ЖЭТФ, 2006, том 130, вып. 3 (9), стр. 409–414

ОБРАЩЕННОЕ (ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ) ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

*В. П. Макаров**, *А. А. Рухадзе*

Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 марта 2006 г.

На примере одноосного кристалла показано, что обращенное («отрицательное») преломление электромагнитной волны в анизотропной среде возможно и при пренебрежении пространственной дисперсией диэлектрического тензора в отличие от изотропной среды.

PACS: 42.25.Lc, 42.25.-p, 78.20.Ci

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1], опубликованной 60 лет тому назад, Мандельштам предсказал эффект «непривычного» преломления электромагнитной волны на границе между двумя однородными изотропными средами. Суть эффекта Мандельштама состоит в следующем [1–3]. Пусть плоская монохроматическая волна (с частотой ω) падает из первой среды (для простоты, вакуума) на плоскую границу, отделяющую эту среду от второй среды — однородной, изотропной и прозрачной в области частот, близкой к ω. Выберем координатные оси так, что плоскость XY будет плоскостью раздела, а плоскость ZX — плоскостью падения волны, причем ось Z направим из первой среды во вторую, а ось X направим так, чтобы она составляла острый угол с направлением падения волны. В плоскости XY задача однородная; поэтому зависимость полей от x и y во всех волнах (падающей, отраженной и преломленной) одинаковая, т. е. проекции волнового вектора $\mathbf{k}$ преломленной волны равны

$$\begin{gathered} k_X = \frac{\omega}{c}\sin\theta_0 \ge 0, k_Y = 0, \\ k_Z = \pm\sqrt{k^2 - k_X^2}\,, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где θ_0 — угол падения[1)]. Дисперсионное уравнение, определяющее связь между ω и $\mathbf{k}$, квадратично по $\mathbf{k}$ и дает только $|k_Z|$. Знак k_Z (если среда считается прозрачной) определяется из требования, что энергия поля преломленной волны «оттекает» от границы в глубь второй среды. Плотность потока энергии электромагнитной волны, усредненная по периоду волны (вектор Пойнтинга $\overline{\mathbf{S}}$), совпадает по направлению с групповой скоростью $\mathbf{u}_{gr}$ волны, так что $\overline{S}_Z, u_{grZ} > 0$. Из соображений симметрии очевидно, что в изотропной среде групповая и фазовая скорости любой волны либо параллельны ($\uparrow\uparrow$), либо антипараллельны ($\uparrow\downarrow$). Учитывая, кроме того, что $k_X \ge 0$ (см. (1.1)), получаем

$$\begin{gathered} \overline{S}_Z, u_{grZ} > 0, \quad \overline{S}_X, u_{grX} > 0 \\ \text{при} \quad \overline{\mathbf{S}}, \mathbf{u}_{gr} \uparrow\uparrow \mathbf{k}, \mathbf{u}_f, \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} \overline{S}_Z, u_{grZ} > 0, \quad \overline{S}_X, u_{grX} < 0 \\ \text{при} \quad \overline{\mathbf{S}}, \mathbf{u}_{gr} \uparrow\downarrow \mathbf{k}, \mathbf{u}_f, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где фазовая скорость

$$\mathbf{u}_f = \frac{\omega}{k^2}\,\mathbf{k} = \frac{c}{n^2}\,\mathbf{n}, \tag{1.4}$$

для удобства мы ввели вектор

$$\mathbf{n} = \frac{c}{\omega}\,\mathbf{k}. \tag{1.5}$$

В случае (1.2) преломленный луч (его направление совпадает с направлением векторов $\overline{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{u}_{gr}$) и падающий луч находятся по разные стороны от нормали к поверхности раздела сред (это — «привычное» преломление); в случае (1.3) преломленный и падающий лучи лежат по одну сторону от нормали к

*E-mail: asam@ran.gpi.ru

1) Равенства (1.1) справедливы и для анизотропной среды, так как они являются следствием только однородности задачи в плоскости раздела сред.

поверхности раздела сред (это «непривычное» преломление)[2)].

