ЖЭТФ, 2007, том 131, вып. 1, стр. 37–53

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОГОМОДОВЫХ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ

В. П. Карасев [*]

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия

С. П. Кулик [**]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119992, Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 июля 2006 г.

В рамках концепции P-квазиспина разработан формализм поляризационных преобразований многомодовых световых полей элементами бездиссипативной поляризационной оптики как для классического, так и квантового случаев. В качестве примера получена классификация таких преобразований для двухчастотных бифотонных полей, имеющих теоретико-информационный смысл кутритов и куквартов — квантовых систем в трех- и четырехмерном гильбертовом пространстве.

PACS: 42.25.Ja, 42.50.-p

1. ВВЕДЕНИЕ

Поляризация является одной из основных характеристик электромагнитного поля. Привлекательная черта явления поляризации света состоит в том, что ее формальное описание строилось так же, как впоследствии для квантовых двухуровневых систем. Для тех, кто знаком с такими характеристиками двухмодового классического поля[1)] как вектор Джонса, параметры Стокса, степень поляризации, сфера Пуанкаре, не составит труда увидеть тесную связь со спинорами, матрицами Паули, критерием чистоты квантовых (двухуровневых) состояний, сферой Блоха и т. д. Многие эксперименты с поляризационными квантовыми состояниями света имеют тесную аналогию с классическими опытами, основанными на свойствах двойного лучепреломления или действии поляризационных преобразователей. Однако интуитивные (и зачастую наивные) аналогии между классическими и квантовыми характеристиками поляризации приводят к неправильной интерпретации результатов экспериментов. Так, понятия «степень поляризации» поля и «чистота» состояния, изоморфные для классической плоской монохроматической волны, и состояния двухуровневой системы нуждаются в уточнении для многофотонных или немонохроматических полей [1–4]. Актуальность проблемы адекватного описания поляризационных свойств света во многом связана с тем, что именно многофотонные и/или немонохроматические поля служат основой при кодировании квантовой информации [5] в поляризационных степенях свободы. К настоящему времени выполнен ряд экспериментов, в которых рассматриваются поляризационные эффекты в двух пространственных (см., например, [6–8]) или частотных [9–12] модах двухфотонного света. В этих работах осуществляются разные типы поляризационных преобразований над квантовыми состояниями: либо над целым объектом — сразу в обеих пространственно-временных (ПВ) модах, — либо независимо в каждой моде. Оказывается, что результат сильно зависит от типа преобразования. Другой класс экспериментов относится к так называемым условным преобразованиям, когда в зависимости от результата измерения в одной ПВ-моде осуществляется определенное поляризационное преобразование в других модах [13]. Таким образом достигается приготовление поля в заданном поляризационном состоянии [14].

[*] E-mail: vpk43@mail.ru
[**] E-mail: skulik@qopt.phys.msu.su
[1)] Имеются в виду две поляризационные степени свободы.

Эти и другие эксперименты послужили стимулом детального описания поляризационных преобразований в общем случае — для разных квантовых состояний, принадлежащих нескольким ПВ-модам.

Такое описание строится на том, что понятие поляризационного состояния света — не полная, а редуцированная характеристика световых полей, поскольку дает частичную информацию о состоянии поля. Поэтому замкнутое описание поляризации света должно основываться на: 1) полном описании световых полей, включающем определение базисных динамических переменных и 2) задании способов перехода к редуцированному описанию только поляризационных свойств световых полей. Отметим, что несмотря на долгую историю изучения явления поляризации, до недавнего времени не было адекватной концепции для его понимания, а описание имело фактически полуфеноменологический (операциональный) характер как в классической [15–19], так и в квантовой [20–23] оптике. Этот пробел был ликвидирован в конце прошлого столетия в работах одного из авторов [24–30] с помощью введения симметрийной концепции P-квазиспина, позволившей понять природу поляризации, дать адекватное ее описание в рамках квантовой теории, а также решить ряд проблем поляризационной квантовой оптики. В данной работе в рамках этой концепции разрабатывается техника преобразования многомодовых световых полей элементами бездиссипативной поляризационной оптики. Для лучшего понимания основному предмету работы предпослано краткое изложение базисных элементов классической и квантовой поляризационной оптики. Это позволяет, с одной стороны, подчеркнуть имеющиеся аналогии между описанием операциональных характеристик поляризации в классической и квантовой оптике, а с другой — избежать формальных переносов в квантовую теорию определений и понятий, обладающих ясным физическим смыслом в рамках классического подхода, но имеющих ограниченное значение при квантовом рассмотрении. Основные выводы работы иллюстрируются на примере одно- и двухмодового двухфотонного поля — объекта, на основе которого получены квантовые состояния поляризации в гильбертовом пространстве размерности $D = 3, 4$.

2. ПОЛЯРИЗАЦИЯ КЛАССИЧЕСКОГО СВЕТА

Описание поляризации света в классической оптике развито удовлетворительно только для монохроматического и квазимонохроматического плосковолнового излучения [15, 17, 18, 30].

2.1. Такое описание основано на использовании стандартной стохастической модели электрического поля $\mathbf{E}(t)$ как базисной динамической переменной в форме случайного аналитического сигнала

$$\begin{aligned} E(t) &= \mathbf{e}_x E_x(t) + \mathbf{e}_y E_y(t), \\ E_{\alpha=x,y}(t) &= A_\alpha(t) e^{i\phi_\alpha(t)} e^{i\omega t}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ — (комплексные) поляризационные орты, $E_{\alpha=x,y}(t)$ — компоненты так называемого вектора Джонса[2)], $e^{i\omega t}$ — быстроосциллирующий фактор с несущей частотой ω, $A_{x,y}$ и $\phi_{x,y}$ — медленно меняющиеся амплитуды и фазы.

2.2. Статистические состояния поля задаются распределением вероятностей ρ^f, которое для статистически-независимых амплитуд и фаз принимает вид

$$\rho^f(A_x, A_y; \phi_x, \phi_y) = \prod_{\alpha=x,y} \rho^a_\alpha(A_\alpha) \rho^{ph}_\alpha(\phi_\alpha). \tag{2}$$

Все наблюдаемые величины, измеряемые в экспериментах, определяются через глауберовские корреляционные функции

$$\begin{aligned} &\langle E_{\alpha_1}(t_1) \ldots E_{\alpha_n}(t_n) E^*_{\beta_{n+1}}(t_{n+1}) \ldots E^*_{\beta_{n+m}}(t_{n+m}) \rangle \equiv \\ &\equiv \int E_{\alpha_1}(t_1) \ldots E_{\alpha_n}(t_n) E^*_{\beta_{n+1}}(t_{n+1}) \ldots E^*_{\beta_{n+m}}(t_{n+m}) \times \\ &\times \rho^f(A_x, A_y; \phi_x, \phi_y)\, dA_x\, dA_y\, d\phi_x\, d\phi_y. \end{aligned} \tag{3}$$

Среди них в классической поляризационной оптике главная роль принадлежит матрице когерентности [17, 18]:

$$\begin{aligned} &\hat{C} = \left\| \langle E_\alpha(t) E^*_\beta(t) \rangle \right\|_{\alpha,\beta=x,y} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{3} \overline{\sigma}_i(t) \hat{\Sigma}_i, \\ &\hat{\Sigma}_0 = \|\delta_{\alpha,\beta}\| \equiv \hat{I}, \quad \hat{\Sigma}_{i=1,2,3} = \left\| \Sigma^i_{\alpha,\beta} \right\|, \end{aligned} \tag{4}$$

где 2×2-матрицы Паули

$$\hat{\Sigma}^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Sigma}^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

[2)] Подчеркнем, что несмотря на кажущееся определение компонент вектора Джонса через компоненты вектора поля $\mathbf{E}$ в реальном трехмерном пространстве, в действительности они определяют специфическое пространство C^2_p поляризационных индексов α, что является краеугольным камнем в концепции P-квазиспина [4]. К сожалению, это обстоятельство практически полностью игнорировалось в исследованиях по классической оптике, что препятствовало корректному пониманию и описанию поляризации света в ее рамках.

$$\hat{\Sigma}^3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

действующие в пространстве C_p^2 поляризационных индексов α, а коэффициенты $\overline{\sigma}_i$ разложения матрицы $\hat{C}$ по ним называются параметрами Стокса [17][3)].

2.3. Используя свойства матриц Паули (см. [17] и Приложение П.1), параметры Стокса можно выразить в форме статистических средних [30]:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_i &\equiv \mathrm{Tr}\left[\hat{C}\hat{\Sigma}_i\right] = \\ &= \sum_{\alpha,\beta=x,y} \Sigma^i_{\alpha,\beta}\langle E_\alpha, E^*_\beta\rangle = \langle\sigma_i(\{E_\alpha\})\rangle \equiv \\ &\equiv \int \sigma_i(\{E_\alpha\})\rho^f(\{A_\alpha;\phi_\alpha\}) \prod_{\alpha=x,y} dA_\alpha d\phi_\alpha \end{aligned} \quad (5)$$

от классических переменных Стокса

$$\sigma_i \equiv \sum_{\alpha,\beta} \Sigma^i_{\beta,\alpha} E_\alpha E^*_\beta,$$

определяемых через билинейные комбинации компонент вектора Джонса:

$$\sigma_{1,0}(\{E_\alpha\}) = E_x E_x^* \mp E_y E_y^* = A_x^2 \mp A_y^2, \quad (6)$$

$$\sigma_2(\{E_\alpha\}) = E_x E_y^* + E_y E_x^* = 2A_x A_y \cos(\phi_x - \phi_y), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_3(\{E_\alpha\}) &= i[E_x E_y^* - E_y E_x^*] = \\ &= 2A_x A_y \sin(\phi_x - \phi_y) \end{aligned} \quad (8)$$

и удовлетворяющих соотношению

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2. \quad (9)$$

Последнее соотношение (9) определяет так называемую сферу Пуанкаре, служащую для удобной визуализации поляризационных состояний и выполняемых над ними преобразований:

$$\begin{aligned} S_P^2 &= \{\sigma \equiv \{\sigma_{i=1,2,3}\} = \sigma_0\mathbf{n}, \\ \mathbf{n} &\equiv (n_1 = \sin\theta\cos\varphi, n_2 = \\ &= \sin\theta\sin\varphi, n_3 = \cos\theta)^{tr} : \mathbf{n}^2 = 1\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $(a,b,c)^{tr}$ — вектор-столбец, получаемый транспонированием строки (a,b,c).

2.4. Через параметры Стокса определяется ключевая характеристика классической поляризационной оптики — степень поляризации [17, 18]:

$$\overline{P}_{cl} = \frac{1}{\hat{\sigma}_0}\left[\sum_{i=1,2,3}\overline{\sigma}_i^2\right]^{1/2}, \quad (11)$$

которая является инвариантом относительно группы $U(2) = \{\hat{u}(a_0,\mathbf{a}) : \hat{u}\hat{u}^\dagger = \hat{u}^\dagger\hat{u} = \hat{I}\}$ поляризационных преобразований[4)], задаваемых с помощью матриц Паули

$$\begin{aligned} &\hat{u}(a_0,\mathbf{a}) = \sum_{i=0}^{3} a_i\hat{\Sigma}^i = a_0\hat{\Sigma}^0 + \mathbf{a}\cdot\hat{\Sigma}, \\ &|a_0|^2 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}^* = 1, \quad a_0^* a_j + a_0 a_j^* + i\varepsilon_{klj}a_k a_l^* = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

и коэффициентов a_i, соответствующих определенным поляризационным устройствам [16, 17]. С физической точки зрения, инвариантность величины $\overline{P}_{cl}$ относительно $SU(2)$-преобразований означает, что степень поляризации плоской квазимонохроматической волны нельзя изменить при помощи бездиссипативных поляризационных устройств (фазовые пластинки, ротаторы, светоделители) — состояние поляризации преобразуется при сохранении величины $\overline{P}_{cl}$. Подчеркнем, что этот вывод теряет свою силу при учете многомодовой структуры поля. Последовательное действие ряда устройств, задаваемых матрицами вида (12), сводится к перемножению этих матриц (групповое свойство) с помощью правил умножения (П.2):

$$\begin{aligned} &\hat{u}(a_{01},\mathbf{a}_1)\hat{u}(a_{02},\mathbf{a}_2) = \hat{u}(a_{01},\mathbf{a}), \\ &a_0 = a_{01}a_{02} + \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2, \\ &\mathbf{a} = \{a_j = a_{01}a_{j2} + a_{02}a_{j1} + i\varepsilon_{klj}a_{k1}a_{l2}\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Явный вид матриц $\hat{u}(a_0,\mathbf{a})$ для элементарных устройств можно найти в [16, 17, 31]. В качестве примеров выпишем матрицы, описывающие фазовый сдвиг между компонентами вектора Джонса ($\hat{u}_{ps}$) и вращение плоскости поляризации ($\hat{u}_{pr}$):

$$\begin{aligned} \hat{u}_{ps} &= \begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix} = \cos\delta\hat{\Sigma}^0 + i\sin\delta\hat{\Sigma}^1, \\ \hat{u}_{pr} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \cos\alpha\hat{\Sigma}^0 + i\sin\alpha\hat{\Sigma}^2, \end{aligned} \quad (14)$$

3) Отметим, что в литературе имелись попытки введения обобщенных параметров Стокса (см., например, [19, 25]) для излучения с произвольными волновыми фронтами, но успеха и дальнейшего развития они не получили.

