ЖЭТФ, 2006, том 129, вып. 4, стр. 651–658

БИВЕКТОРНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ МЕЖАТОМНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ ПРИ КОГЕРЕНТНОМ ПЛЕНЕНИИ НАСЕЛЕННОСТЕЙ

Л. В. Ильичев[*]

Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 25 июля 2005 г.

Предлагается наряду с векторами — элементами гильбертова пространства — описывать состояния квантовых систем с помощью бивекторов (в общем случае — поливекторов). Это сделано на примере медленных атомов, находящихся в состоянии когерентного пленения населенностей (КПН-состоянии). Полю локальных двумерных подпространств КПН-состояний можно естественным образом сопоставить поле локальных бивекторов и с их помощью сконструировать состояние атома и ансамбля атомов из условия нахождения их в некотором неизвестном КПН-состоянии. Такой подход обнаруживает наличие естественных межатомных корреляций. Соответствующие многочастичные состояния относятся к классу PPT-состояний (positive partial transpose).

PACS: 32.80.Qk, 42.50.-p

1. ВВЕДЕНИЕ

Весьма актуальна задача исследования корреляций в многочастичных квантовых системах. В значительной степени интерес к этой проблеме породило быстрое развитие квантовой теории информации и ее приложений. Центральным и наиболее интригующим в квантовой механике и квантовой информатике служит понятие зацепленного состояния, отражающее специфически квантовые корреляции между фрагментами единой системы. Нетривиальна идентификация смешанных зацепленных состояний и определение количественной меры их зацепленности [1]. Неразличимость частиц привносит в проблему новые нюансы. Пока отсутствует единый критерий зацепленности для системы тождественных частиц [2–6]. Возможно, его наличие и не является необходимым в силу относительного характера понятия зацепленности [5, 7], ставящего его в зависимость от конкретной экспериментальной ситуации и возможностей наблюдателя.

В работах [8–10] рассмотрены естественные спиновые корреляции (зацепленность) в вырожденном газе невзаимодействующих электронов. Естественность в данном контексте следует понимать как отсутствие специальной процедуры для создания зацепленности. Фермионная природа частиц оказывается принципиальной, что делает невозможным в какой-либо форме распространение полученных результатов на случай бозе-частиц. Естественная зацепленность в бозе-конденсате имеет место, как показано в работе [11]. Однако эта зацепленность не касается спиновых характеристик частиц, а относится только к числам заполнения выделенных областей в объеме бозе-конденсата. В данном случае отчетливо проявляется отмеченный выше операционный характер зацепленности.

В настоящей работе рассмотрена ситуация, когда имеют место естественные межчастичные спиновые корреляции в коллективе идентичных бозе-атомов. Коллектив предполагается когерентным в пространстве на масштабе, бо́льшем, чем среднее расстояние между атомами. Именно в такой ситуации проявляются квантовые следствия неразличимости частиц и статистический оператор системы не сводится к произведению статистических операторов отдельных атомов.

Вторым условием возникновения спиновых корреляций служит эффект когерентного пленения на-

[*]E-mail: leonid@iae.nsk.su

селенностей (КПН), который может иметь место в атоме, взаимодействующем с резонансным излучением и имеющем сложную структуру подуровней основного состояния. Хотя отдельные примеры того, что сейчас называется когерентным пленением, были известны и ранее [12, 13], внимание к эффекту КПН вызвала работа [14]. Исследование КПН весьма актуально ввиду его широких применений в спектроскопии сверхвысокого разрешения [15], в нелинейной оптике [16], в создании лазера без инверсии [17], в атомной оптике [18], в сверхглубоком лазерном охлаждении атомов [19].

В следующем разделе будет рассмотрена вспомогательная задача о движении медленного атома в неоднородном световом поле в условиях когерентного пленения населенности при неполном знании начального состояния. Такая постановка поможет мотивировать введение в рассмотрение наряду с векторами, как представителями «чистого» квантового состояния, бивекторов. Бивекторное расширение формализма широко используется в третьем разделе и четвертом, основном, где соответствующая модификация аппарата вторичного квантования позволяет обнаружить и описать межатомные спиновые корреляции.

2. МОТИВИРОВКА БИВЕКТОРНОГО ПОДХОДА

Известно [20], что для оптического перехода в атоме при условии $J_g = J_e+1$ (J_g — величина углового момента в основном состоянии, J_e — в возбужденном) в подпространстве $\mathcal{H}_g$ магнитных подуровней основного состояния существуют два ортогональных вектора, демонстрирующих эффект КПН. Эти состояния называются также «темными», так как атом, оказавшийся в таком состоянии, выбывает из взаимодействия с излучением. Условие такого выбывания для атома, находящегося в точке x (это обозначение точки трехмерного пространства используется для краткости), имеет вид

$$\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(x)|\chi\rangle = 0, \qquad (1)$$

где $\hat{\mathbf{d}}$ — оператор дипольного момента для резонансного перехода атома, $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_g$. В произвольной системе координат $|\chi\rangle$ есть суперпозиция состояний с различными магнитными квантовыми числами. Уравнение (1) тождественно условию деструктивной интерференции при суперпозиции альтернатив перехода атома в возбужденное состояние с различных магнитных подуровней. Амплитуды вероятности нахождения атома на том или ином магнитном подуровне в темном состоянии определяются поляризацией светового поля $\mathbf{E}(x)$. Различные решения уравнения (1) образуют локальное двумерное пространство темных состояний $\mathcal{H}^{(NC)}(x) \subset \mathcal{H}_g$; NC — аббревиатура термина non-coupled (не связанный с полем). По своему физическому смыслу оно полностью аналогично понятию пространства, свободного от декогеренции (DFS — decoherence-free subspace) (см. [21] и имеющиеся там ссылки). Атом, оказавшийся в темном состоянии, не способен к спонтанному распаду, так как находится в основном состоянии, и, согласно (1), не переходит в возбужденное состояние, из которого возможен такой распад. В то же время, будучи приготовленным в состоянии, отличном от темного, атом, в конце концов, окажется в пространстве $\mathcal{H}^{(NC)}$ после серии вынужденных и спонтанных радиационных переходов.