Мандельштам не рассматривал вопрос о том, при каких частотах и в каких средах волна может иметь отрицательную групповую скорость[3)]. Первое корректное исследование этого вопроса принадлежит Пафомову [4]. Он доказал, что волна с частотой ω может распространяться в изотропной среде без затухания только в двух случаях:

$$\varepsilon(\omega), \mu(\omega) > 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{u}_{gr} \uparrow\uparrow \mathbf{u}_f, \tag{1.6}$$

$$\varepsilon(\omega), \mu(\omega) < 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{u}_{gr} \uparrow\downarrow \mathbf{u}_f, \tag{1.7}$$

где $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

В работе [4] также доказано, что эффекты Доплера и Вавилова – Черенкова для волны с отрицательной групповой скоростью будут обращенными по отношению к этим эффектам для волны с положительной групповой скоростью: частота волны, испускаемой движущимся к наблюдателю (от наблюдателя) источником, меньше (больше) собственной частоты волны; черенковское излучение уходит под тупым углом к скорости частицы. В этих эффектах ось X связывается с направлением движения источника в эффекте Доплера или с направлением скорости частицы в эффекте Вавилова – Черенкова. По аналогии с обращенными эффектами Доплера и Вавилова – Черенкова можно и эффект Мандельштама [1–3] называть эффектом обращенного преломления[4)].

Изотропные среды, в которых выполняются условия Пафомова (1.7), не известны. Есть основания полагать, что выполнение условий (1.7) было бы обязано почти невероятной случайности. Действительно, области частот, в которых $\varepsilon(\omega) < 0$, лежат вблизи тех собственных частот ω_0 среды, которым соответствуют электрические дипольные переходы, причем $\omega > \omega_0$ (см., например [6, § 84]), но эти переходы не дают вклада в $\mu(\omega)$, так что там, где $\varepsilon(\omega) < 0$, магнитная проницаемость $\mu(\omega) \approx 1$[5)].

Однако в нашей предыдущей работе [8] показано, что условия (1.7) на самом деле не являются необходимыми для антипараллельности групповой и фазовой скоростей (т. е. для наблюдения обсуждаемых эффектов). Было также доказано, что

$$\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial \varepsilon^{tr}}{\partial k^2} \begin{cases} < 1, & \mathbf{u}_{gr} \uparrow\uparrow \mathbf{u}_f, & (1.8)\\ > 1, & \mathbf{u}_{gr} \uparrow\downarrow \mathbf{u}_f, & (1.9)\\ = 1, & \mathbf{u}_{gr} = 0. & (1.10)\end{cases}$$

Здесь $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ — поперечная диэлектрическая проницаемость среды. В тех случаях, когда можно ввести диэлектрическую $\varepsilon(\omega)$ и магнитную $\mu(\omega)$ проницаемости (в которых пренебрегается их зависимостью от k [9, § 2]), наши условия (1.8), (1.9) сводятся к условиям Пафомова (1.6), (1.7). (Заметим, что условие (1.10) «остановки света» переходит тогда в условия $|\mu(\omega)| \to \infty$, $|\varepsilon(\omega)| \to 0$.)

В работе [10] рассмотрены все изотропные среды, для которых известны выражения для их диэлектрической и магнитной проницаемостей: классическая максвелловская электронная плазма [11], классическая вырожденная электронная плазма [11], квантовая плазма с учетом спина электронов [12] и, наконец, одноатомный газ [8]. Оказалось, что во всех видах плазмы групповая и фазовая скорости волн параллельны. В одноатомном газе $\mathbf{u}_{gr}$ и $\mathbf{u}_f$ могут быть антипараллельны только в узких областях частот ω, с длинноволновой стороны примыкающих к частотам ω_0 электрических дипольных переходов; заметим, что при этом $\mu(\omega) = 1$, т. е. условие (1.9) еще может выполняться, но условие (1.7) ни при каких частотах не выполняется.

В 2000 г. появились первые сообщения о наблюдении обращенного преломления электромагнитной волны сантиметрового диапазона [13, 14]. В работах [13, 14] речь идет о специально сконструированной среде, которая представляет собой некоторую периодическую анизотропную структуру[6)]. Поэтому, строго говоря, экспериментальные данные в [13, 14] и в других аналогичных работах нельзя интерпретировать в рамках теории работы [5], потому что в последней воспроизведены результаты работ [1–4], которые относятся только к изотропным средам. Тем не менее нельзя, разумеется, исключать возможность, что анизотропия среды в [13, 14] достаточно мала и среду все же можно характеризовать величинами $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$, которые в некоторой об-

[2)] В работах [1–3] групповая скорость волны принимается, по определению, положительной, если она параллельна фазовой скорости, и отрицательной, если она антипараллельна фазовой скорости.

