widetilde{\mathcal{F}}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \end{aligned} \tag{40}$$

для которых получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\left\{i\omega + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} + i\mathbf{q}\right)^2 - {} \right.\right. \\ &\left.\left. - i2e\mathbf{A}(\mathbf{r})\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} + i\mathbf{q}\right)\right] + \mu\right\}\widetilde{G}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') + {} \\ &+ \widetilde{\Delta}(\mathbf{r})\widetilde{\mathcal{F}}_\omega^+(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \\ &\left\{-i\omega + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - i\mathbf{q}\right)^2 + {} \right.\right. \\ &\left.\left. + i2e\mathbf{A}(\mathbf{r})\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - i\mathbf{q}\right)\right] + \mu\right\}\widetilde{\mathcal{F}}_\omega^+(\mathbf{r},\mathbf{r}') - {} \\ &- \tilde{\Delta}^*(\mathbf{r})\widetilde{G}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Здесь использована лондоновская калибровка (4) и опущен квадратичный член A^2. Мы будем считать магнитное поле и вектор-потенциал $A(\mathbf{r})$ малыми, так что справедливо разложение

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Delta}(\mathbf{r}) = \Delta_0 + \Delta^{(1)}(\mathbf{r}), \quad \widetilde{G}_\omega = G_{0\omega} + \widetilde{G}^{(1)}_\omega,\\ &\widetilde{\mathcal{F}}^+_\omega = \mathcal{F}_{0\omega} + \widetilde{\mathcal{F}}^{+(1)}_\omega, \quad \widetilde{\mathcal{F}}_\omega = \mathcal{F}_{0\omega} + \widetilde{\mathcal{F}}^{(1)}_\omega.\end{aligned} \tag{42}$$

В нулевом приближении уравнения (41) принимают вид

$$\begin{aligned}&\widehat{H}_q G_{0\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \Delta_0 \mathcal{F}^+_{0\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\\ &\widehat{H}^*_q \mathcal{F}^+_{0\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \Delta_0 G_{0\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0,\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}&\widehat{H}_q \mathcal{F}_{0\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \Delta_0 G_{0,-\omega}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = 0,\\ &\Delta_0 = |\lambda| \sum_w \mathcal{F}^+_{0\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}),\end{aligned} \tag{44}$$

где

$$\widehat{H}_q = \left\{ i\omega + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + i\mathbf{q}\right)^2 + \mu \right\},$$

$$\widehat{H}^*_q = \left\{ -i\omega + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - i\mathbf{q}\right)^2 + \mu \right\}.$$

Переходя к фурье-образам, получаем известные решения (см., например, [8])

$$G_{0\omega}(p) = \left[\frac{\widetilde{u}^2_p}{i\omega - \varepsilon_p - \mathbf{v}\cdot\mathbf{q}} + \frac{\widetilde{v}^2_p}{i\omega - \mathbf{v}\cdot\mathbf{q} + \varepsilon_p}\right], \tag{45}$$

$$\mathcal{F}^+_{0\omega}(p) = \frac{\Delta_0}{2\varepsilon_p}\left[\frac{1}{i\omega - \mathbf{v}\cdot\mathbf{q} + \varepsilon_p} - \frac{1}{i\omega - \mathbf{v}\cdot\mathbf{q} - \varepsilon_p}\right] = \mathcal{F}_{0\omega}(p), \tag{46}$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{\widetilde{\xi}^2_p + \Delta^2_0}, \quad \widetilde{u}^2_p, \widetilde{v}^2_p = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\widetilde{\xi}_p}{\varepsilon_p}\right),$$
$$\widetilde{\xi}_p = \frac{p^2}{2m} - \left(\mu - \frac{q^2}{2m}\right). \tag{47}$$

Уравнения для функций $G^{(1)}_\omega$, $\mathcal{F}^{+(1)}_\omega$ и $\Delta^{*(1)}$ можно представить в форме

$$\widehat{H}_q G^{(1)}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \Delta_0 \mathcal{F}^+_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\Delta^{(1)}(\mathbf{r})\mathcal{F}^+_{0\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \frac{ie}{m}\left(\mathbf{A}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + i\mathbf{q}\right)\right) G_{0\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \equiv L_G(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \tag{48}$$

$$\widehat{H}^*_q \mathcal{F}^{+(1)}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \Delta_0 G^{(1)}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \Delta^{*(1)}(\mathbf{r}) G_{0\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \frac{ie}{m}\left(\mathbf{A}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + i\mathbf{q}\right)\right) \mathcal{F}^+_{0\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \equiv L_{\mathcal{F}}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \tag{49}$$

$$\Delta^{*(1)}(\mathbf{r}) = |\lambda| T \sum_\omega \mathcal{F}^{+(1)}_\omega(\mathbf{r}',\mathbf{r}). \tag{50}$$

Следуя известному методу (см., например, [5]), найдем решения уравнений (48) и (49), используя (41) и (42):

$$\begin{aligned}G^{(1)}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \int dl\, \{G_{0\omega}(\mathbf{r}-\mathbf{l}) L_G(\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}') - \mathcal{F}_{0\omega}(\mathbf{r}-\mathbf{l}) L_{\mathcal{F}}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}')\},\\ \mathcal{F}^{+(1)}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \int dl\, \{\mathcal{F}_{0\omega}(\mathbf{r}-\mathbf{l}) L_G(\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}') + G_{0,-\omega}(\mathbf{l}-\mathbf{r}) L_{\mathcal{F}}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}')\}.\end{aligned} \tag{51}$$