Если поляризация неоднородна по пространству, что имеет место при сложной структуре (монохроматического!) поля излучения, а атомы двигаются адиабатически медленно по отношению к характерным временам вынужденных и спонтанных радиационных переходов, понятие локального темного подпространства $\mathcal{H}^{(NC)}(x)$ остается адекватным. Любой выбор гладкого поля ортонормированных реперов в $\mathcal{H}^{(NC)}(x)$,

$$\mathcal{H}^{(NC)}(x) = \mathrm{span}\{|\chi^{(1)}(x)\rangle, |\chi^{(2)}(x)\rangle\} : \\ : \langle\chi^{(\alpha)}(x)|\chi^{(\beta)}(x)\rangle = \delta_{\alpha\beta},$$

позволяет представить волновую функцию $|\psi(x)\rangle$ темного атома в виде двухкомпонентного спинора:

$$|\psi(x)\rangle = f_1(x)\,|\chi^{(1)}(x)\rangle + f_2(x)\,|\chi^{(2)}(x)\rangle, \qquad (2)$$

где $f_\alpha(x) = \langle\chi^{(\alpha)}(x)|\psi(x)\rangle$. Условие адиабатичности движения модифицирует, как показано в работе [22] (см. также [23, 24]), эволюционное уравнение для $|\psi(x)\rangle$:

$$\imath\partial_t|\psi(x)\rangle = -\frac{1}{2m}\hat{P}_{NC}(x)\,\partial_x^2\,\hat{P}_{NC}(x)\,|\psi(x)\rangle. \qquad (3)$$

Здесь

$$\hat{P}_{NC}(x) = \sum_{\alpha=1,2} |\chi^{(\alpha)}(x)\rangle\langle\chi^{(\alpha)}(x)| \qquad (4)$$

— проектор на локальное темное подпространство $\mathcal{H}^{(NC)}(x)$. Соответствующее уравнение для $f_\alpha(x)$ имеет вид

$$\imath\partial_t f_\alpha(x) = -\frac{1}{2m}\,D_{\alpha\gamma}D_{\gamma\beta}\,f_\beta(x) + V_{\alpha\beta}(x)\,f_\beta(x), \qquad (5)$$

где $D_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\partial_x - \imath A_{\alpha\beta}(x)$ (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). В уравнении (5) фигурируют неабелевый калибровочный потенциал

$$A_{\alpha\beta}(x) = \imath\langle\chi^{(\alpha)}(x)|(\partial_x|\chi^{(\beta)}(x)\rangle)$$

и матричный потенциал

$$V_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2m}\langle\chi^{(\alpha)}(x)|(\partial_x\hat{P}_{NC}(x))(\partial_x|\chi^{(\beta)}(x)\rangle),$$

имеющие геометрическое происхождение [22]. Они задаются структурой поля локальных КПН-состояний и естественным образом обеспечивают инвариантность эволюционного уравнения для $f_\alpha(x)$ при переходе к другому полю темных реперов.

Описание эволюции с помощью уравнения (5) дает знание вектора состояния атома в любой момент времени по его начальному значению. Такая ситуация отвечает идеализированному случаю наиболее полного описания системы (атома), возможного в квантовой механике. В реальной ситуации неполного описания состояние атома задается его статистическим оператором. Для атома, находящегося в темном состоянии, этот оператор имеет в координатном представлении следующий общий вид:

$$\hat{\varrho}\,(x|x') = |\chi^{(\alpha)}(x)\rangle\,\rho_{\alpha\beta}(x|x')\,\langle\chi^{(\beta)}(x')|. \tag{6}$$

Здесь $\rho_{\alpha\beta}(x|x')$ — бинарная матрица, зависящая от выбора базисов локальных темных состояний в точках x и x'. Элементы этой матрицы задают внутреннее состояние атома и определяются начальным статистическим оператором и динамикой перехода атома в темное состояние.