[3)] Напомним, что статья [1] была опубликована уже после кончины Мандельштама (1879–1944).

[4)] Позднее результаты [1–4] были воспроизведены в обзоре [5].

[5)] Если среду можно считать немагнитной ($\mu(\omega) = 1$), то групповая и фазовая скорости волны в ней направлены одинаково (см. (1.6)) и эффект обращенного преломления отсутствует [7, § 189].

[6)] Сообщения [13, 14] инициировали целый ряд работ по проблеме обращенного преломления (см., например, [15, 16] и цитированную там литературу).

ласти частот оказываются вещественными и отрицательными.

В случае изотропной среды трудности в наблюдении обращенного преломления связаны с необходимостью учета не только частотной, но и пространственной дисперсии (см. (1.9)). Поэтому возникает вопрос о том, возможен ли интересующий нас эффект в анизотропной среде при пренебрежении пространственной дисперсией. Аграновичем и Гинзбургом [17, §§ 3, 7, 10] доказано, что угол между $\mathbf{u}_{gr}$ и $\mathbf{u}_f$ может быть тупым (в частности, они могут быть антипараллельными) только при учете пространственной дисперсии. Но для наблюдения обращенного преломления достаточно только, чтобы проекции u_{grX} и $\overline{S}_X$ на плоскость раздела отличались знаком от проекций u_{fX} и k_X (см. (1.3) и (1.1)). Результаты классической кристаллооптики (без учета пространственной дисперсии) давно и хорошо известны (см., например, [6, 18]). Согласно этим результатам, проекции волнового вектора $\mathbf{k}$ и вектора Пойнтинга $\overline{\mathbf{S}}$ всегда одного знака. Однако в [18] не учитывается и частотная дисперсия диэлектрического тензора ε_{ij}, а в [6] на $\varepsilon_{ij}(\omega)$ налагаются такие условия, которые с необходимостью ниоткуда не следуют, но по окончательным результатам оказываются эквивалентными пренебрежению частотной дисперсией. Учет частотной дисперсии играет здесь определяющую роль; это очевидно в случае изотропной среды, так как в отсутствие дисперсии диэлектрическая проницаемость $\varepsilon > 0$.

В следующем разделе мы даем последовательный вывод необходимых для дальнейшего формул кристаллооптики при учете дисперсии диэлектрического тензора $\varepsilon_{ij}(\omega)$. Мы будем в основном следовать изложению в книге [6].

2. МОНОХРОМАТИЧЕСКАЯ ПЛОСКАЯ ВОЛНА В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Пренебрегая пространственной дисперсией (считая среду немагнитной), мы не различаем векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ (магнитной индукции и напряженности магнитного поля), а связь между фурье-компонентами напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и электрической индукции $\mathbf{D}$ записываем в виде

$$D_i(\omega,\mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega)E_j(\omega,\mathbf{k}). \tag{2.1}$$

Тензор $\varepsilon_{ij}(\omega)$ подчиняется трем условиям:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon^*_{ij}(-\omega), \quad \varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ji}(\omega),\\ \varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon^*_{ji}(\omega).\end{gathered} \tag{2.2}$$

Первое — условие вещественности полей $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$; второе условие — следствие принципа симметрии кинетических коэффициентов; третье — условие отсутствия диссипации энергии электромагнитного поля, когда можно ввести среднюю по времени плотность энергии электромагнитного поля

$$\overline{U} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{\partial\omega\,\varepsilon_{ij}(\omega)}{\partial\omega}\langle E_iE_j\rangle + \langle\mathbf{H}^2\rangle\right] \geq 0 \tag{2.3}$$

(см. [6, §§ 80, 96]).

Решение уравнений Максвелла в виде плоской монохроматической волны в среде,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \operatorname{Re}\mathbf{E}_0\exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\right] \tag{2.4}$$

(аналогичные выражения для $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$), дает

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{n}\times\mathbf{E}_0, \quad \mathbf{D}_0 = -\mathbf{n}\times\mathbf{H}_0, \tag{2.5}$$

где вектор $\mathbf{n}$ определяется по формуле (1.5). Из выражений (2.5) и (2.1) получаем систему уравнений для $\mathbf{E}_0$,

$$\left[n^2\delta_{ij} - n_in_j - \varepsilon_{ij}(\omega)\right]E_{0j} = 0, \tag{2.6}$$