Поправка к параметру порядка $\Delta^{*(1)}(\mathbf{r})$ должна определяться из интегрального уравнения (50), которое после подстановки $\mathcal{F}^{+(1)}_\omega$ из (51) принимает вид

$$\begin{aligned}&\Delta^{*(1)}(\mathbf{r}) - |\lambda| T \times \sum_\omega \int dl \Big\{ G_{-\omega}(\mathbf{l}-\mathbf{r}) \Delta^{*(1)}(\mathbf{l}) G_\omega(\mathbf{l}-\mathbf{r}) - \mathcal{F}^+_\omega(\mathbf{r}-\mathbf{l}) \Delta^{(1)}(\mathbf{l}) \mathcal{F}^+_\omega(\mathbf{l}-\mathbf{r}) \Big\} = \frac{ie}{m}|\lambda| T \times\\ &\times \sum_\omega \int dl \left[\mathcal{F}^+_\omega(\mathbf{r}-\mathbf{l}) \left(\mathbf{A}_l\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + i\mathbf{q}\right)\right) G_\omega(\mathbf{l}-\mathbf{r}) - G_{-\omega}(\mathbf{l}-\mathbf{r}) \left(\mathbf{A}_l\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - i\mathbf{q}\right)\right) \mathcal{F}^+_\omega(\mathbf{l}-\mathbf{r}) \right].\end{aligned} \tag{52}$$

Мы опускаем далее индекс «0» у функций Грина, полагая, что это не приведет к недоразумениям.

Парамагнитная составляющая тока выражается через функцию $G^{(1)}_\omega$:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_p(\mathbf{r}) &= \frac{ie}{m} T \sum_\omega \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\Big|_{\mathbf{r}'-\mathbf{r}} G^{(1)}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') =\\ &= \frac{ie}{m} T \sum_\omega \Big\{ -2i\mathbf{q}\widetilde{G}^{(1)}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') + (\nabla_{r'} - \nabla_r)\widetilde{G}^{(1)}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') \Big\}.\end{aligned}$$

Вначале найдем $\Delta^{*(1)}$ и $\Delta^{(1)}$. Можно показать, что уравнение (52) при $T \to T_c$, $\Delta_0 \to 0$ и $qv_0 \ll T_c$ переходит в (15). Поэтому оно проявляет особенности, связанные с зависимостью от $\mathbf{k} \to 0$. В частности, в правой части уравнения (52) можно сразу положить $\mathbf{k} = 0$ (т. е. считать $\mathbf{A}$ не зависящим от $\mathbf{l}$). После фурье-преобразования получаем для правой части (52)

$$\frac{-e}{m}|\lambda| T \sum_\omega \sum_p \left[(\mathbf{A}(\mathbf{p}+\mathbf{q})) \mathcal{F}^+_\omega(\mathbf{p}) G_\omega(\mathbf{p}) - (\mathbf{A}(\mathbf{p}-\mathbf{q})) \mathcal{F}^+_\omega(\mathbf{p}) G_{-\omega}(-\mathbf{p}) \right]. \tag{53}$$

Используя формулы (45), (46) и суммируя по частотам, находим окончательно

$$\frac{e}{2m}\Delta_0|\lambda|\sum_p\left\{\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[f(\varepsilon+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})-f(\varepsilon-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})\right]\right\}, \quad (54)$$

$$f(\varepsilon)=\left[e^{\varepsilon/T}+1\right]^{-1}.$$

Для интересующего нас случая $T=0$ и $qv_0<\Delta_0$ правая часть уравнения (54) равна нулю. Отсюда следует, что поправки к параметру порядка $\Delta^{*(1)}$ ($\Delta^{(1)}$) также равны нулю, если только сомножитель при них отличен от нуля.

Чтобы избежать громоздкости доказательства последнего утверждения, положим в (52) $\mathbf{k}=0$ и $\Delta^{*(1)}=\Delta^{(1)}$ (обобщение не представляет труда, см. также разд. 2). В этом случае уравнение (52) (после суммирования по частотам) принимает вид

$$\Delta^{(1)}\sum_p\left\{\frac{1-f(\varepsilon+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})-f(\varepsilon-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})}{\varepsilon^3}+\right.$$
$$\left.+\ \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[f(\varepsilon+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})+f(\varepsilon-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})\right]\right\}=\frac{e}{m\Delta_0}\times$$
$$\times\sum_p\frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[f(\varepsilon+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})-f(\varepsilon-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})\right]. \quad (55)$$

Отметим, что при выводе мы использовали уравнение (44). Для $T=0$ левая часть формулы (55) равна

$$\Delta^{(1)}\sum_p\frac{1}{\varepsilon^3}=\Delta^{(1)}N(0)\int\frac{d\xi}{\varepsilon^3}=\frac{\Delta^{(1)}}{\Delta_0^2}2N(0),$$

где $N(0)$ — плотность состояний. Таким образом, мы доказали, что поправки к параметру порядка равны нулю, даже если $\mathbf{q}\neq0$. Причина состоит в том, что при $T=0$ и $qv_0<\Delta_0$ рождение квазичастиц не происходит и Δ не меняется при $\mathbf{A}\to0$.