Что можно сказать о структуре матрицы $\rho_{\alpha\beta}(x|x')$ в ситуации, когда неизвестно начальное состояние, из которого атом перешел в темное состояние? Для случая $x = x'$ ответ достаточно прост:

$$\rho_{\alpha\beta}(x|x) = \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta}\,\varrho(x|x). \tag{7}$$

Здесь $\varrho(x|x) = \mathrm{Tr}\,\hat{\varrho}\,(x|x)$ есть плотность вероятности нахождения атома в точке x. Эта плотность может быть неизвестной, но заметим, что она инвариантна относительно выбора базиса в пространстве $\mathcal{H}^{(NC)}(x)$. Структура единичной матрицы в правой части (7) отражает максимальное смешивание по элементам (любого!) базиса локальных темных состояний как следствие отсутствия информации о внутреннем состоянии атома помимо условия его КПН-природы. Нашей ближайшей целью является обобщение соотношения (7) на случай $x \neq x'$, отвечающий наличию когерентности между различными пространственными положениями атома. Желательно выразить структуру матрицы $\rho_{\alpha\beta}(x|x')$ через инвариантную величину

$$\varrho\,(x|x') = \mathrm{Tr}\,\hat{\varrho}\,(x|x'). \tag{8}$$

Заметим, что, согласно (6), величина $\varrho(x|x')$ связана с элементами $\rho_{\alpha\beta}(x|x')$ единственным условием[1)]

$$\varrho\,(x|x') = \sum_{\alpha,\beta}\langle\chi^{(\beta)}(x')|\chi^{(\alpha)}(x)\rangle\,\rho_{\alpha\beta}(x|x'), \tag{9}$$

из которого вовсе не очевидна однозначность возможного выбора величин $\rho_{\alpha\beta}(x|x')$. Таким образом, требуется некоторый естественный принцип, позволяющий конкретизировать решение уравнения (9).

Поступим следующим образом. Как известно, любое двумерное пространство (в том числе и $\mathcal{H}^{(NC)}(x)$) полностью определяется заданием бивектора, т. е. разложимого антисимметричного тензора валентности 2:

$$|\chi^{(1)}(x)\wedge\chi^{(2)}(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\chi^{(1)}(x)\rangle\otimes|\chi^{(2)}(x)\rangle - |\chi^{(2)}(x)\rangle\otimes|\chi^{(1)}(x)\rangle\Big). \tag{10}$$

Отметим внешнее сходство определения бивектора с антисимметричным состоянием двухкомпонентной системы, например, пары атомов. Наряду с симметричными такие состояния широко используются при анализе эволюции двухатомной системы (см. [25] и приведенные там ссылки). Смешивать эти понятия, однако, не следует. Бивектор не является обычным квантовым состоянием, т. е. он в общем случае (при $J_g > 1$) не представляет собой элемент какого-либо гильбертова пространства, а является геометрическим объектом, задающим подпространство в пространстве внутренних состояний одного единственного атома. Так же как и обычный вектор гильбертова пространства, рассматриваемый как представитель состояния квантовой системы, бивектор (10) символизирует проективный объект, определенный с точностью до комплексного числового множителя и, следовательно, инвариантный относительно выбора любой пары неколлинеарных векторов $|\chi^{(1)}(x)\rangle$ $|\chi^{(2)}(x)\rangle$ из $\mathcal{H}^{(NC)}(x)$. Удобно сразу считать эту пару ортонормированным репером (любым). Введение коэффициента $1/\sqrt{2}$ (вместо общепринятого $1/2$) в формуле (10) обеспечивает нормировку

[1)] Есть, разумеется, и требование эрмитовости: $\rho_{\alpha\beta}(x|x') = \rho^*_{\beta\alpha}(x'|x)$.

$$\langle \chi^{(1)}(x) \wedge \chi^{(2)}(x) | \chi^{(1)}(x) \wedge \chi^{(2)}(x) \rangle = 1. \quad (11)$$

Полю локальных пространств КПН-состояний оказывается сопоставленным поле бивекторов $|\chi^{(1)}(x) \wedge \chi^{(2)}(x)\rangle$. Введем новый объект — бивекторный статистический оператор

$$\hat{\varrho}^{(biv)}(x|x') = |\chi^{(1)}(x) \wedge \chi^{(2)}(x)\rangle \times \times \rho^{(biv)}(x|x') \langle \chi^{(1)}(x') \wedge \chi^{(2)}(x')| \quad (12)$$

и постулируем следующим образом его связь с обычным статистическим оператором, отвечающим рассматриваемой ситуации отсутствия знания о конкретном темном состоянии атома. Положим, что $\hat{\varrho}(x|x')$ совпадает со следом по первым (для определенности) сомножителям в тензорном произведении (10) от бивекторного статистического оператора[2)] $\hat{\varrho}^{(biv)}(x|x')$:

$$\begin{aligned}\hat{\varrho}(x|x') = \frac{1}{2}\Big[&|\chi^{(1)}(x)\rangle \langle \chi^{(2)}(x')|\chi^{(2)}(x)\rangle \langle \chi^{(1)}(x')| - \\ &- |\chi^{(2)}(x)\rangle \langle \chi^{(2)}(x')|\chi^{(1)}(x)\rangle \langle \chi^{(1)}(x')| - \\ &- |\chi^{(1)}(x)\rangle \langle \chi^{(1)}(x')|\chi^{(2)}(x)\rangle \langle \chi^{(2)}(x')| + \\ &+ |\chi^{(2)}(x)\rangle \langle \chi^{(1)}(x')|\chi^{(1)}(x)\rangle \langle \chi^{(2)}(x')| \Big] \times \\ &\times \rho^{(biv)}(x|x'). \end{aligned} \quad (13)$$

Из формул (6) и (13) следует, что

$$\rho_{\alpha\beta}(x|x') = \frac{1}{2}(-1)^{\alpha+\beta} \times \times \langle \chi^{(\overline{\beta})}(x')|\chi^{(\overline{\alpha})}(x)\rangle \rho^{(biv)}(x|x'). \quad (14)$$

Здесь $\overline{1} = 2$ и $\overline{2} = 1$. В то же время из формул (8) и (13) имеем

$$\varrho(x|x') = \langle \chi^{(1)}(x') \wedge \chi^{(2)}(x') \times \times |\chi^{(1)}(x) \wedge \chi^{(2)}(x)\rangle \rho^{(biv)}(x|x'). \quad (15)$$

Выражения (14) и (15) задают искомую связь между $\rho_{\alpha\beta}(x|x')$ и $\varrho(x|x')$. Соотношения (9) и (7) оказываются выполненными.

