ЖЭТФ, 2006, том 129, вып. 3, стр. 581–586

КРИТЕРИЙ ДЛИННОВОЛНОВОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ОДНОРОДНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЕ

А. С. Баранов [*]

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория
196140, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 5 мая 2005 г.

Исследована электромагнитная неустойчивость однородной релятивистской плазмы без магнитного поля при наличии анизотропии скоростей (но с центром симметрии). В приближении длинных волн и медленных возмущений выведено необходимое условие устойчивости. Оно сводится к некоторым равенствам, которые не выполняются для эллипсоидальных распределений, но могут быть удовлетворены для других анизотропных распределений. Специфика релятивистского случая состоит только в замене массы покоя на приведенную.

PACS: 52.35.-g, 95.30.Qd, 52.27.Ny

1. ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитная неустойчивость плазмы впервые была изучена Вейбелом [1]. Ее характерной чертой, как известно, является существенная роль тока смещения, т. е. левой части первого уравнения Максвелла (см. далее формулы (2)), выступающего как важный фактор для сравнительно медленных плазменных процессов. Этот вид неустойчивости неоднократно рассматривался впоследствии, в том числе в неоднородных и нелинейных условиях [2, 3], но ее исчерпывающего описания до сих пор нет, в этом смысле ее анализ отстает от анализа более изученной электростатической неустойчивости [4]. В прежних исследованиях внимание уделялось различным отдельным моделям (преимущественно с внешним магнитным полем) либо с эллипсоидальным распределением скоростей, либо в виде наложения двух холодных потоков [5], общие же закономерности оставались несколько в тени.

Между тем исследование отдельных примеров на устойчивость не всегда показательно: иногда из весьма близких моделей, как подтверждается и ниже, одна может быть устойчивой, а другая неустойчивой. Это отодвигание электромагнитной неустойчивости на задний план связано, конечно, с тем, что ее инкременты сравнительно малы, а проявляется она на достаточно больших пространственных масштабах. Однако в дальнейшем неустойчивость Вейбела может приобрести более заметную роль за счет как расширения пространственных и временны́х масштабов в технических приложениях, так и более углубленного изучения космической плазмы.

Сразу построить общую теорию электромагнитной неустойчивости не удается. В данной работе мы развиваем аппарат, пригодный для произвольных в определенном смысле распределений частиц по скоростям, вместо рассмотрения изолированных примеров наподобие двух потоков. С другой стороны, мы вынуждены вводить некоторые общие ограничения, которые, надо полагать, удастся снять в дальнейших исследованиях. Именно, пока ограничиваемся однородной плазмой без внешнего магнитного поля, в которой распределение скоростей центрально-симметрично. При этом мы интересуемся асимптотикой возмущений на длинных волнах с соответственно малым инкрементом. Анализ ведется в обычном линейном приближении, хотя сейчас имеются и некоторые результаты для нелинейного случая [3].

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Ограничимся пока случаем, когда существенна подвижность только одного сорта частиц (элек-

[*] E-mail: baranov@gao.spb.ru

тронов). Введем обычные обозначения: x, y, z — координаты, t — время, $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$ — вектор скорости, $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ — вектор релятивистского импульса, e и m — заряд и масса электрона, $f(p_x, p_y, p_z, x, y, z)$ — фазовая плотность распределения электронов в пространстве импульсов, δf — ее возмущение, $\rho(x, y, z)$ — плотность возникающего пространственного заряда, $\mathbf{j}(x, y, z)$ — плотность тока, c — скорость света, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности возникающих электрического и магнитного макроскопических полей, $\mathbf{F}$ — сила, действующая на единичный заряд.