Теперь вычислим парамагнитный ток с помощью формул (53) и (51), причем в $G_\omega^{(1)}$ опустим слагаемые с $\Delta^{(1)}$ и $\Delta^{*(1)}$. Представим вектор-потенциал в обычной форме:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\sum_k A_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

и перейдем к фурье-образам отклика и функций Грина

$$\mathbf{J}_p(\mathbf{k})=-\frac{\mathbf{q}\,2e^2}{m^2}\times$$
$$\times\sum_p T\sum_\omega\left\{(\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{p})\,\Phi_++(\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{q})\,\Phi_-\right\}-$$
$$-\frac{2e^2}{m^2}\sum_p\mathbf{p}\left\{(\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{p})\,T\sum_\omega\Phi_++\right.$$
$$\left.+\ (\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{q})\,T\sum_\omega\Phi_-\right\}, \quad (56)$$

$$\Phi_\pm=\left[G_\omega(\mathbf{p})G_\omega(\mathbf{p}-\mathbf{k})\pm\mathcal{F}_\omega(\mathbf{p})\mathcal{F}_\omega^+(\mathbf{p}-\mathbf{k})\right].$$

Если положить в (56) $\mathbf{q}=0$, то остается только третье слагаемое, в точности совпадающее с обычным парамагнитным вкладом [5].

Вычислим ток при $q\neq0$ и $T=0$ (обобщение на случай $T\neq0$ не представляет труда). Полагая $k=0$, нетрудно показать, что

$$T\sum_\omega G_\omega(\mathbf{p})G_\omega(\mathbf{p})=-\frac{\Delta^2}{4\varepsilon^2},$$
$$T\sum_\omega\mathcal{F}_\omega(\mathbf{p})\mathcal{F}_\omega^+(\mathbf{p})=\frac{\Delta^2}{4\varepsilon^2}. \quad (57)$$

$$\Phi_+=0,\quad \Phi_-=-\frac{\Delta^2}{2\varepsilon^2}. \quad (58)$$

Следовательно, первое и третье слагаемые обращаются в нуль из-за того, что $\Phi_+=0$, а последнее — из-за нечетности по $\mathbf{p}$. Остается только второе слагаемое

$$J_p(\mathbf{k})=\frac{e^2}{m^2}\mathbf{q}\,(\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{q})\,N(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi\Delta^2}{(\xi^2+\Delta_0^2)^{3/2}}=$$
$$=\frac{e^2}{m}\mathbf{q}\,(\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{q})\,\frac{p_0}{\pi^2}. \quad (59)$$

Важно отметить, что параметр порядка Δ_0 выпадает из выражения для тока. Величина парамагнитного отклика (59) мала по сравнению с диамагнитным, если $q\ll p_0$. Однако при $q\approx p_0$, как, например, в моделях спаривания с большим импульсом [1, 2], вклад (59) может играть существенную роль, приводя, в частности, к специфической анизотропии эффекта Мейсснера. Каков механизм возникновения парамагнитного вклада (59)?

4. ПАРАМАГНИТНЫЙ ОТКЛИК СВЕРХПРОВОДНИКА С ЗАДАННЫМ ИМПУЛЬСОМ ПАРЫ ПРИ $T = 0$

Нагляднее всего получить ответ на этот вопрос, если вычислить парамагнитный отклик с помощью теории БКШ. Волновая функция БКШ

$$\Psi_s(\mathbf{q}) = \prod_p \left(\widetilde{u}_p + \widetilde{v}_p a^+_{p+q\uparrow} a^+_{-p+q\downarrow}\right) \varphi_0 \qquad (60)$$

описывает состояние с импульсом пары $2\mathbf{q}$. В этом нетрудно убедиться, вычисляя полный импульс:

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \sum_{p\sigma} \mathbf{p} \langle a^+_{p\sigma} a_{p\sigma} \rangle = 2\mathbf{q} \sum_p \widetilde{v}_p^2. \qquad (61)$$

Можно показать, что $\widetilde{u}_p$ и $\widetilde{v}_p$ даются формулой (47). Найдем парамагнитный отклик по теории возмущений, следуя работе [7]:

$$\mathbf{J}_p(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{\langle q|\widehat{V}|i\rangle \langle i|\widehat{\mathbf{J}}|q\rangle}{E_q - E_i}.$$

Здесь $\langle q|\widehat{V}|i\rangle$, $\langle i|\widehat{\mathbf{J}}|q\rangle$ — матричные элементы от оператора взаимодействия электронов с полем:

$$\widehat{V} = \sum_{p_1, p_1'} \mathbf{A}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1') \left[\mathbf{p}_1 a^+_{p_1'\uparrow} a_{p_1\uparrow} - \mathbf{p}_1' a^+_{-p_1\downarrow} a_{-p_1'\downarrow}\right] \qquad (62)$$