4) К сожалению, групповой характер поляризационных преобразований $\{\hat{u}(a_0,\mathbf{a})\}$ не подчеркивается в стандартных руководствах по поляризационной оптике [16, 17].

а также общий фазовый сдвиг компонент вектора Джонса и поля $\mathbf{E}(t)$:

$$\hat{u}_{phs} = \begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} = e^{i\sigma}\hat{\Sigma}^0, \tag{15}$$

принадлежащий подгруппе

$$U(1) = \{\hat{u}(a_0 = e^{i\delta}, \mathbf{0})\} \subset U(2) = \\ = \{\hat{u}(a_0, \mathbf{a})\} = U(1) \times SU(2),$$

$$SU(2) = \{\hat{u}(a_0 = \cos\delta', i\sin\delta'\mathbf{n})\}.$$

В эксперименте обычно оперируют не с полярными координатами на сфере Пуанкаре (θ, φ), задающими направление оси вращения, и углом поворота δ' вокруг нее, а с параметрами поляризационных преобразователей. Такими параметрами служат эффективные коэффициенты пропускания $t = \cos\delta + i\sin\delta\cos 2\chi$ и отражения $r = i\sin\delta\sin 2\chi$. Здесь $\delta = (\pi/\lambda)(n_o - n_e)\, d$, угол χ отсчитывается от вертикального направления, d — геометрическая толщина пластинки, n_o, n_e — обыкновенный и необыкновенный показатели преломления материала, из которого изготовлена пластинка. Переход от представления параметров поляризационного преобразователя (t, r) или (δ, χ) к параметрам пространства Стокса–Пуанкаре $(\delta', \mathbf{n})$ дается следующими преобразованиями [32]:

$$\begin{aligned} &\cos\delta' = \operatorname{Re} t^2 - |r|^2, \\ &\quad n_1 \equiv \sin\theta\cos\varphi = 2\sin\delta' \operatorname{Re} t \operatorname{Im} r, \\ &\quad n_2 \equiv \sin\theta\sin\varphi = -2\sin\delta' \operatorname{Re} t \operatorname{Re} r, \\ &\quad n_3 \equiv \cos\theta = \sin\delta' \operatorname{Im} t^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Так, действие фазовой пластинки, изготовленной из двулучепреломляющего материала, задается преобразованием $\hat{u}_{pr}^{-1}\hat{u}_{ps}\hat{u}_{pr}$, которое описывается матрицей

$$\begin{pmatrix} t & r \\ -r^* & t^* \end{pmatrix}. \tag{17}$$

2.5. Поляризационные преобразования элементов матрицы когерентности, переменных и параметров Стокса определяются через действие матриц (12) на векторы Джонса:

$$E_\alpha \xrightarrow{u(\{a_i\})} \hat{u}E_\alpha = \sum_{\beta=x,y} u_{\alpha\beta}(\{a_i\})E_\beta = \\ = \sum_\beta E_\beta \sum_{i=0}^{3} a_i \Sigma^i_{\alpha\beta} \tag{18}$$

и соотношений (4)–(8), (12), (13) и типа (14). В частности, по этим правилам получается, что $\sigma_{1,2,3}(\{E_\alpha\})$ преобразуются как компоненты трехмерных $SU(2)$-векторов, а $\sigma_0(\{E_\alpha\})$ как $SU(2)$-скаляры относительно преобразований, следующих из (12):

$$\sigma_{i=1,2,3}(\{E_\alpha\}) \xrightarrow{u(\{a_i\})} \hat{U}\sigma_{i=1,2,3} = \\ = \sum_{j=1,2,3} U^1_{ij}(\{a_l\})\sigma_j, \tag{19}$$

$$U^1_{ij}(\{a_l\}) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1,2,3} a_k a_l^* \operatorname{Tr}\left(\hat{\Sigma}_i\hat{\Sigma}_k\hat{\Sigma}_j\hat{\Sigma}_l\right) = \\ = (|a_0|^2 - aa^*)\delta_{ij} + \\ + i\sum_{l=1,2,3}(a_0 a_l^* - a_l a_0^*)\varepsilon_{lij} + a_i a_j^* + a_j a_i^*, \tag{20}$$

$$\sigma_0 \xrightarrow{u(\{a_i\})} \hat{U}^0\sigma_0 = \sigma_0. \tag{21}$$

3. ОПИСАНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ СВЕТА В КВАНТОВОЙ ОПТИКЕ

3.1. Общие замечания и концепция *P*-квазиспина

3.1.1. В квантовой оптике (как разделе квантовой электродинамики) вместо модели (1) ключевую роль играют стандартные осцилляторные разложения операторов векторного потенциала $\hat{\mathbf{A}}$ и электрического поля $\hat{\mathbf{E}}$ по плоским монохроматическим волнам — элементарным объектам в описании квантованного излучения, задающим фотонную структуру электромагнитного поля [4, 20, 30, 33, 34].

В наиболее распространенном частном случае плосковолнового (но не обязательно квазимонохроматического) излучения такое разложение для электрического поля $\hat{\mathbf{E}}$ имеет вид [30, 34]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(z;t) &= \mathbf{e}_x\hat{E}_x(z;t) + \mathbf{e}_y\hat{E}_y(z;t) = \\ &= \mathbf{e}_x\left[\hat{E}_{x1}(z;t) + \hat{E}_{x2}(z;t) + \ldots\right] + \\ &+ \mathbf{e}_y\left[\hat{E}_{y1}(z;t) + \hat{E}_{y2}(z;t) + \ldots\right], \\ \hat{E}_{\alpha l}(z;t) &= \hat{E}^{(-)}_{\alpha l}(z;t) + \hat{E}^{(+)}_{\alpha l}(z;t), \\ \hat{E}^{(+)}_{\alpha l}(z;t) &= i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_l}{V}}\,\hat{a}_{\alpha l}\exp\left\{i\omega_l\left[\frac{z}{c} - t\right]\right\}, \\ \hat{E}^{(+)}_{\alpha l}(z;t) &= \left(\hat{E}^{(-)}_{\alpha l}(z;t)\right)^\dagger, \end{aligned} \tag{22}$$

где $\hat{a}^\dagger_{\alpha l}(\hat{a}_{\alpha l})$ — операторы рождения (уничтожения) фотонов с частотой ω_l и поляризацией α, которые являются базисными величинами (вместо амплитуд и фаз $A_{x,y}$, $\phi_{x,y}$ и компонент вектора Джонса) при описании квантового излучения. В терминах этих операторов $\hat{a}^\dagger_{\alpha l}(\hat{a}_{\alpha l})$ определяются как произвольные квантово-оптические наблюдаемые, так и квантовые состояния [4, 34].

3.1.2. Так, гамильтониан H_f и импульс $\mathbf{P}_f$ $2m$-модового поля излучения определяются соотношениями

$$\begin{gathered}\hat{H}_f = \sum_{l=1}^{m} \omega_l \sum_{\alpha=x,y} \hat{n}_{\alpha l}, \quad \hat{\mathbf{P}}_f = \sum_{l=1}^{m} \mathbf{k}_l \sum_{\alpha=x,y} \hat{n}_{\alpha l}, \\ \hat{n}_{\alpha l} \equiv \hat{a}^\dagger_{\alpha l}\hat{a}_{\alpha l},\end{gathered} \tag{23}$$

а задающее описание квантовых состояний такого поля $2m$-модовое гильбертово пространство определяется как тензорное произведение

$$\begin{aligned}L_F(2m) &= \prod_l^{\otimes m} L_F^l(2) = \\ &= \operatorname{Span}\left\{|\{n_{x,l}, n_{y,l}\}\rangle \propto \prod_{l=1}^{m}\prod_{\alpha=x,y} (\hat{a}^\dagger_{\alpha l})^{n_{\alpha l}}|0\rangle\right\}\end{aligned} \tag{24}$$

2-модовых фоковских пространств $L_F^l(2) = \operatorname{Span}\{|\{n_{x,l}, n_{y,l}\}\rangle\}$ [4, 34], где базисные векторы $|\{n_{x,l}, n_{y,l}\}\rangle$ являются собственными для гамильтониана $\hat{H}_f$ (и импульса $\mathbf{P}_f$):

$$\begin{gathered}\hat{H}_f|\{n_{x,l}, n_{y,l}\}\rangle = H_f|\{n_{x,l}, n_{y,l}\}\rangle, \\ H_f = \sum_{l=1}^{m}\omega_l \sum_{\alpha=x,y} n_{\alpha l}.\end{gathered} \tag{25}$$

Субиндексы «l» у операторов чисел фотонов $\hat{n}_{\alpha l}$ и их собственных значений $n_{\alpha l}$ относятся к «пространственно-временным», а не к «поляризационным» степеням свободы.

3.1.3. Для характеристики поляризационных свойств по аналогии с (6)–(8) можно определить «классические» плосковолновые операторы Стокса

$$\begin{aligned}&\hat{\sigma}^{cl}_{1,0}(t) = \\ &= \left[\hat{E}_x^{(-)}(z,t)\hat{E}_x^{(+)}(z,t) \mp \hat{E}_y^{(-)}(z,t)\hat{E}_y^{(+)}(z,t)\right],\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&\hat{\sigma}^{cl}_{2}(t) = \\ &= \left[\hat{E}_x^{(-)}(z,t)\hat{E}_y^{(+)}(z,t) + \hat{E}_y^{(-)}(z,t)\hat{E}_x^{(+)}(z,t)\right],\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&\hat{\sigma}^{cl}_{3}(t) = \\ &= i\left[\hat{E}_x^{(-)}(z,t)\hat{E}_y^{(+)}(z,t) - \hat{E}_y^{(-)}(z,t)\hat{E}_x^{(+)}(z,t)\right].\end{aligned} \tag{28}$$

С помощью подстановок (22) они выражаются в форме

$$\begin{gathered}\hat{\sigma}^{cl}_i = \sum_{j,k=1}^{m} \Lambda_j\Lambda_k e^{i(\omega_k-\omega_j)\tau} \sum_{\alpha,\beta} \Sigma^i_{\beta,\alpha}\hat{a}^\dagger_{\alpha j}\hat{a}_{\beta k}, \\ \tau = \frac{z}{c} - t, \quad \Lambda_j = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_j}{V}}.\end{gathered} \tag{29}$$

Нестационарные операторы (29) при $m \geq 2$ непригодны для поляризационной характеристики квантовых световых состояний в силу наличия быстро осциллирующих во времени факторов $e^{i(\omega_k-\omega_j)\tau}$. Эти биения не связаны с поляризационными характеристиками поля и определяются его пространственно-временной структурой.