нетривиальное ($\mathbf{E}_0 \neq 0$) решение которой существует при условии

$$\det\left|n^2\delta_{ij} - n_in_j - \varepsilon_{ij}(\omega)\right| = 0. \tag{2.7}$$

Подставляя в (2.3) выражение (2.4) для $\mathbf{E}$ и аналогичное выражение для $\mathbf{H}$, а также $\mathbf{H}_0$ из (2.5), получаем

$$\begin{aligned}\overline{U} = \frac{1}{16\pi}\Bigg[&\frac{\partial\omega\,\varepsilon_{ij}(\omega)}{\partial\omega}E^*_{0i}E_{0j} + \\ &+ n^2|\mathbf{E}_0|^2 - |\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_0|^2\Bigg] \geq 0.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Для вектора Пойнтинга таким же образом получаем

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{4\pi}\langle\mathbf{E}\times\mathbf{H}\rangle = \frac{c}{8\pi}\left[\mathbf{n}|\mathbf{E}_0|^2 - \operatorname{Re}\mathbf{E}_0(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}^*_0)\right]. \tag{2.9}$$

Симметричный и вещественный тензор $\varepsilon_{ij}(\omega)$ (см. (2.1)) можно привести к главным осям. Если x, y, z — главные оси тензора, то

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij}(\omega)_{i\neq j} = 0, \quad \varepsilon_{xx}(\omega) = \varepsilon^{(x)}(\omega),\\ \varepsilon_{yy}(\omega) = \varepsilon^{(y)}(\omega), \quad \varepsilon_{zz}(\omega) = \varepsilon^{(z)}(\omega),\end{gathered} \tag{2.10}$$

причем $\varepsilon^{(i)}(\omega) = \varepsilon^{(i)*}(\omega) = \varepsilon^{(i)}(-\omega)$. Никаких дополнительных к этим ограничений на $\varepsilon^{(i)}(\omega)$ нет, и мы, в отличие от [6, § 97], их не вводим: среда будет прозрачной для волны с частотой ω, если только волновой вектор $\mathbf{k}$ (см. (2.4)) вещественный. Уравнение (2.7) в главных осях принимает вид уравнения Френеля

$$n^2\left(\varepsilon^{(x)}n_x^2+\varepsilon^{(y)}n_y^2+\varepsilon^{(z)}n_z^2\right)-\left[n_x^2\varepsilon^{(x)}\left(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)}\right)+ n_y^2\varepsilon^{(y)}\left(\varepsilon^{(z)}+\varepsilon^{(x)}\right)+n_z^2\varepsilon^{(z)}\left(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(y)}\right)\right]+ \varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}=0. \quad (2.11)$$

3. НЕЗАТУХАЮЩИЕ ВОЛНЫ В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Ограничимся далее случаем одноосных кристаллов. Ось z выберем вдоль оптической оси кристалла, выбор осей x и y остается произвольным:

$$\varepsilon^{(x)}(\omega)=\varepsilon^{(y)}(\omega)=\varepsilon_\perp(\omega), \quad \varepsilon^{(z)}(\omega)=\varepsilon_\parallel(\omega). \quad (3.1)$$

Уравнение Френеля (2.11) четвертого порядка относительно n_i распадается на два уравнения второго порядка, определяющие соответственно законы дисперсии обыкновенной и необыкновенной волн:

$$n^2=\varepsilon_\perp(\omega), \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_\perp(\omega)(n_x^2+n_y^2)+\varepsilon_\parallel(\omega)n_z^2=\varepsilon_\perp(\omega)\varepsilon_\parallel(\omega). \quad (3.3)$$

(В случае изотропной среды, где $\varepsilon_\perp(\omega)=\varepsilon_\parallel(\omega)\equiv\equiv\varepsilon(\omega)$, уравнение (3.3) сводится к уравнению (3.2) и уравнению $\varepsilon(\omega)=0$, определяющему частоты продольных колебаний, см., например, [6, § 84].)