и оператора тока

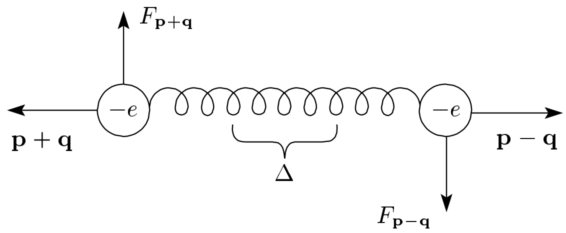
$$\widehat{\mathbf{J}}_p(\mathbf{r}) = \sum_{p,p'} (\mathbf{p} + \mathbf{p}') e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}} \left[a^+_{p'\uparrow} a_{p\uparrow} - a^+_{-p\downarrow} a_{-p'_\downarrow}\right], \qquad (63)$$

E_q, E_i — энергия основного с $\mathbf{q} \neq 0$ и возбужденных состояний. Вычисляя матричный элемент оператора взаимодействия между состояниями $\Psi_s(\mathbf{q})$ (60) и соответствующим возбужденным состоянием, получаем

$$\langle q|\widehat{V}|i\rangle = \sum_{p_1, p_1'} \mathbf{A}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1') \times \left[(\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}) \widetilde{u}_{p_1'} \widetilde{v}_{p_1} - (\mathbf{p}_1' - \mathbf{q}) \widetilde{u}_{p_1} \widetilde{v}_{p_1'}\right], \qquad (64)$$

где $\mathbf{p}_1' = \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}$; принимая во внимание поперечность вектор-потенциала $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = 0$, находим

$$\langle q|\widehat{V}|i\rangle = \sum_{p_1, k} \mathbf{A}(\mathbf{k}) \times \left[\mathbf{p}_1 \left(\widetilde{u}_{p_1'} \widetilde{v}_{p_1} - \widetilde{u}_{p_1} \widetilde{v}_{p_1'}\right) + \mathbf{q} \left(\widetilde{u}_{p_1'} \widetilde{v}_{p_1} + \widetilde{u}_{p_1} \widetilde{v}_{p_1'}\right)\right]. \qquad (65)$$



Схематическое изображение куперовской пары из электронов (кружки) с импульсами $\mathbf{p} \pm \mathbf{q}$. Пара в связанном (на рисунке связь моделируется пружиной) состоянии под воздействием силы Лоренца. Следует помнить, что пара в s-состоянии и размер пары много меньше характерной длины изменения магнитного поля ($k \to 0$!)

Аналогичный результат получается и для матричного элемента тока:

$$\langle i|\widehat{\mathbf{J}}_p|q\rangle = \sum_{p,p'} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}} \left\{(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \left(\widetilde{u}_{p'} \widetilde{v}_p - \widetilde{u}_p \widetilde{v}_{p'}\right) + 2\mathbf{q} \left(\widetilde{u}_{p'} \widetilde{v}_p + \widetilde{u}_p \widetilde{v}_{p'}\right)\right\}. \qquad (66)$$

Первые слагаемые в формулах (65) и (66) совпадают с известными выражениями отклика в теории БКШ [7], обращающимися в нуль при $\mathbf{k} = 0$. Вклад вносят только вторые слагаемые, пропорциональные $\mathbf{q}$, так что парамагнитный отклик равен

$$\mathbf{J}_p(\mathbf{k}) = \frac{2e^2}{m} \mathbf{q} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}_k) \times \sum_p \frac{4u_p^2 v_p^2}{[(\varepsilon + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) + (\varepsilon - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})]}, \qquad (67)$$

что в точности совпадает с формулой (59).

Физический механизм вклада можно понять с помощью выражения (64). Для большей наглядности воспользуемся квазиклассическими представлениями. Первое слагаемое в (64) пропорционально силе Лоренца, действующей на один из электронов куперовской пары с зарядом e и скоростью $(\mathbf{p} + \mathbf{q})/m$. Второе — силе, действующей на второй электрон с зарядом e и скоростью $(-\mathbf{p}+\mathbf{q})/m$. Сначала рассмотрим случай, когда $\mathbf{q} = 0$, и будем иметь в виду, что электроны находятся в связанном состоянии (лондоновская жесткость) (см. рисунок). Тогда сила, действующая на пару, равна нулю, а следовательно, парамагнитный отклик отсутствует.

Если $\mathbf{q} \neq 0$, то суммарная сила равна $2q$ и появляется вклад в парамагнитный отклик. Жесткость не играет роли, и именно поэтому Δ выпадает из выражения (67). Парамагнитный ток (67) дает небольшой вклад, если $qv < \Delta_0$. Однако для больших q, что может реализовываться в моделях с большим импульсом спаривания [1, 2], парамагнитный ток может определять особенности эффекта Мейсснера.

5. ОТКЛИК В СОСТОЯНИИ ЛОФФ

Интересным и поучительным примером спаривания с конечным импульсом является так называемое ЛОФФ-состояние, предложенное и изученное в работах Ларкина, Овчинникова, Фулде, Феррела [3, 4]. В этом состоянии из-за присутствия обменного поля I, стремящегося развернуть спины куперовской синглетной пары, спаривание с конечным $\mathbf{q}$ является энергетически выгодным. Причина состоит в том, что изменения спектра квазичастиц из-за обменного поля I и импульса $\mathbf{q}$ частично компенсируют друг друга.