3. АНСАМБЛЬ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ

Перейдем к описанию многочастичной системы тождественных атомов. Предположим, что все атомы находятся в темном состоянии. Структура поля темных подпространств $\mathcal{H}^{(NC)}(x)$ или, что эквивалентно, поля темных бивекторов предполагается известной.

Введем операторы рождения $\hat{\Psi}^\dagger_{\chi^{(1)}\wedge\chi^{(2)}}(x)$ и уничтожения $\hat{\Psi}_{\chi^{(1)}\wedge\chi^{(2)}}(x)$, отвечающие локальному бивектору $|\chi^{(1)}(x) \wedge \chi^{(2)}(x)\rangle$. Наложим на них обычное соотношение коммутации:

$$[\hat{\Psi}_{\chi^{(1)}\wedge\chi^{(2)}}(x), \hat{\Psi}^\dagger_{\chi^{(1)}\wedge\chi^{(2)}}(y)] = \delta(x-y). \quad (16)$$

Нам понадобится также знание коммутаторов между вновь введенными операторами и операторами рождения и уничтожения из обычного векторного формализма. Постулируем следующее соотношение:

$$[\hat{\Psi}_\phi(x), \hat{\Psi}^\dagger_{\chi^{(1)}\wedge\chi^{(2)}}(y)] = = \langle \phi|\chi^{(1)}(x) \wedge \chi^{(2)}(x)\rangle \delta(x-y), \quad (17)$$

где $\hat{\Psi}_\phi(x)$ — оператор уничтожения атома, находящегося в точке x и имеющего внутреннее состояние $|\phi\rangle$. Правая часть соотношения (17) содержит множителем свертку ковектора $\langle\phi|$ и бивектора $|\chi^{(1)}(x) \wedge \chi^{(2)}(x)\rangle$:

$$\langle \phi|\chi^{(1)}(x) \wedge \chi^{(2)}(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\chi^{(1)}(x)\rangle \langle \phi|\chi^{(2)}(x)\rangle - - \frac{1}{\sqrt{2}}|\chi^{(2)}(x)\rangle \langle \phi|\chi^{(1)}(x)\rangle. \quad (18)$$

Для осуществления свертки выбран второй сомножитель в тензорном произведении $\mathcal{H}^{(NC)}(x) \otimes \otimes \mathcal{H}^{(NC)}(x)$. Результат свертки (18) принадлежит пространству $\mathcal{H}^{(NC)}(x)$ и известен также как вектор, ассоциированный вектору $|\phi\rangle$.

По аналогии со случаем одного атома нам понадобится проектор $\mathcal{P}_{NC}$ на темное состояние многоатомной системы. Введем его следующим образом. Зафиксируем некоторую полную ортонормированную систему одночастичных пространственных волновых функций $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^\infty$:

$$\int \phi_i(x)\phi_j^*(x)\,dx = \delta_{ij}$$

и построим операторы

$$\hat{\Phi}_i^\dagger = \int \phi_i(x)\,\hat{\Psi}^\dagger_{\chi^{(1)}\wedge\chi^{(2)}}(x)\,dx \quad (19)$$

вместе с соответствующими сопряженными. Коммутационные соотношения для них очевидны:

$$[\hat{\Phi}_i, \hat{\Phi}_j^\dagger] = \delta_{ij}. \quad (20)$$

[2)] Заметим в этой связи, что проектор $\hat{P}_{NC}(x)$ (4) на локальное темное подпространство получается из бивекторного проектора $|\chi^{(1)}(x) \wedge \chi^{(2)}(x)\rangle\langle\chi^{(1)}(x) \wedge \chi^{(2)}(x)|$ путем вычисления следа по первым (или вторым) сомножителям в тензорном произведении.

Набор $\{\hat{\Phi}_i,\, \hat{\Phi}_i^\dagger\}_{i=1}^{\infty}$ предназначен для конструирования оператора

$$\mathcal{D}_K[z] = \exp\left[\sum_{i=0}^{K}\left(z_i\,\hat{\Phi}_i^\dagger - z_i^*\,\hat{\Phi}_i\right)\right], \tag{21}$$

преобразующего вакуум в произведение когерентных состояний, отвечающих «бивекторным» модам $(\hat{\Phi}_i,\, \hat{\Phi}_i^\dagger)$, $i = 1, \ldots, K$.