Основным для нас является уравнение Власова [6] в линеаризованном виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \\ + eF_x \frac{\partial f}{\partial p_x} + eF_y \frac{\partial f}{\partial p_y} + eF_z \frac{\partial f}{\partial p_z} = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{H}}{c}$$

и учитывается релятивистская связь между скоростью и импульсом: $\mathbf{v} = \mathbf{p}/M$, причем приведенная масса

$$M = \sqrt{m^2 + \frac{p^2}{c^2}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

(Заметим, что в астрономии уравнение (1) обычно связывают с именем Больцмана из-за отсутствия разницы между учетом различных категорий взаимодействий.) К уравнению Власова (1) надо присоединить еще уравнения Максвелла в вакууме:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -4\pi \mathbf{j} + c \operatorname{rot} \mathbf{H}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \end{gathered} \quad (2)$$

где плотность заряда

$$\rho = e \int f \, d\mathbf{p} \quad (3)$$

и плотность тока

$$\mathbf{j} = e \int v f \, d\mathbf{p} \quad (4)$$

связаны уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (5)$$

Обычным образом разлагаем произвольное возмущение на плоские волны. Для отдельной такой волны принимаем систему координат, в которой ось z совпадает с направлением волнового вектора. Тогда все линеаризованные возмущения пропорциональны $\exp(ikz)$ (k — волновое число).

Уравнения Максвелла (2) тогда принимают вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial E_x}{\partial t} = -4\pi j_x - ikcH_y, \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -4\pi j_y + ikcH_x, \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = -4\pi j_z, \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} = ikcE_y, \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = -ikcE_x, \quad ikE_z = 4\pi\rho \end{gathered} \quad (6)$$

(H_z обращается в нуль), и некоторое упрощение происходит также в уравнении Власова (1):

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + ikv_z \delta f + \\ + eF_x \frac{\partial f}{\partial p_x} + eF_y \frac{\partial f}{\partial p_y} + eF_z \frac{\partial f}{\partial p_z} = 0, \quad (7)$$

причем сейчас

$$\begin{gathered} F_x = E_x - \frac{v_z H_y}{c}, \quad F_y = E_y + \frac{v_z H_x}{c}, \\ F_z = E_z - \frac{v_x H_y - v_y H_x}{c}, \end{gathered} \quad (8)$$

а в формулах (3) и (4) вместо f записано δf.

Уравнение неразрывности (5) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -ikj_z. \quad (9)$$

Мы имеем в виду нарастающие во времени возмущения. Вводим ненулевой инкремент λ и заменяем далее $\partial/\partial t$ на λ.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

До сих пор фазовая плотность f предполагалась произвольной, но ниже мы вводим упрощающее предположение о наличии центра симметрии:

$$f(-p_x, -p_y, -p_z) = f(p_x, p_y, p_z). \quad (10)$$

Подчеркнем, что этим не подразумевается сферическая симметрия. Напротив, случай сферической симметрии, в сущности, тривиален: при дополнительном естественном допущении монотонности убывания f по p устойчивость по отношению к любым возмущениям следует тогда из энергетических соображений [7].

Упрощение, связанное с центральной симметрией f, мы используем следующим образом. Разлагаем δf на четную и нечетную части:

$$\delta f = \delta f^+ + \delta f^-,$$

где

$$\begin{aligned}\delta f^+(-p_x, -p_y, -p_z) = \delta f^+(p_x, p_y, p_z),\\ \delta f^-(-p_x, -p_y, -p_z) = \delta f^-(p_x, p_y, p_z).\end{aligned} \tag{11}$$

Формулы (6) и (7) преобразуются достаточно очевидным образом:

$$\begin{aligned}\lambda\delta f^+ = -ikv_z\delta f^- - e\Big[-\frac{v_zH_y}{c}\,\frac{\partial f}{\partial p_x} + \\ + \frac{v_zH_x}{c}\,\frac{\partial f}{\partial p_y} + \frac{v_xH_y - v_yH_x}{c}\,\frac{\partial f}{\partial p_z}\Big],\\ \lambda\delta f^- = -ikv_z\delta f^+ - \\ - e\left(E_x\frac{\partial f}{\partial p_x} + E_y\frac{\partial f}{\partial p_y} + E_z\frac{\partial f}{\partial p_z}\right),\end{aligned} \tag{12}$$