Эффект Мейсснера рассматривался в работах [3, 4]. Однако в работе [4] были приведены только качественные оценки отклика, сделанные на основе интуитивных соображений, причем вопрос о поправке $\Delta^{(1)}$ даже не ставился. В работе [3] отклик для случая $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ не вычислялся, а расчеты поправки $\Delta^{(1)}$ требуют уточнения. Поэтому прежде всего мы получим уравнения для поправки параметра порядка $\Delta^{*(1)}$ $(\Delta^{(1)})$.

Следуя работе [3], будем исходить из следующей системы уравнений Горькова [5] при $T = 0$:

$$\left\{i\omega + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - ie\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 + \mu - I\sigma^z\right\}\widehat{G}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') - i\Delta(\mathbf{r})\widehat{F}^+_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \quad (68)$$

$$\left\{-i\omega + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + ie\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 + \mu - I\sigma^z\right\}\widehat{F}^+_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') - i\Delta^+(\mathbf{r})\widehat{G}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0, \quad (69)$$

$$\widehat{\Delta}^+(\mathbf{r}) = \lambda \int \frac{d\omega}{2\pi}\widehat{F}^+_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}).$$

Здесь G_ω и F^+_ω — матричные функции Грина, σ^z — матрица Паули; остальные обозначения стандартные.

При $\mathbf{A} = 0$ система (68), (69) имеет энергетически выгодные решения, соответствующие неоднородным состояниям. В частности, реализуется решение [3]

$$\hat{\Delta}(\mathbf{r}) = i\sigma^z\Delta_0 e^{i\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{r}}, \quad \Delta_0^2 = 1.76 I_0(I_0 - I), \quad (70)$$

$$I_0 = 0.755\Delta_0, \quad q_0 = 2.4 I/V. \quad (71)$$

Параметр порядка Δ_0 мал и находится из уравнения

$$\Delta_0 = \frac{|\lambda|\rho}{4}\left[\Delta_0 \Pi(q,I) - \Delta_0^3 J_4\right]. \quad (72)$$

Здесь

$$\Pi(q,I) = \ln\frac{2\omega_D^2}{v^2q^2 - 4I^2} + 2 - \frac{2I}{vq}\ln\frac{vq+2I}{vq-2I}, \quad (73)$$

$$J_4 = \int\frac{d\omega}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\omega_D}^{\omega_D}d\xi G^0_{11}(-\omega,\mathbf{p})G^0_{22}(\omega,\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \frac{2}{v_0^2q^2 - 4I^2}, \quad (74)$$

$$\rho = \frac{mp_0}{\pi^2}.$$

Оптимальный импульс q_0 определяется из уравнения [3]

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right|_{q_0} = 0. \quad (75)$$

После подстановки q_0 в формулу (72) при $\Delta_0 \to 0$ получаем I_0 (71). Функции Грина в нормальном (несверхпроводящем) ферромагнитном состоянии

$$G^0_{11}(\omega,\xi_p) = \left[\omega - \xi_p - I + i\delta\omega\right]^{-1}, \quad G^0_{22}(\omega,\xi_p) = \left[\omega - \xi_p + I + i\delta\omega\right]^{-1} \quad (76)$$

соответствуют двум различным направлениям спина, $\delta \to 0$.

Физический смысл условия выбора q_0 (71) становится яснее, если найти ток $\mathbf{J}_0(\mathbf{q})$ в состоянии с импульсом $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{J}_0(\mathbf{q}) = \frac{e}{m}N\frac{\partial\Pi(q)}{\partial\mathbf{q}}. \quad (77)$$

Согласно теореме Блоха, ток в основном состоянии (т. е. с минимальной энергией) равен нулю. Следовательно, нужно выбрать $q = q_0$ так, чтобы удовлетворялось условие (75). Причина исчезновения тока J_0 обусловлена компенсацией тока пар и тока квазичастиц при $q = q_0$.

В работе [3] найдено также неоднородное решение:

$$\Delta_0(\mathbf{r}) = 2\Delta_0\cos\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}, \quad \Delta_0^2 = 14.7 I_0(I_0 - I). \quad (78)$$

Сначала получим уравнения для поправки $\Delta^{*(1)}$ для случая $\Delta_0(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$. Будем искать решения системы уравнений (68) и (69) разложением функций Грина G и F по $\mathbf{A}$ и $\widehat{\Delta}^{(1)}$, $\widehat{\Delta}^{+(1)}$, причем $\widehat{\Delta}^+(\mathbf{r})$ представим в виде

$$\widehat{\Delta}^{+}(\mathbf{r}) = \widehat{\Delta}_0^{+}(\mathbf{r}) + \widehat{\Delta}^{+(1)}(\mathbf{r}), \tag{79}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}^{+}(\mathbf{r}) &= \begin{pmatrix} 0 & -\Delta_0 \\ \Delta_0 & 0 \end{pmatrix} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \\ \widehat{\Delta}^{+(1)}(\mathbf{r}) &= \begin{pmatrix} 0 & -\Delta^{*(1)}(\mathbf{r}) \\ \Delta^{*(1)}(\mathbf{r}) & 0 \end{pmatrix} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \end{aligned} \tag{80}$$