3.1.4. Отмеченные недостатки в описании поляризации квантового света устраняются в рамках симметрийной концепции P-квазиспина, базирующейся на использовании специфической (калибровочной) поляризационной $U(2)_P$-инвариантности световых полей [4, 35], задаваемой комплексными «вращениями» поляризационных ортов $\mathbf{e}_\alpha(i)$ в пространствах $L_{P_{spin}}(i)$ «поляризационных спиноров» $(e_+(i), e_-(i))^{tr}$:

$$\begin{gathered}\mathbf{e}_{\alpha=\pm}(i) \to \tilde{\mathbf{e}}_\alpha(i) = \sum_{\beta=+,-} u_{\beta\alpha}\mathbf{e}_\beta(i), \\ \sum_{\beta=+,-} u^*_{\beta\alpha'}u_{\beta\alpha} = \delta_{\alpha\alpha'}\end{gathered} \tag{30}$$

и поляризационных спинорных операторов $\hat{a}_{\alpha=\pm}$ [5)]:

$$\hat{a}_{\alpha=\pm}(i) \to \tilde{a}_\alpha(i) = \sum_{\beta=+,-} u_{\alpha\beta}\hat{a}_\beta(i). \tag{31}$$

Здесь «±» — поляризационные индексы в спиральном базисе, который наиболее удобен с квантово-электродинамической точки зрения [4, 33]. Он обеспечивает возможность представления произвольных поляризационных наблюдаемых и преобразований бездиссипативной оптики в терминах специальных билинейных комбинаций операторов рождения и уничтожения фотонов $\hat{a}^\dagger_{\alpha j}(\hat{a}_{\alpha j})$ — операторов полного числа фотонов $\hat{n} = \sum_{\alpha,l}\hat{n}_{\alpha l}$ и компонент $\hat{P}_{i=1,2,3}$ P-квазиспина, удовлетворяющих коммутационным соотношениям алгебры Ли $u(2) = su(2) + u(1)$:

$$\begin{gathered}\left[\hat{P}_1, \hat{P}_2\right] = i\hat{P}_3, \quad \left[\hat{P}_2, \hat{P}_3\right] = i\hat{P}_1, \\ \left[\hat{P}_3, \hat{P}_1\right] = i\hat{P}_2, \quad \left[\hat{P}_{\alpha=1,2,3}, \hat{n}\right] = 0.\end{gathered} \tag{32}$$

[5)] Явный вид матриц $\parallel U_{\alpha\beta} \parallel$ в двух параметризациях приводятся в Приложении (см. (П.9), (П.10)).

3.1.5. Для случая плоских монохроматических волн (с фиксированными волновыми векторами $\mathbf{k}$ и частотами ω), являющихся элементарными объектами в стандартном осцилляторном разложении световых полей [33], операторы $\hat{P}_{i=1,2,3}$ пропорциональны «классическим» векторным операторам Стокса: $\hat{P}_i = \hat{\sigma}_i^{cl}\Lambda^{-2}/2$ и выражаются следующим образом:

$$\hat{P}_1 = \frac{1}{2}(\hat{n}_x - \hat{n}_y) = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+\right), \tag{33}$$

$$\hat{P}_2 = \frac{1}{2}(\hat{n}_{x'} - \hat{n}_{y'}) = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x\right) = i\frac{1}{2}\left(\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+ - \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-\right), \tag{34}$$

$$\hat{P}_3 = \frac{1}{2}(\hat{n}_+ - \hat{n}_-) = i\frac{1}{2}\left(\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y\right) \tag{35}$$

через разности операторов числа фотонов $\hat{n}_\alpha = \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha$ в стандартных парах ортогональных поляризационных мод: в вертикально-горизонтальном $(\alpha = x, y)$, диагональном $(\alpha = x', y')$ и циркулярном $(\alpha = +, -)$ базисах. Операторы в соответствующих парах мод связаны между собой унитарными преобразованиями

$$\begin{aligned} \hat{a}_{x'} &= \frac{\hat{a}_x + \hat{a}_y}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}_+ = \frac{\hat{a}_x - i\hat{a}_y}{\sqrt{2}}, \\ \hat{a}_{y'} &= \frac{-\hat{a}_x + \hat{a}_y}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}_- = \frac{\hat{a}_x + i\hat{a}_y}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{36}$$

Отметим, что оператор $\hat{P}_3$ кратен оператору спиральности ($\hat{P}_3 = (\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{k})c/2\omega$) — проекции $(\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{k})c/\omega$ спинового оператора на ось распространения пучка. Это делает удобным использование спирального базиса в общих теоретических разработках [33]. В то же время оператор Стокса $\hat{\sigma}_0^{cl}$ пропорционален оператору $\hat{n} = \sum_\alpha \hat{n}_\alpha$ полного числа фотонов и связан с P-квазиспиновыми операторами $\hat{P}_\alpha$ следующим образом:

$$\frac{\hat{\sigma}_0^{cl}}{2\Lambda}\left(\frac{\hat{\sigma}_0^{cl}}{2\Lambda} + 1\right) = \frac{\hat{n}}{2}\left(\frac{\hat{n}}{2} + 1\right) = \hat{P}^2 + \hat{P} \equiv \equiv \hat{\mathbf{P}}^2 \equiv \hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \hat{P}_3^2 \to \hat{P} = \frac{\hat{n}}{2}, \tag{37}$$

где $\hat{\mathbf{P}}^2$ определяет инвариантный оператор Казимира группы $SU(2)_P$ собственно поляризационных преобразований [4, 30][6]:

$$SU(2)_P = \left\{ \hat{U}(\mathbf{u}) = \exp(-i\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{P}}) = \exp\left(-i\sum_{j=1}^{3} u_j \hat{P}_j\right) = \exp\left(-i\delta'\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{P}}\right) = \hat{U}(\delta', \mathbf{n}) \right\}, \tag{38}$$

$$\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{P}} \equiv \left(\hat{P}_1 \sin\theta\cos\varphi + \hat{P}_2 \sin\theta\sin\varphi + \hat{P}_3\cos\theta\right) = \hat{T}(\mathbf{n})\hat{P}_3\hat{T}^\dagger(\mathbf{n}), \tag{38}$$

где

$$\hat{T}(\mathbf{n}) \equiv \exp\left\{-\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\hat{P}_+ + \frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\hat{P}_-\right\} = \exp\left\{-i\theta\left(-\hat{P}_1\sin\varphi + \hat{P}_2\cos\varphi\right)\right\},$$

$$\hat{P}_\pm \equiv \hat{P}_1 \pm i\hat{P}_2.$$

3.1.6. Группа $SU(2)$ — подгруппа группы

$$U(2)_P = \{\exp(iu_o\hat{n})\exp(-i\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{P}})\},$$

которая является аналогом группы поляризационных преобразований $U(2) = \{\hat{u}(a_0, \mathbf{a})\}$ классической оптики, а соотношение (37) — операторный аналог формулы (9) и определяет операторную сферу Пуанкаре $\hat{S}_P^2$ [29]:

$$\hat{S}_P^2 \equiv \left\{ \hat{\mathbf{P}}(u) \equiv \hat{U}(\mathbf{u})\hat{\mathbf{P}}\hat{U}^\dagger(\mathbf{u}) : \hat{U}(\mathbf{u})\hat{\mathbf{P}}^2\hat{U}^\dagger(u) = \sum_{i=1,2,3}\hat{P}_i^2(u) = \sum_{i=1,2,3}\hat{P}_i^2 = \hat{\mathbf{P}}^2 \right\}. \tag{40}$$

В квантовом случае (40) определяет обычную сферу Пуанкаре S_P^2 (аналог (10)) в терминах квантовых средних $\langle\hat{P}_i\rangle$:

$$S_P^2 \equiv \left\{ \langle\hat{\mathbf{P}}(u)\rangle : \sum_{i=1,2,3}\langle\hat{P}_i^2(u)\rangle = \sum_{i=1,2,3}\langle\hat{P}_i^2\rangle \right\}. \tag{41}$$

Отметим, что оператор $\hat{T}(\mathbf{n}) \equiv \hat{U}$ $(u = \theta(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)^{tr})$ описывает вращения на этих сферах.

3.1.7. В случае произвольных пучков с m различными ПВ-модами, определяемыми спектром $\mathbf{k}_j$, многие аспекты P-квазиспинового формализма

[6] Отметим, что фактически такая группа неявно и без привлечения концепции P-квазиспина использовалась в работах [21–23] для определения состояний квантового неполяризованного света.

(включая формулы для преобразований $\hat{U}(\mathbf{u})$) обобщаются путем использования как компонент $\hat{P}_{i\mathbf{k}_j}$ «парциальных» P_j-квазиспинов, так и компонент $\hat{P}_i = \sum_j \hat{P}_{i\mathbf{k}_j}$ полного P-квазиспина, характеризующего кооперативные поляризационные свойства световых полей как многофотонной динамической системы [30]. При этом, в отличие от операторов Стокса $\hat{\sigma}_i^{cl}$, операторы $\hat{P}_i$ определяются не через полевые операторы $\hat{E}^{(\pm)}$, а через их «фильтрованные» фурье-образы:

$$\hat{a}_{\alpha l} = -i\sqrt{\frac{V^{1/3}}{2\pi\hbar\omega_l}} \times \int_0^{V^{1/3}} \left(\mathbf{e}_\alpha^* \cdot \hat{E}^{(+)}(z; t=0)\right) e^{-i\omega_l z/c} dz, \quad (42)$$

где скалярное произведение $\mathbf{e}_\alpha^* \cdot \hat{E}^{(+)}(z; t=0)$ определяется поляризационным фильтром. Кроме того, соотношение (37) теперь несправедливо, и оператор $\hat{P}$ полного P-квазиспина становится независимой поляризационной динамической переменной.

3.2. Поляризационный базис в гильбертовом пространстве $L_F(2m)$ квантовых световых полей

3.2.1. В рамках P-квазиспинового формализма многообразие поляризационных состояний квантового света описывается путем введения в $2m$-модовом гильбертовом пространстве

$$L_F(2m) = = \mathrm{Span}\left\{|\{n_{i+}, n_{i-}\}\rangle \propto \prod_{j=1}^m \prod_{\alpha=\pm} (\hat{a}_{\alpha j}^\dagger)^{n_{\alpha j}} |0\rangle\right\} \quad (43)$$

поляризационного базиса $\{|P;\mu;\lambda\rangle\}$ собственных состояний двух коммутирующих операторов $\hat{\mathbf{P}}^2$ и $\hat{P}_3$:

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{P}}^2|P;\mu;\lambda\rangle = P(P+1)|P;\mu;\lambda\rangle, \\ &\hat{P}_3|P;\mu;\lambda\rangle = \mu|P;\mu;\lambda\rangle, \\ &2P = 0, 1, \ldots, \infty, \quad |\mu| \le P, \end{aligned} \quad (44)$$

где (отсутствующий при $m = 1$) $SU(2)_P$-инвариантный составной индекс λ описывает вырождение собственных значений P, μ полного P-квазиспина и его проекции. Введение базиса (44) соответствует разложению

$$L_F(2m) = \sum_{2P=0}^{\infty} L(P),$$
$$L(P) = \left\{\sum_{\mu,\lambda} c_{\mu,\lambda}^P |P;\mu;\lambda\rangle\right\} \equiv \equiv \mathrm{Span}\{|P;\mu;\lambda\rangle : P = \mathrm{const}\} \quad (45)$$

пространства $L_F(2m)$ в бесконечную сумму $SU(2)_P$-инвариантных подпространств $L(P)$ с фиксированным значением P-квазиспина. Разложение (45) аналогично разложению пространства состояний в известной точечной модели Дике и служит источником выявления кооперативных особенностей поляризационных свойств многочастотных световых полей [28, 30].