Выбирая ось y так, что $n_y=0$, из соотношений (2.6), (2.8)–(2.10), (3.1) и (3.2) для обыкновенной волны получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
&E_{0x}=E_{0z}=0, \quad H_{0x}=-n_zE_{0y},\\
&H_{0y}=0, \quad H_{0z}=n_xE_{0y},\\
&\overline{U}=\frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon_\perp+\frac{\omega}{2}\frac{\partial\varepsilon_\perp}{\partial\omega}\right)|E_{0y}|^2\ge 0,\\
&\overline{S}_x=\frac{c}{8\pi}|E_{0y}|^2n_x, \quad \overline{S}_y=0,\\
&\overline{S}_z=\frac{c}{8\pi}|E_{0y}|^2n_z,
\end{aligned} \quad (3.4)$$

из выражений (3.2), (1.5) и (3.4) получаем, что, как и должно быть,

$$\overline{\mathbf{S}}=\mathbf{u}_{gr}\overline{U}. \quad (3.5)$$

Видно, что направления $\overline{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{u}_{gr}$ совпадают с направлениями $\mathbf{k}$ (или $\mathbf{n}$) и $\mathbf{u}_f$. Видно также, что обыкновенная волна поляризована в направлении, перпендикулярном главному сечению, принадлежащему данному $\mathbf{n}$ (т. е. поле $\mathbf{E}$ перпендикулярно плоскости zx).

Аналогично получаем соответствующие формулы для необыкновенной волны:

$$\begin{aligned}
&E_{0x}=-E_{0z}\frac{\varepsilon_\parallel n_z}{\varepsilon_\perp n_x}, \quad E_{0y}=0,\\
&H_{0x}=H_{0z}=0, \quad H_{0y}=-E_{0z}\frac{\varepsilon_\parallel}{n_x},\\
&\overline{U}=\frac{1}{8\pi}|H_{0y}|^2\left[1+\frac{\omega}{2\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp}\left(\frac{\partial\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp}{\partial\omega}-n_x^2\frac{\partial\varepsilon_\perp}{\partial\omega}-n_z^2\frac{\partial\varepsilon_\parallel}{\partial\omega}\right)\right]\ge 0,\\
&\overline{S}_x=\frac{c}{8\pi}|H_{0y}|^2\frac{n_x}{\varepsilon_\parallel}, \quad \overline{S}_y=0,\\
&\overline{S}_z=\frac{c}{8\pi}|H_{0y}|^2\frac{n_z}{\varepsilon_\perp}.
\end{aligned} \quad (3.6)$$

Из выражений (3.3) и (1.5) снова получаем известное соотношение (3.5) между групповой скоростью волны, вектором Пойнтинга и энергией, которые определяются по формулам (3.6). Необыкновенная волна поляризована в плоскости главного сечения (т. е. вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости zx).

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\varepsilon_\perp(\omega)>0, \quad \varepsilon_\parallel(\omega)>0. \quad (3.7)$$

Обе волны — обыкновенная, поверхность волновых векторов которой является сферой и определяется уравнением (3.2), и необыкновенная, поверхность волновых векторов которой (эллипсоид) определяется уравнением (3.3), — распространяются без затухания. В обыкновенной волне направления $\overline{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{u}_{gr}$ совпадают с направлениями $\mathbf{k}$ (или $\mathbf{n}$) и $\mathbf{u}_f$. В необыкновенной волне знаки проекций $\overline{S}_i$ и u_{gri} совпадают со знаками проекций k_i (или n_i) и u_{fi}. Это — известные результаты классической кристаллооптики; условия (3.7), которые налагаются на $\varepsilon_\parallel$ и $\varepsilon_\perp$ [6, § 97], являются, таким образом, достаточными, но, как мы увидим, не необходимыми, чтобы волны распространялись в кристалле без затухания.

Действительно, пусть теперь

$$\varepsilon_\perp(\omega)>0, \quad \varepsilon_\parallel(\omega)<0. \quad (3.8)$$

Обыкновенная волна по-прежнему не затухает вне зависимости от направления распространения. Необыкновенной волне соответствует поверхность волновых векторов — гиперболоид (см. (3.3))

$$n_z^2=\varepsilon_\perp+\frac{\varepsilon_\perp}{|\varepsilon_\parallel|}n_x^2. \quad (3.9)$$

Волна, в которой n_x и n_z связаны уравнением (3.9), не будет затухать. Из выражений (3.5) и (3.6) видно, что знаки $\overline{S}_z$ и u_{grz} совпадают со знаками k_z (или

n_z) и u_{fz}, но $\overline{S}_x$ и u_{grx} отличаются по знаку от k_x (или n_x) и u_{fx}. Ясно, что при выполнении условий (3.8) падающая на кристалл волна может испытывать обращенное преломление. Условия (3.8) могут выполняться, например, в области частот, примыкающей с коротковолновой стороны к некоторой собственной частоте $\omega_{0\|}$ среды, причем близкие друг к другу собственные частоты $\omega_{0\|}$ и $\omega_{0\perp}$ удовлетворяют неравенству $\omega_{0\|} > \omega_{0\perp}$.