Здесь Δ_0 дается формулой (70), а для $\Delta^{*(1)}(\mathbf{r})$ имеем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta^{*(1)}(\mathbf{r}) = \lambda \int \frac{d\omega}{2\pi i} \Bigg\{ \int d\mathbf{r}_1 G_{11}^0(-\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \times \\ \times G_{22}^0(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \Delta^{*(1)}(\mathbf{r}_1) e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)} + \\ + \frac{ie}{m}\Delta_0 \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \left[G_{11}^0(-\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) G_{22}^0(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \right. \\ \times \left(\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \right) G_{22}^0(\omega, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)} - \\ - G_{11}^0(-\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \left(\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) \times \\ \left. \times G_{11}^0(-\omega, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) G_{22}^0(\omega, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)} \right] - \\ - \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 G_{11}^0(-\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) G_{22}^0(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \\ \times G_{11}^0(-\omega, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) G_{22}^0(\omega, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \times \\ \times e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)} \times \\ \times \Delta_0^2 \left[\Delta^{*(1)}(\mathbf{r}_1) + \Delta^{*(1)}(\mathbf{r}_3) + \Delta^{(1)}(\mathbf{r}_2) \right] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{81}$$

Аналогичное уравнение может быть получено для величины $\Delta_1(\mathbf{r})$, входящей в уравнение (81). Уравнение (81) отличается от соответствующего в работе [3] наличием последнего члена, который играет существенную роль. Полагая $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ равным (16), ищем решение уравнения (81) в виде (ср. (17))

$$\begin{aligned} \Delta^{*(1)}(\mathbf{r}) &= \widetilde{B}_+ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \widetilde{B}_- e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\ \Delta_1(\mathbf{r}) &= B_+ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + B_- e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \end{aligned} \tag{82}$$

Подставляя (82) в (81) и переходя к фурье-образам, получаем

$$\begin{aligned} \widetilde{B}_+ = \frac{\lambda\rho}{4} \Bigg\{ \widetilde{B}_+ \Pi(I, \mathbf{q} - \mathbf{k}) - \Delta_0^2 J_4 (2\widetilde{B}_+ + B_+) - \\ - 2e\Delta_0 \left(\mathbf{A}_k \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \right) \Bigg\}, \end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{B}_- = \frac{\lambda\rho}{4} \Bigg\{ \widetilde{B}_- \Pi(I, \mathbf{q} + \mathbf{k}) - \Delta_0^2 J_4 (2\widetilde{B}_- + B_-) - \\ - 2e\Delta_0 \left(\mathbf{A}_k \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \right) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{84}$$

Заметим, что из условия $\Delta^{*(1)} = \left(\Delta^{(1)}\right)^*$ вытекают соотношения

$$\widetilde{B}_+ = B_-^*, \quad \widetilde{B}_- = B_+^*. \tag{85}$$

Учитывая, что коэффициенты в (83) и (84) действительные, соотношения (85) принимают вид

$$\widetilde{B}_+ = B_-, \quad \widetilde{B}_- = B_+.$$

В результате приходим к замкнутой системе уравнений для $\widetilde{B}_+$ (83) и B_+:

$$\begin{aligned} B_+ = \frac{\lambda\rho}{4} \Bigg\{ B_+ \Pi(I, \mathbf{q} + \mathbf{k}) - \\ - \Delta_0^2 J_4 (2B_+ + \widetilde{B}_+) - 2e\Delta_0 \left(\mathbf{A}_k \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \right) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{86}$$

Уравнения для B_+ и $\widetilde{B}_+$ имеют много общего с системой (18), (19). Поэтому предельный переход $\mathbf{k} \to 0$ нужно делать, разлагая $\Pi(I, \mathbf{q} \pm \mathbf{k})$ вплоть до квадратичных членов:

$$\begin{aligned} \Pi(I, \mathbf{q} \pm \mathbf{k}) &= \Pi(I, \mathbf{q}) \pm (\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Pi}') + \frac{k^2}{2} \Pi'', \\ \mathbf{\Pi}' &= \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}, \quad \Pi'' = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{q}^2}. \end{aligned} \tag{87}$$

Причина необходимости разложения до k^2 станет ясной ниже. После подстановки разложения (87) и сокращения двух слагаемых (с учетом уравнения (72)) получаем

$$\begin{gathered} B_+ \left[2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Pi}') + k^2 \Pi'' + a \right] + \widetilde{B}_+ a = \widetilde{A} \equiv \\ \equiv 4e\Delta_0 \left(\mathbf{A}_k \cdot \mathbf{\Pi}'(\mathbf{q}) \right), \\ B_+ a + \widetilde{B}_+ \left[-2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Pi}') + k^2 \Pi'' + a \right] = \widetilde{A}, \\ a = 2\Delta_0^2(-J_4). \end{gathered} \tag{88}$$

Теперь становится совершенно очевидной формальная аналогия системы (88) и системы (18), (19) для токового состояния при $T \to T_c$ и необходимость разложения до $\mathbf{k}^2$ (в последнем случае $\mathbf{\Pi}' = \mathbf{q}$, $\Pi'' = 1$). Действительно, если ограничиться разложением до $\mathbf{k}$, то из формулы (88) легко получить решения, совпадающие с результатами работы [3]:

$$B_+ = -\widetilde{B}_+ = \frac{\widetilde{A}}{2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Pi}')} = \frac{2e\Delta_0 (\mathbf{A}_k \cdot \mathbf{q})}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})}. \tag{89}$$