$$\lambda H_x = ikcE_y, \quad \lambda H_y = -ikcE_x. \tag{13}$$

В полученных формулах можно теперь проделать второе дифференцирование по времени (эквивалентное умножению на λ) и раскрыть первые производные в правых частях. Для наших целей достаточно найти уравнения, связывающие напряженность электрического поля и четную часть возмущения плотности, после чего исключаем δf^+ (магнитное поле при этом исключается и уравнения для него не нужны). Получается система трех алгебраических уравнений для неизвестных E_x, E_y, E_z, которую можно записать сокращенно как $A\mathbf{E} = 0$. Элементы матрицы A имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
a_{xx} &= \lambda^2 + k^2c^2 - \\ &- 4\pi e\int\left(v_x\frac{\partial f}{\partial p_x} - \frac{k^2v_x^2v_z}{\lambda^2+k^2v_z^2}\,\frac{\partial f}{\partial p_z}\right)d\mathbf{p},\\
a_{xy} &= -4\pi e\int\left(v_x\frac{\partial f}{\partial p_y} - \frac{k^2v_xv_yv_z}{\lambda^2+k^2v_z^2}\,\frac{\partial f}{\partial p_z}\right)d\mathbf{p},\\
a_{xz} &= -4\pi e\lambda^2\int\frac{v_x}{\lambda^2+k^2v_z^2}\,\frac{\partial f}{\partial p_z}\,d\mathbf{p},\\
a_{yx} &= -4\pi e\int\left(v_y\frac{\partial f}{\partial p_x} - \frac{k^2v_xv_yv_z}{\lambda^2+k^2v_z^2}\,\frac{\partial f}{\partial p_z}\right)d\mathbf{p},\\
a_{yy} &= \lambda^2 + k^2c^2 - 4\pi e\int\left(v_y\frac{\partial f}{\partial p_y} - \right.\\ &\left.- \frac{k^2v_y^2v_z}{\lambda^2+k^2v_z^2}\,\frac{\partial f}{\partial p_z}\right)d\mathbf{p},\\
a_{yz} &= -4\pi e\lambda^2\int\frac{v_y}{\lambda^2+k^2v_z^2}\,\frac{\partial f}{\partial p_z}\,d\mathbf{p},\\
a_{zx} &= -4\pi e\int\left(v_z\frac{\partial f}{\partial p_x} - \frac{k^2v_x{v_z}^2}{\lambda^2+k^2v_z^2}\,\frac{\partial f}{\partial p_z}\right)d\mathbf{p},\\
a_{zy} &= -4\pi e\int\left(v_z\frac{\partial f}{\partial p_y} - \frac{k^2v_y{v_z}^2}{\lambda^2+k^2v_z^2}\,\frac{\partial f}{\partial p_z}\right)d\mathbf{p},\\
a_{zz} &= \lambda^2 - 4\pi e\lambda^2\int\frac{v_z}{\lambda^2+k^2v_z^2}\,\frac{\partial f}{\partial p_z}\,d\mathbf{p}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Далее ищем экспоненциально нарастающую неустойчивость, т. е. ограничиваемся вещественными положительными значениями λ. Важно заметить, что матрица A при этом будет не только вещественной, но и симметричной. Для доказательства сначала интегрированием по частям проверяем тождество:

$$\int v_x\frac{\partial f}{\partial p_y}\,d\mathbf{p} = \int\frac{p_x\dfrac{\partial f}{\partial p_y}}{\sqrt{m^2+\dfrac{p^2}{c^2}}}\,d\mathbf{p} = \\ = \int\frac{p_xp_yf}{c^2\left(m^2+\dfrac{p^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,d\mathbf{p} = \int v_y\frac{\partial f}{\partial p_x}\,d\mathbf{p},$$

и то же самое для других пар координат и импульсов. Кроме того, для доказательства $a_{xz} = a_{zx}$, $a_{yz} = a_{zy}$ используется элементарное сложение дробей.

4. ВЫВОД НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Дальнейшее рассуждение основано на известном факте, что все собственные значения симметричной матрицы вещественны [8]. При больших λ они в нашем случае, как докажем ниже, положительны. Поэтому, если мы сможем доказать отрицательность хотя бы одного из собственных значений при малых λ, то, с точки зрения непрерывности, это будет означать его обращение в нуль при каком-то положительном λ, и для этого λ система уравнений (14) будет иметь нетривиальное решение, свидетельствующее о неустойчивости с данным конкретным λ.