Используя (21), строим оператор

$$\mathcal{P}_{NC} = \lim_{K\to\infty}\int\prod_{i=1}^{K}\frac{d^2 z_i}{\pi}\,\mathcal{D}_K[z]\,\hat{P}_{vac}\,\mathcal{D}_K^\dagger[z]. \tag{22}$$

Не вдаваясь в детали, обсудим некоторые свойства введенного оператора. Он осуществляет, как не трудно убедиться, тождественное преобразование любого элемента фоковского базиса относительно бивекторных мод $(\hat{\Phi}_i,\, \hat{\Phi}_i^\dagger)$, $i = 1, \ldots, \infty$. По своим алгебраическим свойствам $\mathcal{P}_{NC}$ есть проектор. В частности, выполнены условия $\mathcal{P}_{NC} = \mathcal{P}_{NC}^\dagger$ и $\mathcal{P}_{NC}^2 = \mathcal{P}_{NC}$. Из-за необычных соотношений коммутации (17) между векторными и бивекторными операторами рождения и уничтожения довольно сложно интерпретировать результат действия $\mathcal{P}_{NC}$, например, на состояние $|\psi\rangle = \hat{\Psi}_\psi^\dagger(x)\,|\mathrm{vac}\rangle$. Однако смысл преобразования

$$|\psi\rangle\langle\psi| \mapsto \frac{\mathcal{P}_{NC}\,|\psi\rangle\langle\psi|\,\mathcal{P}_{NC}}{\mathrm{Tr}\,\mathcal{P}_{NC}\,|\psi\rangle\langle\psi|\,\mathcal{P}_{NC}} \tag{23}$$

уже вполне прозрачен: при условии $\langle\psi|\chi^{(1)}(x)\wedge\chi^{(2)}(x)\rangle \neq 0$ внутреннее состояние частицы оказывается «размазанным» по локальному темному подпространству. Таким образом, состояние в правой части (23) является смешанным, и, следовательно, указанное преобразование диссипативно — оно стирает часть информации о внутреннем состоянии атома.

Исходя из сказанного выше, мы можем заключить, что формализацией условия о нахождении всех атомов в темном состоянии служит соотношение

$$\hat{\varrho} = \mathcal{P}_{NC}\,\hat{\varrho}\,\mathcal{P}_{NC} \tag{24}$$

для статистического оператора всего коллектива атомов. В следующем разделе будет показано, что из этого соотношения следует наличие межатомных корреляций.

4. МЕЖЧАСТИЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ

Зафиксируем некоторый базис $\{|m\rangle\}_{m=-J_g}^{J_g}$ в пространстве основных состояний атома и рассмотрим двухчастичную матрицу плотности, диагональную по положениям атомов a и b:

$$\begin{aligned}\langle x_a, m_a; x_b, m_b|\hat{\varrho}^{(2)}|x_a, m_a'; x_b, m_b'\rangle &= \\ = \mathrm{Tr}\,\hat{\varrho}\,\hat{\Psi}_{m_b'}^\dagger(x_b)\,\hat{\Psi}_{m_a'}^\dagger(x_a)\,\hat{\Psi}_{m_a}(x_a)\,\hat{\Psi}_{m_b}(x_b) &\equiv \\ \equiv \langle\langle\hat{\Psi}_{m_b'}^\dagger(x_b)\,\hat{\Psi}_{m_a'}^\dagger(x_a)\,\hat{\Psi}_{m_a}(x_a)\,\hat{\Psi}_{m_b}(x_b)\rangle\rangle.\end{aligned} \tag{25}$$

В силу условия (24) имеем

$$\begin{aligned}&\langle\langle\hat{\Psi}_{m_b'}^\dagger(x_b)\,\hat{\Psi}_{m_a'}^\dagger(x_a)\,\hat{\Psi}_{m_a}(x_a)\,\hat{\Psi}_{m_b}(x_b)\rangle\rangle = \\ &= \langle\langle\mathcal{P}_{NC}\,\hat{\Psi}_{m_b'}^\dagger(x_b)\hat{\Psi}_{m_a'}^\dagger(x_a)\hat{\Psi}_{m_a}(x_a)\hat{\Psi}_{m_b}(x_b)\mathcal{P}_{NC}\rangle\rangle = \\ &= \frac{1}{4}\langle\langle\mathcal{P}_{NC}\{\hat{\Psi}_{m_b'}^\dagger(x_b), \hat{\Psi}_{m_a'}^\dagger(x_a)\}_+ \times \\ &\times \{\hat{\Psi}_{m_a}(x_a),\, \hat{\Psi}_{m_b}(x_b)\}_+\,\mathcal{P}_{NC}\rangle\rangle.\end{aligned} \tag{26}$$

В последнем равенстве с помощью антикоммутаторов ликвидирована неоднозначность в порядке следования операторов $\hat{\Psi}$ и $\hat{\Psi}^\dagger$.

Имеем[3)]

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_m(x)\,\mathcal{P}_{NC} &= \lim_{K\to\infty}\int\prod_{i=1}^{K}\frac{d^2 z_i}{\pi}\,\mathcal{D}_K[z]\,\mathcal{D}_K^\dagger[z]\,\times \\ &\times \hat{\Psi}_m(x)\,\mathcal{D}_K[z]\hat{P}_{vac}\,\mathcal{D}_K^\dagger[z] = \\ &= \langle m|\chi^{(1)}(x)\wedge\chi^{(2)}(x)\rangle\,\mathcal{Q}(x),\end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\mathcal{Q}(x) = \lim_{K\to\infty}\int\prod_{i=1}^{K}\frac{d^2 z_i}{\pi}\,\times \sum_{j=1}^{K} z_j\phi_j(x)\,\mathcal{D}_K[z]\hat{P}_{vac}\,\mathcal{D}_K^\dagger[z]. \tag{28}$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_m(x)\,\hat{\Psi}_{m'}(x')\,\mathcal{P}_{NC} &= \langle m|\chi^{(1)}(x)\wedge\chi^{(2)}(x)\rangle\otimes \\ &\otimes \langle m'|\chi^{(1)}(x')\wedge\chi^{(2)}(x')\rangle\,\mathcal{Q}(x,x'),\end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\mathcal{Q}(x,x') = \mathcal{Q}(x',x) = \lim_{K\to\infty}\int\prod_{i=1}^{K}\frac{d^2 z_i}{\pi}\,\times \sum_{j,j'=1}^{K} z_j z_{j'}\,\phi_j(x)\phi_{j'}(x')\,\mathcal{D}_K[z]\hat{P}_{vac}\,\mathcal{D}_K^\dagger[z]. \tag{30}$$