Предположим далее, что

$$\varepsilon_\perp(\omega) < 0, \quad \varepsilon_\|(\omega) > 0. \tag{3.10}$$

В этом случае обыкновенная волна затухает (см. (3.2)), а необыкновенной волне соответствует поверхность волновых векторов — гиперболоид (см. (3.3))

$$n_x^2 = \varepsilon_\| + \frac{\varepsilon_\|}{|\varepsilon_\perp|}\, n_z^2. \tag{3.11}$$

Волна, в которой n_x и n_z связаны уравнением (3.11), не затухает, так что в той области частот, в которой выполняются неравенства (3.10), кристалл может использоваться как анализатор и поляризатор падающего излучения, так как через него проходит только излучение, поляризованное в плоскости главного сечения. Из выражений (3.5) и (3.6) видно, что знаки $\overline{S}_x$ и u_{grx} совпадают со знаками k_x (или n_x) и u_{fx}, но $\overline{S}_z$ и u_{grz} отличаются по знаку от k_z (или n_z) и u_{fz}. Ясно, что падающая на кристалл волна при выполнении условий (3.10) может испытывать обращенное преломление. Условия (3.10) могут выполняться, например, в области частот, примыкающей с коротковолновой стороны к некоторой собственной частоте $\omega_{0\perp}$ среды, причем близкие друг к другу собственные частоты $\omega_{0\|}$ и $\omega_{0\perp}$ среды удовлетворяют неравенству $\omega_{0\perp} > \omega_{0\|}$.

Наконец, если

$$\varepsilon_\perp(\omega) < 0, \quad \varepsilon_\|(\omega) < 0 \tag{3.12}$$

для данной частоты ω, то не удовлетворяется ни уравнение (3.2), ни уравнение (3.3). Это означает, что волны с такой частотой не распространяются в кристалле, т. е. затухают даже в отсутствие диссипации. Заметим, что условия (3.8), (3.10) и (3.12), как и условия (3.7), не противоречат условию $\overline{U} \geq 0$ в (3.4) и (3.6).

4. ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛНЫ В ОДНООСНОМ КРИСТАЛЛЕ

В качестве примера рассмотрим преломление плоской монохроматической волны, падающей из вакуума на плоскую поверхность одноосного кристалла, в которой лежит его оптическая ось. Полагаем для простоты, что направление падающей волны лежит в плоскости, проходящей через нормаль к поверхности раздела и оптическую ось. Тогда, в соответствии с соотношениями (1.1),

$$n_z = \sin\theta_0, \quad n_y = 0, \quad \overline{S}_x \geq 0, \tag{4.1}$$

ось x направлена в глубь кристалла.

Если выполняются условия (3.7), то в кристалле имеются две преломленные волны. Угол θ преломления луча обыкновенной волны, согласно (3.4), (4.1) и (3.2), определяется обычным законом преломления:

$$\operatorname{tg}\theta \equiv \frac{\overline{S}_z}{\overline{S}_x} = \frac{n_z}{n_x} = \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{\varepsilon_\perp - \sin^2\theta_0}}, \quad \sqrt{\varepsilon_\perp}\,\sin\theta = \sin\theta_0, \tag{4.2}$$

волна поляризована перпендикулярно плоскости падения. Угол θ преломления луча необыкновенной волны определяется, согласно (3.6), (4.1) и (3.3), равенством

$$\operatorname{tg}\theta \equiv \frac{\overline{S}_z}{\overline{S}_x} = \frac{\varepsilon_\| n_z}{\varepsilon_\perp n_x} = \sqrt{\frac{\varepsilon_\|}{\varepsilon_\perp}}\,\frac{\sin\theta_0}{\sqrt{\varepsilon_\perp - \sin^2\theta_0}}, \tag{4.3}$$

волна поляризована в плоскости падения. Если $\varepsilon_\perp(\omega) \leq 1$, то обе преломленные волны существуют только при угле падения $\theta_0 \leq \theta_r$, где θ_r — предельный угол полного отражения, $\sin\theta_r = \sqrt{\varepsilon_\perp}$. Луч падающей волны лежит по одну, а лучи обеих преломленных волн — по другую сторону от нормали к границе раздела сред.