Здесь мы используем длинноволновое приближение. Формально устремляем λ и k к нулю, предполагая их пропорциональными друг другу. Подобный прием встречается в работе [4], но там выкладки не завершены, фактически дело опять-таки ограничивается наложением двух потоков или эллипсоидальностью распределения скоростей (нерелятивистских). При указанном выше переходе интегральные члены в выражении элементов a_{ij} остаются неизменными, тогда как добавки $\lambda^2+k^2c^2$ или λ^2 в диагональных элементах исчезают. Неустойчивость, доказанная в таком длинноволновом приближении, будет распространяться и на близкие к нулю k и λ с некоторой небольшой поправкой в дисперсионном уравнении.

Соответствующие «усеченные» элементы будем обозначать как b_{ij} матрицы B. При больших λ (точнее, при $\lambda/k \to \infty$) они стремятся к конечным пределам:

$$b_{ij} = -4\pi e \int v_i \frac{\partial f}{\partial p_j}\, d\mathbf{p}.$$

По прежнему образцу применяем интегрирование по частям, чтобы избавиться от производных. Тогда при произвольном выборе вещественного вектора $\mathbf{L}$ получается тождество

$$\mathbf{L}B\mathbf{L} = 4\pi e \int \left[\frac{(\mathbf{p}\times\mathbf{L})^2}{c^2} + m^2 L^2\right] d\mathbf{p}.$$

Очевидная положительная определенность этой квадратичной формы свидетельствует, что положительны все собственные значения B при больших λ, что и требовалось доказать.

Обратимся теперь к асимптотике противоположного случая, когда $\lambda \to 0$. Именно,

$$\begin{aligned}
b_{xx} &\approx -4\pi e \mathbf{P}\int \left(v_x \frac{\partial f}{\partial p_x} - \frac{v_x^2}{v_z}\frac{\partial f}{\partial p_z}\right) d\mathbf{p},\\
b_{yy} &\approx -4\pi e \mathbf{P}\int \left(v_y \frac{\partial f}{\partial p_y} - \frac{v_y^2}{v_z}\frac{\partial f}{\partial p_z}\right) d\mathbf{p},\\
b_{zz} &\approx -4\pi e \frac{\lambda^2}{k^2}\mathbf{P}\int \frac{1}{v_z}\frac{\partial f}{\partial p_z}\, d\mathbf{p},\\
b_{xy} &\approx -4\pi e \mathbf{P}\int \left(v_x \frac{\partial f}{\partial p_y} - \frac{v_x v_y}{v_z}\frac{\partial f}{\partial p_z}\right) d\mathbf{p},\\
b_{xz} &\approx -4\pi e\lambda \int \frac{\lambda}{\lambda^2 + k^2 v_z^2} v_x \frac{\partial f}{\partial p_z}\, d\mathbf{p} =\\
&= -4\pi e \lambda \frac{\pi}{k}\int v_x \delta(v_z)\frac{\partial f}{\partial p_z}\, d\mathbf{p},\\
b_{yz} &\approx -4\pi e \lambda \frac{\pi}{k}\int v_y \delta(v_z)\frac{\partial f}{\partial p_z}\, d\mathbf{p}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Символ $\mathbf{P}$ перед интегралом означает взятие главного значения в смысле Коши при интегрировании по p_z, а в выражениях b_{xz}, b_{yz} использовано известное представление функции Дирака:

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} = \pi\delta(x).$$

Если матрица B положительно определена, то положительны ее диагональные элементы и сумма:

$$b_{xx} + b_{yy} = 4\pi e \mathbf{P}\int \left[-\mathbf{v}\cdot \operatorname{grad} f + \frac{v^2}{v_z}\frac{\partial f}{\partial p_z}\right] d\mathbf{p}. \tag{16}$$