[3)] С использованием получаемых ниже выражений (27) и (28) восстанавливается, как нетрудно убедиться, структура одноатомной матрицы плотности (14).

Используя введенные операторы $\mathcal{Q}(x,x')$, двухчастичную матрицу плотности (25) можно представить в виде[4)]

$$\langle x_a, m_a; x_b, m_b|\hat{\varrho}^{(2)}|x_a, m'_a; x_b, m'_b\rangle = \\ = \frac{1}{2}\Big[\langle\xi_{m'_a}(a)|\xi_{m_a}(a)\rangle\langle\xi_{m'_b}(b)|\xi_{m_b}(b)\rangle + \\ + \langle\xi_{m'_a}(a)|\xi_{m_b}(b)\rangle\langle\xi_{m'_b}(b)|\xi_{m_a}(a)\rangle\Big] \times \\ \times \langle\langle\mathcal{Q}^\dagger(x_a,x_b)\,\mathcal{Q}(x_a,x_b)\rangle\rangle. \quad (31)$$

Здесь введены обозначения

$$|\xi_{m_a}(a)\rangle = \langle m_a|\chi^{(1)}(x_a)\wedge\chi^{(2)}(x_a)\rangle, \\ |\xi_{m_b}(b)\rangle = \langle m_b|\chi^{(1)}(x_b)\wedge\chi^{(2)}(x_b)\rangle. \quad (32)$$

Заметим, что последний множитель в правой части (31) является функцией только координат атомов и не зависит от их магнитных квантовых чисел. Эта зависимость, определяющая межатомные спиновые корреляции, задается выражением в квадратных скобках.

Используемая форма записи этого выражения позволяет легко доказать, что рассматриваемое двухатомное состояние (31) относится к классу так называемых PPT-состояний [1] (positive partial transpose), остающихся положительными при транспонировании матрицы плотности по квантовым спиновым числам одного из атомов (например, атома a). При таком транспонировании выражение в квадратных скобках (31) переходит в следующее:

$$R(m_a, m_b|m'_a, m'_b) = \\ = \langle\xi_{m_a}(a)|\xi_{m'_a}(a)\rangle\langle\xi_{m'_b}(b)|\xi_{m_b}(b)\rangle + \\ + \langle\xi_{m_a}(b)|\xi_{m_b}(b)\rangle\langle\xi_{m'_b}(b)|\xi_{m'_a}(a)\rangle. \quad (33)$$

Неотрицательность матрицы R эквивалентна неотрицательности соответствующей квадратичной формы, т. е. для любых наборов комплексных чисел $\{\lambda_{m_a m_b}\}$ выражение

$$\sum_{m,m'} \lambda^*_{m_a m_b}\, R(m_a, m_b|m'_a, m'_b)\,\lambda_{m'_a m'_b} \quad (34)$$

должно быть неотрицательным. Если ввести оператор

$$\hat{F} = \sum_{m_a, m_b} |\xi_{m_a}(a)\rangle\,\lambda_{m_a m_b}\,\langle\xi_{m_b}(b)|, \quad (35)$$

(34) можно представить в виде

$$\mathrm{Tr}\,\hat{F}^\dagger\,\hat{F} + (\mathrm{Tr}\,\hat{F}^\dagger)(\mathrm{Tr}\,\hat{F}). \quad (36)$$

Это выражение, конечно, неотрицательно.

Для n-атомной матрицы плотности аналогичным образом получается следующее выражение:

$$\langle x_1, m_1; \ldots; x_n, m_n|\hat{\varrho}^{(n)}|x_1, m'_1; \ldots; x_n, m'_n\rangle = \\ = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\langle\xi_{m'_1}(1)|\xi_{m_{\sigma(1)}}(\sigma(1))\rangle\ldots \\ \ldots\langle\xi_{m'_n}(n)|\xi_{m_{\sigma(n)}}(\sigma(n))\rangle \times \\ \times \langle\langle\mathcal{Q}^\dagger(x_1,\ldots,x_n)\;\mathcal{Q}(x_1,\ldots,x_n)\rangle\rangle. \quad (37)$$

Здесь присутствует суммирование по всем элементам группы перестановок S_n. Проверка PPT-свойства состояния (37) должна быть осуществлена для любого подмножества из выделенной системы n атомов. Вследствие полной симметрии относительно перестановок важно только число k атомов в подмножестве, и достаточно рассматривать случаи $k \le n/2$. В трехатомной матрице плотности достаточно проверить ее положительность после транспонирования по спиновым числам одного атома. Демонстрация положительности для этого случая приведена в Приложении.

5. НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Предсказываемые межатомные корреляции являются в некотором смысле следствием отсутствия конкретной информации о внутренних состояниях атомов, помимо условия нахождения каждого атома в некотором неизвестном КПН-состоянии. Таким образом, эти корреляции также можно считать естественными (по аналогии с подходом работ [8–11]). Ситуация, при которой необходимо построить состояние системы по неполным данным, является типичной в квантовой механике и квантовой теории информации. Как показано выше, использование бивекторов позволяет в некоторых случаях решать проблему конструирования статистического оператора квантовой системы по неполным данным. Введение бивекторов (в общем случае поливекторов) модифицирует стандартный формализм квантовой механики, что, естественно, порождает ряд вопросов. Например, следует ли интерпретировать коэффициент при нормированном поливекторе как амплитуду вероятности нахождения системы в соответствующем подпространстве? Заметим в этой связи, что,

[4)] Более правильная запись последнего слагаемого в правой части имеет вид $\mathrm{Tr}\,\mathcal{Q}(x_a,x_b)\,\hat{\varrho}\,\mathcal{Q}^\dagger(x_a,x_b)$. Это связано с тем, что символ $\mathcal{Q}$ (так же, как и $\mathcal{P}_{NC}$) не является обычным оператором и для него, вообще говоря, нет свободы циклической перестановки при взятии следа. Надо помнить об этом, допуская вольность в обозначениях. Сказанное относится и к выражению (26).

как известно, результат суперпозиции поливекторов определенной валентности не обязательно является поливектором, но в общем случае только некоторым (неразложимым) антисимметричным тензором. Его физический смысл не ясен.

Несколько замечаний о полученных результатах. Как уже отмечалось выше, выражение (14) является естественным обобщением очевидного условия (7). Если принять (14) за начальные условия, то, как можно убедиться, в процессе адиабатической эволюции (5) матрица $\rho_{\alpha\beta}(x|x')$ не сохраняет структуру правой части (14). Иными словами, уравнение эволюции не сводится к динамике функции $\rho^{(biv)}(x|x')$.

В случае двух- и трехатомных матриц плотности был продемонстрирован PPT-характер межчастичных корреляций. Естественной представляется гипотеза, предполагающая, что корреляции в n-атомных кластерах ($n = 4, 5, \ldots$) также носят PPT-характер. Однако доказательство этого автору пока не известно. Открытым остается вопрос и о более точной классификации корреляций, т. е. являются ли соответствующие многочастичные состояния сепарабельными или зацепленными. Есть основания ожидать, что они является сепарабельными, поскольку описанные корреляции имеют место в состоянии, построенном из неполного знания об истории приготовления системы, т. е. соответствующая информация классична по своей природе и записана где-то в параметрах окружения.

Автор признателен А. В. Тайченачеву за обсуждение вопросов, затронутых в статье. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 03-02-17553, 04-02-16771) и Интеграционного проекта СО РАН «Лазерное охлаждение газов в магнитооптических ловушках».

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выберем для транспонирования в трехчастичной матрице плотности первый атом. После этой операции и умножения на $6 = 3!$ спиновая часть имеет вид:

$$\begin{aligned}
&R(m_1', m_2', m_3'|m_1, m_2, m_3) = \\
&= \langle\xi_{m_1}(1)|\xi_{m_1'}(1)\rangle\langle\xi_{m_2'}(2)|\xi_{m_2}(2)\rangle\langle\xi_{m_3'}(3)|\xi_{m_3}(3)\rangle + \\
&+\langle\xi_{m_1}(1)|\xi_{m_1'}(1)\rangle\langle\xi_{m_2'}(2)|\xi_{m_3}(3)\rangle\langle\xi_{m_3'}(3)|\xi_{m_2}(2)\rangle + \\
&+\langle\xi_{m_1}(1)|\xi_{m_2}(2)\rangle\langle\xi_{m_2'}(2)|\xi_{m_3}(3)\rangle\langle\xi_{m_3'}(3)|\xi_{m_1'}(1)\rangle + \\
&+\langle\xi_{m_1}(1)|\xi_{m_3}(3)\rangle\langle\xi_{m_2'}(2)|\xi_{m_1'}(1)\rangle\langle\xi_{m_3'}(3)|\xi_{m_2}(2)\rangle + \\
&+\langle\xi_{m_1}(1)|\xi_{m_2}(2)\rangle\langle\xi_{m_2'}(2)|\xi_{m_1'}(1)\rangle\langle\xi_{m_3'}(3)|\xi_{m_3}(3)\rangle + \\
&+ \langle\xi_{m_1}(1)|\xi_{m_3}(3)\rangle\langle\xi_{m_2'}(2)|\xi_{m_2}(2)\rangle \times \\
&\times \langle\xi_{m_3'}(3)|\xi_{m_1'}(1)\rangle. \qquad (38)
\end{aligned}$$

Надо проверить, что для любого набора комплексных чисел $\{\lambda_{m_1,m_2,m_3}\}$ квадратичная форма, соответствующая триадной матрице (38) неотрицательна. Введем вспомогательное пространство $\mathcal{V} = \mathrm{End}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{H}$ (здесь и ниже $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_g$). Для этого пространства есть два очевидных канонических отображения p, q: $\mathrm{End}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Первое из них ($p$) реализуется через обычное действие элементов из $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ над элементами из $\mathcal{H}$. Второе отображение есть $q = \mathrm{Tr}(\ldots) \otimes id_{\mathcal{H}}$. В пространстве $\mathcal{V}$ зафиксируем элемент

$$\mathcal{F} = \sum_{m_1,m_2,m_3} \lambda_{m_1,m_2,m_3} |\xi_{m_2}(2)\rangle\langle\xi_{m_1}(1)| \otimes |\xi_{m_3}(3)\rangle.$$