3.2.2. Для элементарного случая одной ПВ-моды ($m = 1$) базисные векторы $|P;\mu;\lambda\rangle = |P;\mu\rangle$ задаются путем перенумерации 2-модовых фоковских состояний $|n_+, n_-\rangle$:

$$|P;\mu\rangle = |n_+ = P + \mu,\, n_- = P - \mu\rangle = = \frac{1}{\sqrt{[n_+! n_-!]}} (\hat{a}_+^\dagger)^{n_+} (\hat{a}_-^\dagger)^{n_-} |0\rangle \quad (46)$$

в спиральном базисе. Например, для двухфотонного поля в одной ПВ-моде набор базисных состояний сводится к тройке

$$\begin{aligned} &|2_+, 0_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_+^\dagger)^2|\mathrm{vac}\rangle = |P = 1, \mu = 1\rangle, \\ &|0_+, 2_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_-^\dagger)^2|\mathrm{vac}\rangle = |P = 1, \mu = -1\rangle, \\ &|1_+, 1_-\rangle = \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-^\dagger|0\rangle = |P = 1, \mu = 0\rangle. \end{aligned} \quad (47)$$

Произвольное (чистое) поляризационное состояние такого поля представляется суперпозицией

$$\Psi_{P=1} = \frac{r_1}{\sqrt{2}}|2_+, 0_-\rangle + r_2|1_+, 1_-\rangle + \frac{r_3}{\sqrt{2}}|0_+, 2_-\rangle. \quad (48)$$

Такие состояния получили название кутриты по аналогии с кубитами, поляризационное представление которых в рамках концепции квазиспина ($P = 1/2, \mu = \pm 1/2$) имеет вид

$$\Psi_{P=1/2} = r_1^{(0)}|1_+, 0_-\rangle + r_2^{(0)}|0_+, 1_-\rangle. \quad (49)$$

Для случая произвольного числа m ПВ-мод можно использовать два типа поляризационных базисов:

1) базис, получаемый в результате тензорного произведения

$$\prod_{j=1}^{\otimes m} |P_j; \mu_j\rangle$$

базисов вида (46) пространств $L_F^j(2)$ отдельных ПВ-мод. Такой базис удобен для их независимого поляризационного анализа. Для двухмодового ($m = 2$) и двухфотонного ($n = 2$) света базисные состояния имеют вид

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= |1_{+1}, 0_{-1}\rangle \otimes |1_{+2}, 0_{-2}\rangle,\\ \Psi_2 &= |0_{+1}, 1_{-1}\rangle \otimes |0_{+2}, 1_{-2}\rangle,\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}\Psi_3 &= |0_{+1}, 1_{-1}\rangle \otimes |1_{+2}, 0_{-2}\rangle,\\ \Psi_4 &= |1_{+1}, 0_{-1}\rangle \otimes |0_{+2}, 1_{-2}\rangle.\end{aligned} \tag{51}$$

2) Базис векторов $|P;\mu;\lambda\rangle$, определяемых путем перепутывания «парциальных» состояний $|P_j;\mu_j\rangle$, $j = 1,\ldots,m$ с помощью коэффициентов Клебша – Гордана $C^{P,\mu}_{P_1,\mu_1,P_2,\mu_2}$ группы $SU(2)$. Такой базис удобно использовать для анализа коллективных поляризационных свойств поля. При этом составные индексы λ вводятся через парциальные ($P_j = n_j/2$) и промежуточные ($P_{ij}, P_{ijk},\ldots$) P-квазиспины [4, 26], определяемые по правилам сложения угловых моментов через коэффициенты Клебша – Гордана [36]:

$$\begin{aligned}&\Big|P;\mu;\lambda \equiv\\ &\equiv \left\{P_1 = \frac{n_1}{2}, P_2 = \frac{n_2}{2},\ldots, P_m = \frac{m_2}{2}; P_{ij}, P_{ijk},\ldots\right\}\Big\rangle =\\ &= \sum_{\mu_1+\mu_2=\mu} C^{P_{ij},\mu_{ij}}_{P_i,\mu_i,P_j,\mu_j}\ldots C^{P_{ijk},\mu_{ijk}}_{P_{ij},\mu_{ij},P_k,\mu_k}\times\\ &\quad\times C^{P,\mu}_{P_{ijk\ldots},\mu_{ijk\ldots},P_m,\mu_m}\times\\ &\quad\times|P_1;\mu_1\rangle|P_2;\mu_2\rangle\ldots|P_m;\mu_m\rangle,\end{aligned} \tag{52}$$

где индексы ij, ijk обозначает способ связи моментов или «кластеризации» ПВ-мод.

3.2.3. Так, для случая $m = 2$ имеем

$$\begin{aligned}&\Big|P;\mu;\lambda \equiv \left\{P_1 = \frac{n_1}{2}, P_2 = \frac{n_2}{2},\right\}\Big\rangle =\\ &= \sum_{\mu_1+\mu_2=\mu} C^{P,\mu}_{P_1,\mu_1,P_2,\mu_2}|P_1;\mu_1\rangle|P_2;\mu_2\rangle =\\ &= \Big|P;\mu;\lambda' \equiv \left\{n = n_1+n_2, \tau = \frac{1}{2}(n_1-n_2)\right\}\Big\rangle \propto\\ &\propto (\hat{P}_-)^{P-\mu}(\hat{E}_{21})^{P-\tau}(a^\dagger_{11})^{2P}(\hat{X}^\dagger_{12})^{n/2-P}|0\rangle,\end{aligned} \tag{53}$$

где составной индекс λ' связан с квантовыми числами группы $SU(2)_\omega$, порожденной генераторами

$$\begin{aligned}&\hat{E}_{12} = \sum_{\alpha=\pm}\hat{a}^\dagger_{\alpha1}\hat{a}_{\alpha2}, \quad \hat{E}_{21} = \sum_{\alpha=\pm}\hat{a}^\dagger_{\alpha2}\hat{a}_{\alpha1},\\ &\hat{E}_0 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=\pm}\left[\hat{a}^\dagger_{\alpha1}\hat{a}_{\alpha1} - \hat{a}^\dagger_{\alpha2}\hat{a}_{\alpha2}\right],\end{aligned} \tag{54}$$

и группы $SU(1,1)$, порожденной генераторами

$$\begin{aligned}&\hat{X}^\dagger_{12} = \hat{a}^\dagger_{+1}\hat{a}_{-2} - \hat{a}^\dagger_{-1}\hat{a}_{+2}, \quad \hat{X}_{12} = (\hat{X}^\dagger_{12})^\dagger,\\ &\frac{n}{2} + 1 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=\pm}\left[\hat{a}^\dagger_{\alpha1}\hat{a}_{\alpha1} + \hat{a}^\dagger_{\alpha2}\hat{a}_{\alpha2}\right] + 1,\end{aligned} \tag{55}$$

которые коммутируют между собой и с группой поляризационной инвариантности $SU(2)_P$ [25, 30].

Как следует из (52), для двухмодового и двухфотонного света некоторые коллективные базисные состояния являются (максимально) перепутанными и не представляются в виде прямых произведений поляризационных состояний в каждой моде. Так, если каждая ПВ-мода содержит по одному фотону, соответствующие базисные состояния принимают вид

$$\begin{aligned}&|P = 0; \mu = \mu_1+\mu_2 = 0; \lambda = 1/2, 1/2, (\lambda' = 2, 0)\rangle =\\ &= C^{0,0}_{1/2,-1/2;1/2,1/2}|1/2,-1/2\rangle -\\ &- C^{0,0}_{1/2,1/2;1/2,-1/2}|1/2,1/2\rangle =\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a^\dagger_{+1}a^\dagger_{-2} - a^\dagger_{+2}a^\dagger_{-1}\right]|0\rangle =\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[1_{+1}1_{-2} - 1_{-1}1_{+2}],\end{aligned} \tag{56а}$$

$$\begin{aligned}&|P = 1; \mu = \mu_1+\mu_2 = 0; \lambda = 1/2, 1/2, (\lambda' = 2, 0)\rangle =\\ &= C^{1,0}_{1/2,-1/2;1/2,1/2}|1/2,-1/2\rangle +\\ &+ C^{1,0}_{1/2,1/2;1/2,-1/2}|1/2,1/2\rangle =\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a^\dagger_{+1}a^\dagger_{-2} + a^\dagger_{+2}a^\dagger_{-1}\right]|0\rangle =\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[1_{+1}1_{-2} + 1_{-1}1_{+2}].\end{aligned} \tag{56б}$$

Два оставшихся базисных состояния $P = 1$, $\mu = \pm1$ являются факторизованными по поляризационным состояниям отдельных мод и совпадают с (50):

$$\begin{aligned}&|P = 1; \mu = 1(\mu_1 = 1/2, \mu_2 = 1/2);\\ &\quad\lambda \equiv \{1,1\}\rangle =\\ &= C^{1,1}_{1/2,1/2;1/2,1/2}\hat{a}^\dagger_{+1}\hat{a}^\dagger_{+2}|0\rangle = \hat{a}^\dagger_{+1}\hat{a}^\dagger_{+2}|0\rangle,\\ &|P = 1; \mu = -1(\mu_1 = -1/2, \mu_2 = -1/2);\\ &\quad\lambda \equiv \{1,1\}\rangle =\\ &= C^{1,-1}_{1/2,-1/2;1/2,-1/2}\hat{a}^\dagger_{-1}\hat{a}^\dagger_{-2}|0\rangle = \hat{a}^\dagger_{-1}\hat{a}^\dagger_{-2}|0\rangle.\end{aligned} \tag{57}$$

Заметим, что перепутанные состояния возникают в рамках используемого формализма как естественное следствие симметрийных свойств P-квазиспина. Так, для случая $m = 2$, $n = 2$ перепутанные состояния отвечают нулевому собственному значению третьей проекции P-квазиспина P_3.

3.3. Основные *P*-квазиспиновые операциональные характеристики поляризации квантового света

3.3.1. Стандартные операциональные характеристики поляризации квантового света определяются по аналогии с классической оптикой формулами типа (11) путем использования квантовых средних для операторов (26)–(28).

3.3.2. Новые сугубо квантовые операциональные характеристики поляризации квантового света определяются с помощью моментов $\langle\prod_i(\hat{P}_i)^{\alpha_i}\rangle$ компонент $\hat{P}_i$ P-квазиспина или через поляризационную характеристическую функцию $\xi_P(\{u_i\}) \equiv \langle U^\dagger(\{u_i\})\rangle$. В принципе, можно определить множество таких операциональных характеристик поляризации как отдельно различных ПВ-мод, так и коллективных полевых — по аналогии с определением поляризационных базисов в $L_F(2m)$. Среди них можно выделить [30]:

1) коллективную P-квазиспиновую степень поляризации

$$P = 2\frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1,2,3}\langle\hat{P}_i\rangle^2}}{\langle\hat{n}\rangle}, \quad \hat{n} = \sum_{j=1}^{m}\hat{n}_j, \tag{58а}$$

$$\hat{n}_j = \sum_{\alpha=\pm}\hat{n}_{j\alpha}, \quad \hat{n}_{j\alpha} = \hat{a}^\dagger_{j\alpha}\hat{a}_{j\alpha};$$

2) P-квазиспиновые компонентные «шумы»

$$\Delta P_i^2 = \langle\hat{P}_i^2\rangle - \langle\hat{P}_i\rangle^2; \tag{59}$$

3) полный поляризационный «шум»

$$\Delta P^2 = \sum_{i=1}^{3}\Delta P_i^2 = \langle\hat{\mathbf{P}}^2\rangle - \frac{\langle\hat{n}\rangle^2}{4}(P\langle\hat{n}\rangle)^2, \tag{60}$$

определяющий операциональный смысл квадрированного P-квазиспина $\hat{\mathbf{P}}^2$. Отметим, что при $m = 1$ коллективная P-квазиспиновая степень поляризации (58а) совпадает с «классической» и/или парциальной степенью поляризации (для одной ПВ-моды). В общем же случае $m \geq 2$ P-квазиспиновая степень поляризации имеет самостоятельное значение и определена для полей с произвольным пространственным и частотным спектром. Вместе с тем «классическая» степень поляризации

$$P_{cl} = \frac{1}{\langle\hat{\sigma}_0^{cl}\rangle}\sqrt{\sum_{i=1,2,3}\langle\hat{\sigma}_i^{cl}\rangle^2}, \tag{58б}$$

получаемая с помощью подстановки в (11) значений $\langle\hat{\sigma}_i^{cl}\rangle$ квантовых ожиданий (средних) операторов (29), явно зависит от времени и отличается от (58а). С операциональной точки зрения, если время измерения T превышает период осцилляций $T \gg (\omega_k - \omega_j)^{-1}$, то можно определить стационарную «классическую» степень поляризации:

$$P_{st} = \frac{1}{\langle\overline{\hat{\sigma}_0^{cl}}\rangle}\sqrt{\sum_{i=1,2,3}\langle\overline{\hat{\sigma}_i^{cl}}\rangle^2} = 2\left\{\sum_{j=1}^{m}\omega_j\langle\hat{n}_j\rangle\right\}^{-1}\times$$
$$\times\sqrt{\sum_{i=1,2,3}\left[\sum_{j=1}^{m}\langle P_{i\mathbf{k}_j}\rangle\omega_j\right]^2}, \tag{58в}$$

где чертой сверху обозначается усреднение по времени операторов в представлении Гейзенберга (29):

$$\overline{\hat{\sigma}_i^{cl}} = \sum_{\alpha,\beta}\Sigma^i_{\beta,\alpha}\sum_{l=1}^{m}(\Lambda_l)^2\hat{a}^\dagger_{\alpha l}\hat{a}_{\beta l}.$$

Заметим, что в общем случае стационарная степень поляризации тоже не совпадает с квазиспиновой из-за наличия взвешенной суммы парциальных вкладов.