Отметим также, что в уравнениях [3], аналогичных (88), отсутствует член с a, возникающий из кубического по Δ разложения. Если же удержать квадратичные члены, то решения имеют вид (при $k \to 0$)

$$B_+ = \frac{\widetilde{A}\left(-k^2\Pi'' + 2\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Pi}'\right)}{\left[2\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Pi}'\right)^2 + a\Pi'' k^2\right]} = \widetilde{B}_-, \tag{90}$$

$$\widetilde{B}_+ = \frac{\widetilde{A}\left(-k^2\Pi'' - 2\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Pi}'\right)}{\left[2\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Pi}'\right)^2 + a\Pi'' k^2\right]} = B_-, \tag{91}$$

$$B_+ + \widetilde{B}_+ = \frac{-k^2\Pi''\widetilde{A}}{\left[2\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Pi}'\right)^2 + a\Pi'' k^2\right]}.$$

Вспоминая, что в основном состоянии $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, $\Pi'(\mathbf{q}_0) = 0$, $\widetilde{A} \propto \Pi'(\mathbf{q}_0)$ согласно (75) и (88), находим из (90), что

$$B_+ = -\frac{\widetilde{A}}{a} = -\frac{2e\Delta_0(\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{q})\Pi'(\mathbf{q}_0)}{a} = 0. \tag{92}$$

Также равны нулю и $\widetilde{B}_+$, $\widetilde{B}_-$, B_-, а следовательно, и поправки к параметру порядка $\Delta^{*(1)}$ и $\Delta^{(1)}$. Поэтому поправки $\Delta^{*(1)}$ и $\Delta^{(1)}$ не вносят вклад в отклик, вызываемый магнитным полем:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\frac{ie}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}'}\right) \times \\ \times \operatorname{Sp}\int \widehat{G}^{(1)}(\omega,\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{d\omega}{2\pi i} - \frac{e^2}{m}\mathbf{A}N, \tag{93}$$

где $\widehat{G}^{(1)}$ — поправка к функции Грина, пропорциональная $\mathbf{A}$ и $\widehat{\Delta}^{(1)}$. Существенные члены в $\widehat{G}^{(1)}$ можно представить в форме (следуя обозначениям [3])

$$\frac{ie}{mc}\left[G^0\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{\nabla}\right)G^0 + G^0\Delta_0 G^0_-\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{\nabla}\right)G^0_-\Delta_0^+G^0 - \right. \\ - G^0\mathbf{A}\cdot\mathbf{\nabla}G^0\Delta_0 G^0_-\Delta_0^+G^0 - \\ \left. -G^0\Delta_0 G^0_-\Delta_0^+G^0\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{\nabla}\right)G^0\right]. \tag{94}$$

Для пояснения обозначений приведем последнее слагаемое:

$$-\frac{ie}{m}\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 G^0(\omega,\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\Delta_0(\mathbf{r}_1)\times \\ \times G^0(-\omega,\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\Delta_0^+(\mathbf{r}_2)\times \\ \times G^0(\omega,\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3)\left(\mathbf{A}(\mathbf{r}_3)\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_3}\right)G^0(-\omega,\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1). \tag{95}$$

Вклад от первого слагаемого $\widehat{G}^{(1)}$ в (94) сокращается с последним слагаемым в (93), как и должно быть в нормальном металле. Можно показать, что два последних слагаемых в (94) вносят одинаковый вклад, а второе — удвоенный. В результате после фурье-преобразований получаем

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}) = \frac{e^2\Delta_0^2}{m^2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathbf{p}\left(\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{p}\right)\times \\ \times\left\{G_{11}^{0^2}(\omega,\mathbf{p})G_{11}^0(\omega,\mathbf{p}-\mathbf{k})G_{22}^0(-\omega,-\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{k}) + \right. \\ \left. + G_{22}^0(\omega,\mathbf{p})G_{22}^{0^2}(\omega,\mathbf{p}-\mathbf{k})G_{11}^0(-\omega,-\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{k})\right\}. \tag{96}$$

Положим в (96) $\mathbf{k} = 0$ и представим (как и в разд. 2) вектор $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\parallel + \mathbf{A}_\perp$. Для параллельной составляющей отклика найдем

$$\mathbf{J}_\parallel(\mathbf{k}) = \frac{e^2\Delta_0^2\mathbf{A}_\parallel N}{mv_0^2}\frac{\partial^2\Pi(\mathbf{q}_0)}{\partial q^2} = -\frac{\mathbf{A}_\parallel}{\lambda^2 4\pi}, \\ \frac{1}{\lambda^2} = \frac{4\pi e^2 N\Delta_0^2}{mI_0^2}\left(\frac{6}{1.76}\right). \tag{97}$$

Отклик для перпендикулярной составляющей равен

$$\mathbf{J}_\perp(\mathbf{k}) = \frac{e^2\Delta_0^2\mathbf{A}_\perp N}{mv_0^2}\frac{1}{q}\frac{\partial\Pi(\mathbf{q}_0)}{\partial q} = 0. \tag{98}$$

Из формулы (97) следует, что отклик $\mathbf{J}_\parallel$, параллельный вектору $\mathbf{q}$, отличен от нуля и имеет диамагнитный характер. По величине он примерно равен диамагнитному току ГЛ, лишь надо заменить I_0 на T_c. Напротив, отклик $\mathbf{J}_\perp$ пропорционален $\partial\Pi/\partial\mathbf{q}$ и при $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ равен нулю. Эти результаты согласуются с качественными оценками [4], сделанными из интуитивных соображений.