При выполнении условий (3.8) обыкновенная волна с законом преломления (4.2) существует при любом угле падения, если $\varepsilon_\perp(\omega) \geq 1$, и при угле падения $\theta_0 \leq \theta_r$, если $\varepsilon_\perp(\omega) \leq 1$. В этом случае угол θ преломления луча необыкновенной волны определяется из (3.6), (4.1) и (3.9):

$$\operatorname{tg}\theta \equiv \frac{\overline{S}_z}{\overline{S}_x} = \frac{\varepsilon_\| n_z}{\varepsilon_\perp n_x} = \sqrt{\frac{|\varepsilon_\||}{\varepsilon_\perp}}\,\frac{\sin\theta_0}{\sqrt{\sin^2\theta_0 - \varepsilon_\perp}}. \tag{4.4}$$

Необыкновенная волна существует, следовательно, только тогда, когда отсутствует обыкновенная волна, т. е. при $\varepsilon_\perp(\omega) < 1$ и при угле падения, превышающем предельный угол полного отражения, $\theta_0 > \theta_r$. Как всегда, необыкновенная волна поляризована в плоскости падения. Луч падающей волны и луч преломленной волны (обыкновенной или необыкновенной) лежат по разные стороны от нормали к плоскости раздела сред.

При выполнении условий (3.10) в кристалле существует только необыкновенная волна. Соответствующий закон преломления получается из соотношений (3.6), (4.1) и (3.11):

$$\operatorname{tg}\theta \equiv \frac{\overline{S}_z}{\overline{S}_x} = \frac{\varepsilon_{\parallel} n_z}{\varepsilon_{\perp} n_x} = = -\sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{|\varepsilon_{\perp}|}}\,\frac{\sin\theta_0}{\sqrt{|\varepsilon_{\perp}| + \sin^2\theta_0}}. \quad (4.5)$$

В этом случае преломление обращенное: преломленный и падающий лучи лежат по одну сторону от нормали к плоскости раздела сред. Заметим также, что отсутствует эффект полного отражения, т. е. преломленный луч существует при всех углах падения: угол преломления по абсолютной величине монотонно растет от $\theta = 0$ при нормальном падении ($\theta_0 = 0$) до максимального значения

$$|\theta|_{max} = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{|\varepsilon_{\perp}|(1 + |\varepsilon_{\perp}|)}}$$

при скользящем падении ($\theta_0 = \pi/2$).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Условия для возможности наблюдения обращенного преломления (а также обращенного эффекта Доплера и обращенного эффекта Вавилова – Черенкова) в анизотропных средах существенно отличаются от соответствующих условий в изотропных средах: эти условия не связаны с учетом пространственной дисперсии тензора диэлектрической проницаемости. Поэтому указанные эффекты могут наблюдаться и в оптическом диапазоне частот, когда среду можно считать немагнитной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Мандельштам, ЖЭТФ **15**, 475 (1945).
2. Л. И. Мандельштам, *Полное собрание трудов*, т. 2, Изд-во АН СССР, Москва (1947), с. 334.
3. Л. И. Мандельштам, *Полное собрание трудов*, т. 5, Изд-во АН СССР (1950), с. 461.
4. В. Е. Пафомов, ЖЭТФ **36**, 1853 (1959).
5. В. Г. Веселаго, УФН **92**, 517 (1967).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
7. A. Schuster, *An Introduction to the Theory of Optics*, London, Edward Arnold & Co (1928); А. Шустер, *Введение в теоретическую оптику*, ОНТИ, Ленинград–Москва (1935).
8. В. П. Макаров, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ **125**, 345 (2004).
9. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, Госатомиздат, Москва (1961).
10. В. П. Макаров, А. А. Рухадзе, А. А. Самохин, УФЖ **50**, Д159 (2005).
11. А. Ф. Александров, А. А. Рухадзе, *Лекции по электродинамике плазмоподобных сред*, Изд-во МГУ, Москва (1999).
12. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
13. D. R. Smith, W. Padilla, D. C. Vier et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 4184 (2000).
14. R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, Science **292**, 77 (2001).
15. A. A. Houck, J. B. Brock, and I. L. Chung, Phys. Rev. Lett. **90**, 137401 (2003).
16. К. Ю. Блиох, Ю. П. Блиох, УФН **174**, 439 (2004).
17. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии*, Наука, Москва (1965).
18. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1970).