В качестве примера вычислим значения степени поляризации и полного поляризационного шума для базисных векторов $|P;\mu;\lambda\rangle$ из уравнений (50), (56) и степени поляризации для 4-модовых когерентных состояний $|\{\alpha_{\pm i=1,2}\}\rangle$, соответствующих двум ПВ-модам ($m = 2$).

1) Учтем, что векторы $|P;\mu;\lambda\rangle$ являются собственными для операторов квадрата полного P-квазиспина $\hat{\mathbf{P}}^2$ и проекции P_3 на ось z, и что две другие проекции ($P_{1,2}$) оператора $\hat{\mathbf{P}}$ не имеют ненулевых диагональных матричных элементов. Тогда

$$P = \frac{|\mu|}{P_1+P_2+\ldots+P_m}, \quad \Delta P^2 = P(P+1)-\mu^2, \tag{61}$$

откуда

$$P\left(\left|P=1;\mu=\pm1;\lambda=\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right) = 1, \tag{62}$$

$$P\left(\left|P=0;\mu=0;\lambda=\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right) = 0. \tag{63}$$

Нетрудно убедиться, что эти значения степени поляризации совпадают с вычисленными по формуле (58в). Из выражений (61) следует, что обе характеристики (61) не зависят от (квантовых) чисел λ.

2) В случае когерентных состояний при наличии двух ПВ-мод можно ввести следующую параметризацию:

$$\alpha_{+i} = r_i e^{i\varphi_i} \cos\frac{\theta_i}{2}, \quad \alpha_{-i} = r_i e^{i(\varphi_i+\phi_i)} \sin\frac{\theta_i}{2}. \quad (65)$$

Тогда, используя результаты работы [27] для вычисления средних $\langle\hat{P}_i\rangle$, находим

$$P = \frac{\sqrt{r_1^4+r_2^4+2r_1^2r_2^2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}}{r_1^2+r_2^2}, \quad \Delta P^2 = \frac{3}{4}(r_1^2+r_2^2). \quad (66а)$$

В то же время вычисленное по формуле (58б) выражение для стационарной классической степени поляризации

$$P_{st} = \frac{\sqrt{\omega_1^2 r_1^4 + \omega_2^2 r_2^4 + 2\omega_1\omega_2 r_1^2 r_2^2 \cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}}{\omega_1 r_1^2 + \omega_2 r_2^2} \quad (66б)$$

не совпадает с (66а) для макроскопических пучков и допускает простую экспериментальную проверку.

3.4. Поляризационные преобразования основных величин и характеристик квантового света

Можно выделить два класса поляризационных преобразований над произвольными величинами. Они определяются преобразованиями операторов рождения и уничтожения относительно либо «парциальных», либо полных групп.

Преобразования относительно парциальных групп проводятся независимо в каждой j-й ПВ-моде:

$$SU(2)_P^j = \left\{\hat{U}(\mathbf{u}^j = \{u_i^j\}) = \exp\left(-i\sum_i u_i^j \hat{P}_{i\mathbf{k}_j}\right)\right\}. \quad (67)$$

Полные или коллективные преобразования сводятся к синфазным преобразованиям в отдельных ПВ-модах:

$$SU(2)_P = \left\{\hat{U}(\mathbf{u} = \{u_i\}) = \exp(-iu\hat{P}) = \exp\left(-i\sum_i u_i\hat{P}_i\right)\right\}. \quad (68)$$

3.4.1. Преобразования поляризационных спинорных операторов

$$\hat{a}^\dagger_{\pm j} \to \hat{a}^\dagger_{\pm j}(\delta',\mathbf{n}) \equiv \hat{U}(\delta',\mathbf{n})\hat{a}^\dagger_{\pm j}\hat{U}^\dagger(\delta',\mathbf{n}) = \sum_{\mu=\pm}\hat{U}^{1/2}_{\pm,\mu}(\delta',\mathbf{n})\hat{a}^\dagger_{\mu j}, \quad (69)$$

где матричные элементы $\hat{U}^{1/2}_{\pm,\mu}(\delta',\mathbf{n})$ задаются формулой (П.9).

3.4.2. Преобразования поляризационных векторных операторов:

$$\hat{V}^+_{\nu=+,0,-} = \hat{V}^+_{\nu=+,0,-}(\delta',\mathbf{n}) \equiv \hat{U}(\delta',\mathbf{n})\hat{V}^+_{\nu=+,0-}\hat{U}^+(\delta',\mathbf{n}) = \sum_{\mu=0,\pm}\hat{U}^1_{\nu,\mu}(\delta',\mathbf{n})\hat{V}^+_\mu(\delta',\mathbf{n}), \quad (70)$$

где матричные элементы $\hat{U}^1_{\nu,\mu}(\delta',\mathbf{n})$ задаются формулой (П.11). В качестве примера выпишем преобразование компонент P-квазиспина относительно оператора движений на сферах Пуанкаре $\hat{T}(\mathbf{n}) \equiv \hat{U}(u = \theta(-\sin\varphi,\cos\varphi,0)^{tr})$ [30]:

$$P_{\alpha=1,2,3} \to P_\alpha(\mathbf{n}) = \hat{T}(n)P_\alpha\hat{T}^\dagger(n): \quad (71)$$

$$P_1(\mathbf{n}) = P_1\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \cos 2\varphi\sin^2\frac{\theta}{2}\right] - P_3\cos\varphi\sin\theta - P_2\sin 2\varphi\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$P_2(\mathbf{n}) = -P_1\sin 2\varphi\sin^2\frac{\theta}{2} - \hat{P}_3\sin\varphi\sin\theta + \hat{P}_2\left[\cos^2\frac{\theta}{2} + \cos 2\varphi\sin^2\frac{\theta}{2}\right],$$

$$\hat{P}_3(\mathbf{n}) = \hat{P}_1\sin\theta\cos\varphi + \hat{P}_2\sin\theta\sin\varphi + \hat{P}_3\cos\theta.$$

3.4.3. Поляризационные преобразования базисных векторов $\{|P;\mu;\lambda\rangle\}$

$$|P;\mu;\lambda\rangle \to |P;\mu;\lambda\rangle(\delta',\mathbf{n}) \equiv \hat{U}(\delta',\mathbf{n})|P;\mu;\lambda\rangle = \sum_{\mu'=-P}^{P} U^P_{\mu,\mu'}(\delta',\mathbf{n})|P;\mu';\lambda\rangle, \quad (72)$$

где матричные элементы $U^P_{\mu,\mu'}(\delta',\mathbf{n})$ задаются формулами (П.7)–(П.13).

4. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В БИФОТОННОЙ ОПТИКЕ

4.1. В двухфотонной или бифотонной оптике рассматриваются параметрические модели с гамильтонианами взаимодействия[7)] вида

$$\hat{H}_{bf} = \hbar \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\alpha,\beta=\pm} \left[g_{ij}^{\alpha\beta} \hat{a}_{\alpha i}^{\dagger} \hat{a}_{\beta i}^{\dagger} + (g_{ij}^{\alpha\beta^*}) \hat{a}_{\alpha i} \hat{a}_{\beta i} \right]. \quad (73)$$

Гамильтонианы $\hat{H}_{bf}$ квадратичны по полевым операторам $\hat{a}_{\alpha i}$, $\hat{a}_{\alpha i}^{\dagger}$ и заданы в пространствах $L_F^{bf}(2m) \subset L_F(2m)$ квантовых состояний, получаемых действием гамильтониана (73) на вакуумный вектор $|0\rangle$ (в стандартных моделях параметрического рассеяния [37–39]) или на какой-либо другой фиксированный вектор $|\Psi_{in}^{bf}\rangle \subset L_F(2m)$ [30, 39]. В простейшей стандартной модели пара фотонов спонтанно рождается в нелинейном кристалле ($\chi^{(2)} \neq 0$) под действием лазерной накачки. Максимальная интенсивность бифотонного поля достигается в направлениях и при частотах, удовлетворяющих условиям пространственного синхронизма: $\mathbf{k}_P = \mathbf{k}_i + \mathbf{k}_s$, $\omega_P = \omega_i + \omega_s$. Принято считать, что один из фотонов пары принадлежит холостой (i), а другой — сигнальной (s) моде, так что рассмотренный выше формализм выполняется для $m = 2$:

$$\begin{gathered} L_F^{bf}(2) = \sum_{P=0,1} L(P) \subset L_F(2), \\ L(P) = \left\{ \sum_{\mu} c_{\mu}^{P} |P;\mu\rangle \right\}. \end{gathered} \quad (74)$$

4.2. Для бифотонных полей в двух ПВ-модах можно построить P-квазиспиновую классификацию элементов гамильтониана (73) относительно действия полной группы

$$SU(2)_P = \left\{ \hat{U}(\mathbf{u} = \{u_i\}) = \exp\left(-i \sum_j u_i \hat{P}_j \right) \right\},$$

где $\hat{P}_j = \sum_l P_{j\mathbf{k}_l}$ — компоненты полного P-квазиспина. При этом все элементы делятся на два класса: 1) поляризационные (P) векторы

$$\begin{gathered} \hat{\mathbf{V}}^{+}[ii] = \Big(\hat{V}_{+}^{+}[ii] \equiv \sqrt{2} (\hat{a}_{+i}^{\dagger})^2, \\ \hat{V}_{0}^{+}[ii] \equiv \hat{a}_{+i}^{\dagger} \hat{a}_{-i}^{\dagger}, \hat{V}_{-}^{+}[ii] \equiv \sqrt{2} (\hat{a}_{-i}^{\dagger})^2 \Big), \end{gathered} \quad (75)$$

$$\begin{gathered} \hat{\mathbf{V}}^{+}[ss] = \Big(\hat{V}_{+}^{+}[ss] \equiv \sqrt{2} (\hat{a}_{+s}^{\dagger})^2, \\ \hat{V}_{0}^{+}[ss] \equiv \hat{a}_{+s}^{\dagger} \hat{a}_{-s}^{\dagger}, \hat{V}_{-}^{+}[ss] \equiv \sqrt{2} (\hat{a}_{-s}^{\dagger})^2 \Big), \end{gathered} \quad (76)$$

$$\begin{gathered} \hat{\mathbf{V}}^{+}[is] = \Big(\hat{V}_{+}^{+}[is] \equiv \hat{a}_{+i}^{\dagger} \hat{a}_{+s}^{\dagger}, \\ \hat{V}_{0}^{+}[is] \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{+i}^{\dagger} \hat{a}_{-s}^{\dagger} + \hat{a}_{+s}^{\dagger} \hat{a}_{-i}^{\dagger}), \\ \hat{V}_{-}^{+}[is] \equiv \hat{a}_{-i}^{\dagger} \hat{a}_{-s}^{\dagger} \Big); \end{gathered} \quad (77)$$

2) поляризационные P-скаляры

$$\hat{X}^{+}[is] \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{+i}^{\dagger} \hat{a}_{-s}^{\dagger} - \hat{a}_{-i}^{\dagger} \hat{a}_{+s}^{\dagger}). \quad (78)$$

Три элемента в (75), (76) описывают поляризационные преобразования в одной ПВ-моде и определяют пространство состояний кутритов: $\hat{V}_{+}^{+}[ii]$, $\hat{V}_{0}^{+}[ii]$, $\hat{V}_{-}^{+}[ii]$ для холостой моды и $\hat{V}_{+}^{+}[ss]$, $\hat{V}_{0}^{+}[ss]$, $\hat{V}_{-}^{+}[ss]$ для сигнальной. В обозначениях, использованных в работах [10, 11, 41, 42] векторам (75), (76) отвечают базисные состояния[8)]:

$\hat{V}_{+}^{+}[ii] \to |2_+, 0_-\rangle$ — два фотона в право-циркулярно поляризованной моде,

$\hat{V}_{0}^{+}[ii] \to |1_+, 1_-\rangle$ — один фотон в право- и один фотон в лево-циркулярно поляризованной моде,

$\hat{V}_{-}^{+}[ii] \to |0_+, 2_-\rangle$ — два фотона в лево-циркулярно поляризованной моде.