Введем в рассмотрение также дуальное пространство $\mathcal{V}^* = \mathcal{H}^* \otimes \mathrm{End}(\mathcal{H})$. Ему принадлежит элемент

$$\mathcal{F}^* = \sum_{m_1,m_2,m_3} \lambda^*_{m_1,m_2,m_3} \langle\xi_{m_3}(3)| \otimes |\xi_{m_1}(1)\rangle\langle\xi_{m_2}(2)|.$$

На паре пространств $(\mathcal{V}^*, \mathcal{V})$ можно различными способами вводить билинейный функционал. Нам понадобятся два следующих. Первый способ имеет вид

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{H}^* \otimes \mathrm{End}(\mathcal{H})) \odot_I (\mathrm{End}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{H}) \to \\
&\to (\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H})\,(\mathrm{End}(\mathcal{H}) \otimes \mathrm{End}(\mathcal{H})) \to \mathbb{C}. \qquad (39)
\end{aligned}$$

На втором шаге в цепочке отображений первая скобка превращается в число посредством обычного произведения на $\mathcal{H}$, а вторая — посредством взятия следа от произведения операторов. Второй способ имеет вид

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{H}^* \otimes \mathrm{End}_1(\mathcal{H})) \odot_{II} (\mathrm{End}_2(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{H}) \to \\
&\to (\mathcal{H}^* \otimes \mathrm{End}_2(\mathcal{H})) \otimes (\mathrm{End}_1(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{H}) \to \\
&\to \mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H} \to \mathbb{C}. \qquad (40)
\end{aligned}$$

Здесь на предпоследнем шаге использованы каноническое отображение q и его сопряженное $q^* : \mathcal{H}^* \otimes \otimes \mathrm{End}(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}^*$. Номера у пространств линейных операторов показывают схему их действий.

Нетрудно проверить, что функционалы $\odot_I$ и $\odot_{II}$ можно трактовать, как эрмитовы скалярные произведения на $\mathcal{V}$. Тогда первые два слагаемых из правой части (38) превращаются, соответственно, в $\mathcal{F}^* \odot_I \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^* \odot_{II} \mathcal{F}$. Сумма последних четырех слагаемых равна $||(p+q)\mathcal{F}||^2$. Неотрицательность квадратичной формы очевидна.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, E-print archives, quant-ph/0109124.
2. J. Schliemann, J. I. Cirac, M. Kus, M. Lewenstein, and D. Loss, Phys. Rev. A **64**, 022303 (2001).
3. R. Paskauskas and L. You, Phys. Rev. A **64**, 042310 (2001).
4. Y. S. Li, B. Zeng, X. S. Liu, and G. L. Long, Phys. Rev. A **64**, 054302 (2001).
5. Yu Shi, Phys. Rev. A **67**, 024310 (2003).
6. G. C. Ghirardi and L. Marinatto, Phys. Rev. A **70**, 012109 (2004).
7. P. Zanardi, Phys. Rev. Lett. **87**, 077901 (2001); P. Zanardi, D. A. Lidar, and S. Lloyd, Phys. Rev. Lett. **92**, 060402 (2004).
8. V. Vedral, Central Europ. J. Phys. **2**, 289 (2003).
9. S. Oh and J. Kim, Phys. Rev. A **69**, 054301 (2004).
10. C. Lunkes, C. Brunker, and V. Vedral, Phys. Rev. A **71**, 034309 (2005).
11. C. Simon, Phys. Rev. A **66**, 052323 (2002).
12. W. Happer, Rev. Mod. Phys. **44**, 169 (1972).
13. Т. Я. Попова, А. К. Попов, С. Г. Раутиан, ЖЭТФ **57**, 850 (1969).
14. G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, Nuovo Cim. **36**, 5 (1976).
15. A. Akulshin, A. Celikov, and V. Velichansky, Opt. Comm. **84**, 139 (1991).
16. J. E. Field, K. H. Hahn, and S. E. Harris, Phys. Rev. Lett. **67**, 3062 (1991).
17. M. O. Scully, Phys. Rep. **129**, 191 (1992).
18. P. Marte, P. Zoller, and J. L. Hall, Phys. Rev. A. **44**, 4118 (1991).
19. A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, Phys. Rev. Lett. **61**, 826 (1988).
20. В. С. Смирнов, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, ЖЭТФ **96**, 1613 (1989).
21. A. Shabani and D. A. Lidar, Phys. Rev. **72**, 042303 (2005).
22. A. V. Taychenachev, A. M. Tumaikin, and V. I. Yudin, Laser Phys. **2**, 575 (1992).
23. Dum R. and M. Olshanii, Phys. Rev. Lett. **76**, 1788 (1996).
24. P. M. Visser and G. Nienhuis, Phys. Rev. A **57**, 4581 (1998).
25. А. М. Башаров, А. А. Башкеев, Э. А. Маныкин, ЖЭТФ **127**, 536 (2005).