Физический смысл полученных результатов состоит в следующем. Вектор-потенциал $\mathbf{A}_\parallel$ взаимодействует с электронами, расположенными в области импульсного пространства, где импульс $\mathbf{q}_0$ компенсирует разрушающее действие обменного поля I; поэтому диамагнитный отклик и эффект Мейсснера сохраняются. Напротив, вектор $\mathbf{A}_\perp$ имеет дело с электронами, которые испытывают влияние только большого обменного поля, разрушающего пары. Поэтому парамагнитный ток компенсирует диамагнитный, так что $\mathbf{J}_\perp(\mathbf{q}_0) = 0$, $\lambda_\perp(\mathbf{q}_0) = \infty$. Следует отметить, что результаты (97) и (98) противоположны полученным в разд. 2–4. В токовом состоянии $\mathbf{J}_\parallel$ обращается в нуль при критическом значении q_c, а $\mathbf{J}_\perp$ остается диамагнитным. Это связано с тем, что в этом случае ($I = 0$) импульс $\mathbf{q}$ производит разрушающее воздействие на пары, с которыми вектор-потенциал взаимодействует.

Наконец, кратко рассмотрим случай, когда $\Delta_0(\mathbf{r}) = \Delta_0\cos(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$. Можно показать, что уравнения для поправки $\Delta^{(1)}$ ($\Delta^{*(1)}$) остаются прежними, так что $\Delta^{(1)} = \Delta^{*(1)} = 0$. Опуская громоздкие вычисления отклика, приведем окончательные результаты

$$\mathbf{J}_{\parallel}(\mathbf{k}) = -\frac{e^2\mathbf{A}_{\parallel}}{m} N \frac{\Delta_0^2}{I_0^2}\frac{3}{1.76} = -\frac{\mathbf{A}_{\parallel}}{\lambda^2 8\pi}, \tag{99}$$

$$\mathbf{J}_{\perp} = -\frac{\mathbf{A}_{\perp}}{\lambda^2 8\pi}\cos(2\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}). \tag{100}$$

Отклик $\mathbf{J}_{\parallel}$ (99) отличается множителем (97) лишь на 1/2, т. е. сохраняет диамагнитный характер и величину. Отклик $\mathbf{J}_{\perp}$ испытывает быстрые осцилляции, так что в среднем равен нулю. Поэтому результаты (99), (100) аналогичны случаю $\Delta_0(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$, что и следовало ожидать из физических соображений.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из полученных выше результатов следует, что спаривание с конечным импульсом радикально меняет эффект Мейсснера, приводя к полной компенсации диамагнитного отклика.

Были рассмотрены три различные ситуации. В первой (разд. 2, $T \to T_c$) совместное действие импульса и температуры приводило к росту числа разорванных пар (импульс уменьшал щель, а температура рождала квазичастицы). Поэтому отклик в направлении, параллельном $\mathbf{q}$, обращается в нуль при некотором критическом значении тока q_c. Интересно отметить, что критическое значение импульса q_c соответствует порогу возникновения диффузионной неустойчивости [7]. Это объясняет причину фазового перехода первого рода сверхпроводника с током [6] при $q = q_c$.

В состоянии ЛОФФ воздействия импульса и обменного поля могут компенсировать друг друга. В этой ситуации отклик в направлении, параллельном $\mathbf{q}$, остается диамагнитным. В перпендикулярном направлении отклик исчезает, так как электроны испытывают влияние только сильного обменного поля.

Наконец, в сверхпроводнике с током при $T = 0$ не происходит разрыв пар. В этой ситуации есть только q и поправка к параметру порядка $\Delta^{(1)}$ равна нулю. Но парамагнитный отклик возникает, как показано в работе, за счет непосредственного действия магнитного поля на электроны пары.

Полученные результаты свидетельствуют о возможности получения детальной информации о тонких особенностях сверхпроводящего состояния с помощью исследования эффекта Мейсснера. Кроме того, факт кардинального изменения лондоновской длины в сверхпроводниках, несущих транспортный ток, может быть существенным при расчетах критического тока, вихревой структуры и сил пиннинга.

Автор выражает глубокую признательность Ю. В. Копаеву и Л. А. Опенову, а также И. Ю. Катееву за полезные обсуждения и помощь. Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства РФ по образованию.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. **63**, 2144 (1989).
2. В. И. Белявский, В. В. Капаев, Ю. В. Копаев, ЖЭТФ **118**, 941 (2000).
3. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **47**, 1136 (1964).
4. P. Fulde and R. A. Ferrel, Phys. Rev. **135**, A550 (1964).
5. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялощинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
6. П. Де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, Мир, Москва (1968).
7. В. Ф. Елесин, Ю. В. Копаев, УФН **133**, 259 (1981).
8. А. В. Свидзинский, *Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости*, Наука, Москва (1982).
9. J. Bardeen, L. Cooper, and J. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).