Четыре элемента (77), (78) относятся к преобразованиям в двух модах и задают пространство кутквартов $\hat{V}_{+}^{+}[is]$, $\hat{V}_{0}^{+}[is]$, $\hat{V}_{-}^{+}[is]$, $\hat{X}^{+}[is]$. Операторам соответствуют базисные состояния

$\hat{V}_{+}^{+}[is] \to |1_{+i}, 1_{+s}\rangle$ — по одному право-циркулярно поляризованному фотону в каждой моде «i»,

$\hat{V}_{-}^{+}[is] \to |1_{-i}, 1_{-s}\rangle$ — по одному лево-циркулярно поляризованному фотону в каждой моде «s»,

$\hat{V}_{0}^{+}[is] \to \frac{1}{\sqrt{2}} \{|1_{+i}, 1_{-s}\rangle + |1_{-i}, 1_{+s}\rangle$ — триплетное состояние Белла $\Psi^{(+)}$,

$\hat{X}^{+}[is] \to \frac{1}{\sqrt{2}} \{|1_{+i}, 1_{-s}\rangle - |1_{-i}, 1_{+s}\rangle$ — синглетное состояние Белла $\Psi^{(-)}$.

Отметим, что из-за вырожденности ПВ-мод для кутритов отсутствует скалярная компонента и, как следствие, антисимметричное (синглетное) состояние Белла $\Psi^{(-)}$. Нетрудно убедиться, что выполняются и «обратные» преобразования перехода от компонент векторов $\hat{\mathbf{V}}_{\nu}^{+}[is]$ и скаляра $\hat{X}_{is}^{+}[is]$ к квадратичным формам полевых операторов $\hat{a}_{\alpha i,s}^{\dagger}$, например:

---

7) Для простоты приводим лишь дискретную версию; обобщение на непрерывный случай элементарно [37, 40].

8) Переход от использовавшегося в [10, 11] вертикально-горизонтального базиса к циркулярному тривиален. Соответствующие преобразования приводятся в (36).

$$\hat{a}^\dagger_{+i}\hat{a}^\dagger_{-s} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{V}^+_0[is] + \hat{X}^+_{is}\right],$$
$$\hat{a}^\dagger_{-i}\hat{a}^\dagger_{+s} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{V}^+_0[is] - \hat{X}^+_{is}\right]. \quad (79)$$

В экспериментах с поляризационными куквартами, выполненных недавно в [10, 11], использовались другие базисные состояния в x, y (прямоугольном) базисе: $\hat{a}^\dagger_{xi}\hat{a}^\dagger_{xs}|0\rangle$, $\hat{a}^\dagger_{xi}\hat{a}^\dagger_{ys}|0\rangle$, $\hat{a}^\dagger_{yi}\hat{a}^\dagger_{xs}|0\rangle$, $\hat{a}^\dagger_{yi}\hat{a}^\dagger_{ys}|0\rangle$. Переход к введенному выше базису на основе $\hat{V}^+_+[is]$, $\hat{V}^+_-[is]$, $\hat{V}^+_0[is]$, $\hat{X}^+[is]$ осуществляется из (36) при помощи матриц

$$G_K = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 & i/2 & -1/2 \\ 1/2 & i/2 & i/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_K \begin{pmatrix} |1_{xi}, 1_{xs}\rangle \\ |1_{xi}, 1_{ys}\rangle \\ |1_{yi}, 1_{xs}\rangle \\ |1_{yi}, 1_{ys}\rangle \end{pmatrix} = \quad (80)$$

$$= \begin{pmatrix} |1_{+i}, 1_{+s}\rangle \\ |1_{-i}, 1_{-s}\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1_{+i}, 1_{-s}\rangle + |1_{-i}, 1_{+s}\rangle\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1_{+i}, 1_{-s}\rangle - |1_{-i}, 1_{+s}\rangle\right) \end{pmatrix}.$$

Обратные преобразования имеют вид

$$G_K = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/2i & 1/2i & 0 & 1/\sqrt{2}i \\ -1/2i & 1/2i & 0 & -1/\sqrt{2}i \\ -1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_{KK} \begin{pmatrix} |1_{+i}, 1_{+s}\rangle \\ |1_{-i}, 1_{-s}\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1_{+i}, 1_{-s}\rangle + |1_{-i}, 1_{+s}\rangle\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1_{+i}, 1_{-s}\rangle - |1_{-i}, 1_{+s}\rangle\right) \end{pmatrix} = \quad (81)$$

$$= \begin{pmatrix} |1_{xi}, 1_{xs}\rangle \\ |1_{xi}, 1_{ys}\rangle \\ |1_{yi}, 1_{xs}\rangle \\ |1_{yi}, 1_{ys}\rangle \end{pmatrix}.$$

Введенная классификация, являющаяся прямым следствием использования концепции P-квазиспина, приводит и к соответствующей классификации базисных векторов $\hat{V}_{0,+,-}[is]|0\rangle \in L(P=1)$ и $\hat{X}^+|0\rangle \in L(P=0)$ (в силу P-скалярности вакуумного вектора $|0\rangle$) [25, 26]:

$$\hat{U}\left(u = \{u_i\}\right)|0\rangle = |0\rangle. \quad (82)$$

Необходимо отметить, что рассматриваемая в этом разделе классификация поляризационных состояний двухфотонного двухмодового поля на основе P-квазиспина не является единственной. В качестве альтернативных примеров можно привести базисы, образованные максимально перепутанными состояниями Белла:

$$\Phi^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{a}^\dagger_{x1}\hat{a}^\dagger_{x2} \pm \hat{a}^\dagger_{y1}\hat{a}^\dagger_{y2}\right]|0\rangle,$$
$$\Psi^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{a}^\dagger_{x1}\hat{a}^\dagger_{y2} \pm \hat{a}^\dagger_{y1}\hat{a}^\dagger_{x2}\right]|0\rangle \quad (83)$$

и факторизованными состояниям пары фотонов

$$\hat{a}^\dagger_{x1}\hat{a}^\dagger_{x2}|0\rangle, \hat{a}^\dagger_{x1}\hat{a}^\dagger_{y2}|0\rangle, \hat{a}^\dagger_{y1}\hat{a}^\dagger_{x2}|0\rangle, \hat{a}^\dagger_{y1}\hat{a}^\dagger_{y2}|0\rangle, \quad (84)$$

которые бывают удобными в конкретных приложениях. Однако с точки зрения теоретико-групповых свойств поляризационных преобразований света P-квазиспиновая классификация выглядит наиболее естественной и допускает обобщение на случай полей с произвольной статистикой и любым числом мод. В следующем разделе для наглядности ограничимся рассмотрением поляризационных преобразований лишь двухмодового и двухфотонного света.

4.3. В соответствии с разделом 3.4 поляризационные преобразования над невырожденным по частоте (двухмодовым) бифотонным полем можно свести к двум типам.

4.3.1. Коллективные поляризационные преобразования компонент $\hat{V}^+_\nu[is](\nu = -, 0, +)$ P-векторов $\mathbf{V}^+_\nu[is]$ относительно действия полной группы $SU(2)_P$ полного P-квазиспина. Такие преобразования задаются формулой (70) и на практике осуществляются при помощи фазовых пластин нулевого порядка. Для случая двух (или нескольких) пространственно разделенных мод общие преобразования достигаются введением в оба пучка одинаково ориентированных и полностью идентичных фазовых пластин [6, 8].

4.3.2. Независимое действие «парциальных» групп

$$SU(2)^j_P = \left\{ \hat{U}\left(\mathbf{u}^j = \{u^j_i\}\right) = \exp\left(-i\sum_i u^j_i \hat{P}_{i\mathbf{k}_j}\right)\right\}$$

тоже приводит к преобразованиям операторов $\hat{V}^\dagger_\nu[ii]$ для кутритов как P-векторов при помощи формул (70), а операторов $\hat{V}^+_\nu[is]$ $(s \neq i)$ и $\hat{X}^+_{is}$ для куквартов — как биспиноров. В этом случае операторы рождения (уничтожения) $\hat{a}^\dagger_{\pm j}$ $(\hat{a}_{\pm j})$ преобразуются независимо для отдельных ПВ-мод по формулам (П.9). В эксперименте с частотно-невырожденным двухфотонным полем эти преобразования осуществляются за счет дисперсии двулучепреломления материала, из которого изготовлен преобразователь. Для двух пространственно разделенных мод в каждый пучок вводятся различные (по оптической толщине δ и ориентации χ) фазовые пластины. Некоторые примеры таких преобразований приведены в Приложении 3.

Важно, что в случае независимого действия «парциальных» групп $SU(2)^j_P$ преобразования (П.14)–(П.16) осуществляют смешение P-векторов $\hat{\mathbf{V}}^+[is]$ и P-скаляров $\hat{X}^+[is]$, что соответствует определению куквартов как единого целого. В случае коллективного (синфазного) действия «парциальных» групп $SU(2)^j_P$ из поляризационных состояний в двух ПВ-модах выделяются неинвариантные трехкомпонентные векторы $\hat{\mathbf{V}}^+[is] = (\hat{V}^+_+[is], \hat{V}^+_-[is], \hat{V}^+_0[is])$ и инвариантные синглеты $\hat{X}^+[is]$. Поскольку при таком типе преобразований действие поляризационных преобразователей одинаково во всех модах, векторы $\hat{\mathbf{V}}^+[is]$ вырождаются в кутриты, т. е. операторы $\hat{V}^+_\nu[is], \hat{V}^+_\nu[ii], \hat{V}^+_\nu[ss]$ преобразуются одинаковым образом.

Заметим, что поляризационная классификация (75)–(78) охватывает самый общий случай двух ПВ-мод и двухфотонного фоковского состояния света. Однако при фиксации параметрически сопряженных (коррелированных) мод спонтанного параметрического рассеяния (частотных или пространственных) в силу законов сохранения энергии и импульса в каждой моде может оказаться лишь по одному фотону. Поэтому фактически векторы (75), (76) отвечают так называемому частотно-вырожденному коллинеарному режиму рождения пар, когда $m = 1$. Режимы, при которых в разных модах происходит генерация двоек, четверок, шестерок и т. д. фотонов, безусловно, охватываются P-квазиспиновым подходом[9)], однако детальное их рассмотрение требует специального анализа и выходит за рамки данной работы. Экспериментально поляризационные состояния в двух пространственных модах при параметрической генерации четверок фотонов исследовались в работах [43].

[9)] Это достигается адекватным выбором параметров преобразования δ'_j, $\mathbf{n}_j$ в (П.14)–(П.16).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере рассмотренных преобразований (парциальных и коллективных) двухфотонного света наглядно проявляется удобство P-квазиспиновой классификации состояний: в произвольном поляризационном состоянии двухфотонного поля после прохождения через набор фазовых пластин нулевого порядка останется неизменной синглетная компонента, а остальные три трансформируются по правилам (П.14), (П.15). Ярким проявлением инвариантности синглетов служит класс состояний, заданных в так называемом подпространстве, свободном от декогеренции (decoherence free subspace) [44]. Демонстрация устойчивости таких состояний к воздействию коллективных и парциальных преобразований для двух пространственных мод двухфотонного света исследовалась в [6, 7]. Заметим, что нарушение инвариантности скалярной (синглетной) компоненты в частотно-невырожденном кукварте может служить индикатором наличия парциальных преобразований, вызванных, например, дисперсией материала — преобразователя поляризации. Действительно, из (81), (82) следует, что при синфазных преобразованиях в обеих модах (i, s) двухфотонного поля из-за инвариантности синглета $\hat{X}^+[is]$ сохраняется величина $c_2 - c_3$, где c_2, c_3 — амплитуды базисных состояний $\hat{a}^\dagger_{xi}\hat{a}^\dagger_{ys}|0\rangle$ и $\hat{a}^\dagger_{yi}\hat{a}^\dagger_{xs}|0\rangle$ куквартов соответственно в x, y-базисе[10)]. Этот эффект еще не наблюдался в эксперименте и может быть обнаружен при помощи методов статистической реконструкции квантовых состояний [10, 11, 41, 42] и квантовой томографии [30, 47].

В целом проведенный анализ показывает, что концепция P-квазиспина позволяет преодолеть ограничения классической оптики в понимании и характеристике поляризации света. В частности, только в рамках этой концепции можно получить корректные обобщения классической степени поляризации. Проясняется также теоретико-групповой смысл параметров Стокса и поляризационных преобразований, которые в классической оптике определяются формально по матрицам Паули.

[10)] Обсуждаемый эффект будет проявляться независимо от того, являлось ли начальное двухмодовое состояние двухфотонного поля перепутанным или факторизованным.

Дальнейшее развитие концепции P-квазиспина, несомненно, окажется полезным для анализа и классификации многомодовых n-фотонных перепутанных состояний в контексте реализации парциальных, кластерных и коллективных преобразований.

Работа выполнена при поддержке ФЦНТП (Государственный контракт № 2006-РИ-19.0/001/593), РФФИ (гранты №№ 06-02-16769, 04-02-17165) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4586.2006.2).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Матрицы Паули и «классические» поляризационные преобразования

1. Определение матриц Паули, действующих в пространстве C_P^2 поляризационных индексов α (см. [17]):

$$\hat{\Sigma}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Sigma}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\hat{\Sigma}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{П.1}$$
$$\mathrm{Tr}\,\hat{\Sigma}^j = 2\delta_{j0}.$$

2. Правила умножения матриц Паули:

$$\hat{\Sigma}^0\hat{\Sigma}^a = \hat{\Sigma}^a\hat{\Sigma}^0 = \hat{\Sigma}^a,$$
$$\hat{\Sigma}^a\hat{\Sigma}^b = i\varepsilon_{abc}\hat{\Sigma}^c + \delta_{ab}\hat{\Sigma}^0, \quad a,b,c = 1,2,3, \tag{П.2}$$

где ε_{abc} — полностью антисимметричный тензор и $\varepsilon_{123} = 1$.

3. Представление «классических» поляризационных преобразований $\hat{u}(a_0 = \cos\delta', \mathbf{a} = i\sin\delta'\mathbf{n}) \in SU(2)_P$ через экспоненты матриц Паули [45]:

$$\hat{u}(a_0, a) = a_0\hat{\Sigma}^0 + \mathbf{a}\hat{\Sigma} =$$
$$= \cos\delta\hat{\Sigma}^0 + i\sin\delta'\mathbf{n}\hat{\Sigma} = \exp\left[i\delta'\mathbf{n}\hat{\Sigma}\right], \tag{П.3}$$

устанавливающее соответствие между параметрами классических и квантовых $SU(2)$ поляризационных преобразований (ср. (П.2)). При этом правила умножения (13) принимают вид [46]:

$$\hat{u}(a_{01}, \mathbf{a}_1)\hat{u}(a_{02}, \mathbf{a}_2) =$$
$$= \exp\left[i\delta_1'\mathbf{n}_1\hat{\Sigma}\right]\exp\left[i\delta_2'\mathbf{n}_2\hat{\Sigma}\right] = \exp\left[i\delta'\mathbf{n}\hat{\Sigma}\right],$$

где параметры δ', $\mathbf{n}$ результирующего преобразования определяются следующим образом:

$$\cos\delta' = \cos\delta_1'\cos\delta_2' - (\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2)\sin\delta_1'\sin\delta_2',$$
$$\mathbf{n}\sin\delta' = \mathbf{n}_1\cos\delta_2'\sin\delta_1' + \mathbf{n}_2\cos\delta_1'\sin\delta_2' - \tag{П.4}$$
$$- [\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2]\sin\delta_1'\sin\delta_2'.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Свойства поляризационных преобразований в квантовой оптике [46]

1. Правила умножения элементов

$$\hat{U}\left(u = \{u_i\}\right) = \exp(-i\mathbf{u}\cdot\mathbf{P}) =$$
$$= \exp(-i\delta'\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{P}}) = \hat{U}(\delta', \mathbf{n}) \in SU(2)_P: \tag{П.5}$$
$$\hat{U}(\delta_1', \mathbf{n}_1)\hat{U}(\delta_2', \mathbf{n}_2) = \hat{U}(\delta', \mathbf{n}),$$

где параметры δ', $\mathbf{n}$ результирующего преобразования определяются следующим образом:

$$\cos\frac{\delta'}{2} = \cos\frac{\delta_1'}{2}\cos\frac{\delta_2'}{2} - (\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2)\sin\frac{\delta_1'}{2}\sin\frac{\delta_2'}{2},$$
$$\mathbf{n}\sin\frac{\delta'}{2} = \mathbf{n}_1\cos\frac{\delta_2'}{2}\sin\frac{\delta_1'}{2} + \tag{П.6}$$
$$+ \mathbf{n}_2\cos\frac{\delta_2'}{2}\sin\frac{\delta_1'}{2} - [\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2]\sin\frac{\delta_1'}{2}\sin\frac{\delta_2'}{2}.$$

2. Матричные элементы $U^P_{\alpha,\beta}(\delta', \mathbf{n})$ для произвольных P задаются следующим образом [45, 46]:

$$U^P_{\alpha,\beta}(\delta', \mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{2P}\sum_{m=-l}^{l}(-i)^l\frac{2l+1}{2P+1}\chi_l^P(\delta') \times$$
$$\times C^{P,\beta}_{P,\alpha;l,m}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Y_{lm}(\theta,\phi), \tag{П.7}$$

где $C^{P,\beta}_{P,\alpha;l,m}$ — коэффициенты Клебша–Гордана группы $SU(2)$, $Y_{lm}(\theta,\phi)$ — сферические функции и χ_l^P — обобщенные характеры группы $SU(2)$, определяемые соотношением

$$\chi_l^P \equiv i^l\sum_{m=-P}^{P}e^{-im\delta}C^{P,m}_{P,m;l,0} = (-1)^l\chi_l^P(-\delta') =$$
$$= \chi_l^{P^*}(\delta'), \quad l \le 2P. \tag{П.8}$$

В частных случаях $P = 1/2, 1$ матрицы (П.7) конкретизируются следующим образом.

2.1. Для преобразования поляризационных спиноров:

$$\hat{U}^{1/2}(\delta',\mathbf{n}) = \left[U^{1/2}_{\alpha=\pm,\beta=\pm}(\delta',\mathbf{n})\right] = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\delta'}{2} - i\sin\dfrac{\delta'}{2}\cos\theta & -i\exp(-i\varphi)\sin\dfrac{\delta'}{2}\sin\theta \\ -i\exp(i\varphi)\sin\dfrac{\delta'}{2}\sin\theta & \cos\dfrac{\delta'}{2} + i\sin\dfrac{\delta'}{2}\cos\theta \end{bmatrix}. \tag{П.9}$$

В терминах параметров фазовых пластинок $t = \cos\delta + i\sin\delta\cos 2\chi$ и $r = i\sin\delta\sin 2\alpha$ преобразование спиноров задается матрицей

$$\hat{U}^{1/2}(\delta,\chi) = \begin{bmatrix} t & r \\ -r^* & t^* \end{bmatrix}. \tag{П.10}$$

2.2. Для поляризационных векторов:

$$\hat{U}^{P=1}(\delta',\mathbf{n}) = \left[U^{1}_{\nu=+,0,-;\mu=+,0,-}(\delta',\mathbf{n})\right] =$$
$$= \begin{bmatrix} \left(\cos\dfrac{\delta'}{2} - i\sin\dfrac{\delta'}{2}\cos\theta\right)^2 & \begin{matrix} -\sqrt{2}\, i\sin\dfrac{\delta'}{2}\sin\theta\exp(-i\varphi)\times \\ \times\left(\cos\dfrac{\delta'}{2} - i\sin\dfrac{\delta'}{2}\cos\theta\right)\end{matrix} & -\left(\sin\dfrac{\delta'}{2}\sin\theta\exp(-i\varphi)\right)^2 \\ \begin{matrix} -i\sin\dfrac{\delta'}{2}\sin\theta\exp(-i\varphi)\times \\ \times\left(\cos\dfrac{\delta'}{2} - i\sin\dfrac{\delta'}{2}\cos\theta\right)\end{matrix} & \left(1 - 2\sin^2\dfrac{\delta'}{2}\sin^2\theta\right) & \begin{matrix} -i\sin\dfrac{\delta'}{2}\sin\theta\exp(-i\varphi)\times \\ \times\left(\cos\dfrac{\delta'}{2} + i\sin\dfrac{\delta'}{2}\cos\theta\right)\end{matrix} \\ -\left(\sin\dfrac{\delta'}{2}\sin\theta\exp(i\varphi)\right)^2 & \begin{matrix} -\sqrt{2}\, i\sin\dfrac{\delta'}{2}\sin\theta\exp(-i\varphi)\times \\ \times\left(\cos\dfrac{\delta'}{2} + i\sin\dfrac{\delta'}{2}\cos\theta\right)\end{matrix} & \left(\cos\dfrac{\delta'}{2} + i\sin\dfrac{\delta'}{2}\cos\theta\right)^2 \end{bmatrix}, \tag{П.11}$$

а в терминах t и r:

$$\hat{U}^{P=1}(\delta,\chi) = \begin{bmatrix} (t)^2 & \sqrt{2}\, rt & (r)^2 \\ -tr^* & |t|^2 - |r|^2 & t^* r \\ r^{*2} & -\sqrt{2}\, t^* r^* & t^{*2} \end{bmatrix}. \tag{П.12}$$

2.3. Для поляризационных скаляров:

$$U^0_{\alpha,\beta}(\delta',\mathbf{n}) = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{0,\beta}. \tag{П.13}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Парциальные преобразования

1. Преобразования компонент P-векторов

$$\hat{\mathbf{V}}^+[is] \xrightarrow{SU(2)^i\times SU(2)^s} \hat{U}^{1/2}(\delta'_i;\mathbf{n}_i)\hat{U}^{1/2}(\delta'_s;\mathbf{n}_s)\hat{\mathbf{V}}^+[is] : \hat{V}^+_\pm[is] \xrightarrow{SU(2)^i\times SU(2)^s} \sum_{\alpha,\beta} \hat{U}^{1/2}_{\pm,\alpha}(i)\hat{U}^{1/2}_{\pm,\beta}(s)\hat{a}^\dagger_{\alpha i}\hat{a}^\dagger_{\beta s} =$$
$$= \hat{U}^{1/2}_{\pm,+}(i)\hat{U}^{1/2}_{\pm,+}(s)\hat{V}^+_+[is] + \hat{U}^{1/2}_{\pm,-}(i)\hat{U}^{1/2}_{\pm,-}(s)\hat{V}^+_-[is] + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{V}^+_0[is]\left(\hat{U}^{1/2}_{\pm,+}(i)\hat{U}^{1/2}_{\pm,-}(s) + \hat{U}^{1/2}_{\pm,-}(i)\hat{U}^{1/2}_{\pm,+}(s)\right) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{X}^+_{is}\left(\hat{U}^{1/2}_{\pm,+}(i)\hat{U}^{1/2}_{\pm,-}(s) + \hat{U}^{1/2}_{\pm,-}(i)\hat{U}^{1/2}_{\pm,+}(s)\right), \quad \hat{U}^{1/2}_{\pm,\alpha}(j) \equiv \hat{U}^{1/2}_{\pm,\alpha}(\delta'_j\mathbf{n}_j), \tag{П.14}$$

где $j = i, s$,

$$\hat{V}_0^+[is] \xrightarrow{SU(2)^i \times SU(2)^s} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha,\beta} \left\{ \hat{U}^{1/2}_{+,\alpha}(i)\hat{U}^{1/2}_{-,\beta}(s) + \hat{U}^{1/2}_{-,\alpha}(i)\hat{U}^{1/2}_{+,\beta}(s) \right\} \hat{a}^\dagger_{\alpha i}\hat{a}^\dagger_{\beta s} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \hat{U}^{1/2}_{+,+}(i)\hat{U}^{1/2}_{-,+}(s) + \hat{U}^{1/2}_{-,+}(i)\hat{U}^{1/2}_{+,+}(s) \right\} \hat{V}_+^+[is] + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \hat{U}^{1/2}_{+,-}(i)\hat{U}^{1/2}_{-,-}(s) + \hat{U}^{1/2}_{-,-}(i)\hat{U}^{1/2}_{+,-}(s) \right\} \hat{V}_-^+[is] +$$
$$+ \frac{1}{2}\hat{V}_0^+[is] \left\{ \hat{U}^{1/2}_{+,+}(i)\hat{U}^{1/2}_{-,-}(s) + \hat{U}^{1/2}_{-,+}(i)\hat{U}^{1/2}_{+,-}(s) + \hat{U}^{1/2}_{+,-}(i)\hat{U}^{1/2}_{-,+}(s) + \hat{U}^{1/2}_{-,-}(i)\hat{U}^{1/2}_{+,+}(s) \right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\hat{X}^+[is] \left\{ \hat{U}^{1/2}_{+,+}(i)\hat{U}^{1/2}_{-,-}(s) + \hat{U}^{1/2}_{-,+}(i)\hat{U}^{1/2}_{+,-}(s) + \hat{U}^{1/2}_{+,-}(i)\hat{U}^{1/2}_{-,+}(s) + \hat{U}^{1/2}_{-,-}(i)\hat{U}^{1/2}_{+,+}(s) \right\}. \quad (\text{П.15})$$

2. Преобразования P-скаляров:

$$\hat{X}^+[is] \xrightarrow{SU(2)^i \times SU(2)^s} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha,\beta} \left\{ \hat{U}^{1/2}_{+,\alpha}(i)\hat{U}^{1/2}_{-,\beta}(s) - \hat{U}^{1/2}_{-,\alpha}(i)\hat{U}^{1/2}_{+,\beta}(s) \right\} \hat{a}^\dagger_{\alpha i}\hat{a}^\dagger_{\beta s} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \hat{U}^{1/2}_{+,+}(i)\hat{U}^{1/2}_{-,+}(s) - \hat{U}^{1/2}_{-,+}(i)\hat{U}^{1/2}_{+,+}(s) \right\} \hat{V}_+^+[is] + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \hat{U}^{1/2}_{+,-}(i)\hat{U}^{1/2}_{-,-}(s) - \hat{U}^{1/2}_{-,-}(i)\hat{U}^{1/2}_{+,-}(s) \right\} \hat{V}_-^+[is] +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{V}_0^+[is] \left\{ \hat{U}^{1/2}_{+,+}(i)\hat{U}^{1/2}_{-,-}(s) - \hat{U}^{1/2}_{-,+}(i)\hat{U}^{1/2}_{+,-}(s) + \hat{U}^{1/2}_{+,-}(i)\hat{U}^{1/2}_{-,+}(s) - \hat{U}^{1/2}_{-,-}(i)\hat{U}^{1/2}_{+,+}(s) \right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\hat{X}^+[is] \left\{ \hat{U}^{1/2}_{+,+}(i)\hat{U}^{1/2}_{-,-}(s) - \hat{U}^{1/2}_{-,+}(i)\hat{U}^{1/2}_{+,-}(s) - \hat{U}^{1/2}_{+,-}(i)\hat{U}^{1/2}_{-,+}(s) + \hat{U}^{1/2}_{-,-}(i)\hat{U}^{1/2}_{+,+}(s) \right\}. \quad (\text{П.16})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Bjork, J. Soderholm, A. Trifonov, P. Usachev, L. L. Sanchez-Soto, and A. B. Klimov, Proc. of SPIE **4750**, 1 (2002).

2. A. Sehat, J. Soderholm, G. Bjork, P. Espinoza, A. B. Klimov, and L. L. Sanchez-Soto, Phys. Rev. A **71**, 033818 (2005).

3. T. Carozzi, R. Karlsson, and J. Bergman, Phys. Rev. E **62**, 2024 (2000); T. Setala, A. Shevchenko, and A. Kaivola, Phys. Rev. E **66**, 016615 (2002); A. Luis, Phys. Rev. A **72**, 023810 (2005); A. Luis, Phys. Rev. A **73**, 063806 (2006).

4. V. P. Karassiov, J. Phys. A **26**, 4345 (1993).

5. *Физика квантовой информации*, сб. под ред. Д. Боумейстера, А. Экерта, А. Цайлингера, Постмаркет, Москва (2002).

6. P. G. Kwiat, A. J. Berglund, J. B. Altepeter, and A. G. White, Science **290**, 498 (2000); J. B. Altepeter, P. G. Hadley, S. M. Wendelken, A. J. Berglund, and P. G. Kwiat, Phys. Rev. Lett. **92**, 147901 (2004).

7. K. Banaszek, A. Dragan, W. Wasilewski, and C. Radzewicz, Phys. Rev. Lett. **92**, 257901 (2004).

8. Y. H. Shih and C. O. Alley, Phys. Rev. Lett. **61**, 2921 (1982); P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko, and Y. H. Shih, Phys. Rev. Lett. **75**, 4337 (1995); D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro, and A. G. White, Phys. Rev. A **64**, 052312 (2001); Y.-H. Kim, S. P. Kulik, M. V. Chekhova, W. P. Grice, and Y. Shih, Phys. Rev. A **67**, 010301 (2003); P. G. Kwiat, E. Waks, A. G. White, I. Appelbaum, and P. H. Eberhard, Phys. Rev. A **60**, R773 (1999).

9. А. В. Бурлаков, С. П. Кулик, Ю. Рытиков, М. В. Чехова, ЖЭТФ **122**, 738 (2002).

10. Yu. I. Bogdanov, E. V. Moreva, G. A. Maslennikov, R. F. Galeev, S. S. Straupe, and S. P. Kulik, Phys. Rev. A **73**, 063810 (2006).

11. E. V. Moreva, G. A. Maslennikov, S. S. Straupe, and S. P. Kulik, Phys. Rev. Lett. **97**, 023602 (2006).

12. Y. H. Kim, S. P. Kulik, and Y. Shih, Phys. Rev. A **63**, 060301 (2001).

13. T. B. Pittman, B. C. Jacobs, and J. D. Franson, Phys. Rev. A **66**, 052305 (2002); T. B. Pittman, B. C. Jacobs, and J. D. Franson, Phys. Rev. A **66**, 042303 (2002).

14. G. Brida, M. V. Checkova, M. Genovese, M. Gramegna, L. A. Krivitskii, and S. P. Kulik, Phys. Rev. A **70**, 032332 (2004).

15. У. Шерклифф, *Поляризованный свет*, Мир, Москва (1965).

16. A. Gerrard and J. M. Burch, *Introduction to Matrix Methods in Optics*, Wiley, London–New York (1975).

17. E. L. O'Neil, *Introduction to Statistical Optics*, Addison-Wesley, Reading, MA (1963).

18. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1973).

19. P. Roman, Nuovo Cimento **13**, 274 (1959).

20. J. R. Klauder and E. C. G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics*, Benjamin, New York (1968).

21. H. Prakash and N. Chandra, Phys. Rev. A **4**, 796 (1971).

22. G. S. Agarwal, Lett. Nuovo Cimento **1**, 53 (1971).

23. J. Lehner, U. Leonhardt, and H. Paul, Phys. Rev. A **53**, 2727 (1996).

24. V. P. Karasev and V. I. Puzyrevskii, J. Sov. Laser Res. **10**, 229 (1989).

25. V. P. Karassiov, J. Sov. Laser Res. **12**, 147 (1991).

26. V. P. Karassiov, Phys. Lett. A **190**, 387 (1994); V. P. Karassiov, J. Rus. [Sov.] Laser Res. **15**, 391 (1994).

27. V. P. Karassiov, E-print archives, quant-ph/9503011.

28. В. П. Карасев, Кр. сообщ. физ. ФИАН № 9–10, 13 (1996); В. П. Карасев, В. Л. Дербов, О. М. Приютова, Опт. и спектр. **87**, 119 (1997).

29. V. P. Karassiov, J. Rus. Laser Res. **21**, 370 (2000).

30. V. P. Karassiov, J. Rus. Laser Res. **26**, 484 (2005); В. П. Карасев, ТМР **145**, 344 (2005).

31. R. Simon and N. Mukunda, Phys. Lett. A **143**, 165 (1990).

32. Д. Н. Клышко, ЖЭТФ **111**, 1955 (1997).

33. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976); А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1981).

34. Я. Перина, *Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений*, Мир, Москва (1987).

35. В. И. Стражев, В. А. Плетюхов, Изв. ВУЗов, сер. физ. **24**, № 12, 39 (1981); В. И. Стражев, П. Л. Школьников, Изв. ВУЗов, сер. физ. **25**, № 7, 77 (1981); В. И. Фущич, А. Г. Никитин, *Симметрия уравнений Максвелла*, Наукова думка, Киев (1983).

36. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Физматлит, Москва (1963).

37. Д. Н. Клышко, *Фотоны и нелинейная оптика*, Наука, Москва (1980).

38. Y. H. Shih and C. O. Alley, Phys. Rev. A **61**, 2921 (1988).

39. G. S. Agarwal, J. Opt. Soc. Amer. B **5**, 1940 (1988).

40. A. V. Belinsky and D. N. Klyshko, Laser Physics **4**, 663 (1994).

41. Ю. И. Богданов, Р. Ф. Галеев, С. П. Кулик, Г. А. Масленников, Е. В. Морева, Письма в ЖЭТФ **82**, № 3, 180 (2005).

42. С. П. Кулик, Г. А. Масленников, Е. В. Морева, ЖЭТФ **129**, 814 (2006).

43. A. Lamas-Linares, J. C. Howell, and D. Bouwmeester, Nature **412**, 887 (2001); J. C. Howell, A. Lamas-Linares, and D. Bouwmeester, Phys. Rev. Lett. **88**, 030401 (2002).

44. P. Zanardi and M. Rasetti, Phys. Rev. Lett. **79**, 3306 (1997).

45. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).

46. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, Наука, Москва (1987).

47. В. П. Карасев, А. В. Масалов, ЖЭТФ **126**, 63 (2004).