Напомним, что ось z может быть направлена произвольно: это зависит от ориентации волнового вектора. Легко видеть, что изменение его ориентации эквивалентно соответствующему повороту распределения f. Усредним соотношение (16) по всем таким произвольным ориентациям. Искомым средним от (16) является при симметричной функции $f = \Phi(p)$ выражение

$$\begin{aligned}
&\langle b_{xx} + b_{yy}\rangle =\\
&= \int [M(p)]^{-1}\left[-p\Phi'(p) + \frac{p^2}{p_z}\frac{p_z}{p}\Phi'(p)\right] d\mathbf{p} = 0.
\end{aligned}$$

За исключением случая тождественного выполнения $b_{xx} + b_{yy} = 0$ при всех ориентациях равенство нулю среднего от этого следа означает, что при некоторой ориентации он будет отрицательным, а это несовместимо с положительной определенностью матрицы. Тогда система будет неустойчивой. В то же время при постоянно нулевом следе определитель

$$\Delta = b_{xx}b_{yy} - b_{xy}b_{yx} = -b_{xx}^2 - b_{xy}^2 \le 0.$$

Опять-таки отрицательное значение определителя Δ несовместимо с положительной определенностью матрицы, так что устойчивость возможна лишь при одновременном выполнении равенств

$$b_{xx} = b_{yy} = b_{xy} = 0 \tag{17}$$

при всех ориентациях. Остается рассмотреть полную совокупность собственных значений всей матрицы, для чего составляем вековое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\mu & 0 & b_{xz}\\ 0 & -\mu & b_{yz}\\ b_{xz} & b_{yz} & b_{zz}-\mu \end{vmatrix} = 0$$

или

$$-\mu^3 + b_{zz}\mu^2 + (b_{xz}^2 + b_{yz}^2)\mu = 0.$$

Снова отрицательность значений μ влечет за собой неустойчивость, кроме случая одновременного выполнения равенств

$$b_{xz} = b_{yz} = 0 \tag{18}$$

при всех ориентациях. Заметим, что в типичных ситуациях $b_{zz} > 0$. Действительно, например, при сферической симметрии с $\Phi'(p) < 0$ имеем

$$b_{zz} = -\frac{1}{3}\int\limits_0^\infty p^3 \sqrt{m^2 + \frac{p^2}{c^2}}\,\Phi'(p)\,dp > 0.$$

Следовательно, как правило, при выполнении равенств (17) и (18) остается собственное значение $\mu = b_{zz} > 0$, не нарушающее положительной определенности матрицы B.

Точно так же, как правило, положительная определенность не нарушается при учете следующих членов разложения по λ.

Полученные необходимые условия устойчивости (17) и (18) можно представить в несколько другом виде посредством фурье-преобразования

$$f = M(p) \iiint s(\alpha,\beta,\gamma) \exp\left\{i(\alpha p_x + \beta p_y + \gamma p_z)\right\} \times \\ \times d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Как легко видеть, свойство четности f переносится на новую функцию s, т. е. $s(-\alpha,-\beta,-\gamma) = s(\alpha,\beta,\gamma)$ и значения s вещественны.

В терминах этой новой функции после стандартных преобразований получаем необходимые условия устойчивости в виде

$$\int\limits_0^\infty (s - \langle s\rangle)\, d\nu = 0, \tag{19}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{s - \langle s\rangle}{\nu}\, d\nu = 0, \tag{20}$$

где ν — одна из сферических координат в пространстве параметров α,β,γ, именно,

$$\nu = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Сингулярность в выражении (20) кажущаяся, так как разложение $s - \langle s\rangle$ по степеням ν начинается по крайней мере с членов первой степени. Полученные условия (19), (20) ценой небольших усложнений нетрудно обратно выразить через исходную функцию f. Тогда они приобретают вид

$$\begin{aligned} &\int \frac{f - \langle f\rangle}{M}\, \delta(\alpha_1 p_x + \beta_1 p_y + \gamma_1 p_z)\, d\mathbf{p} = 0, \\ &\int \frac{f - \langle f\rangle}{M}\, \ln|\alpha_1 p_x + \beta_1 p_y + \gamma_1 p_z|\, d\mathbf{p} = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

где направляющие косинусы

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\nu}, \quad \beta_1 = \frac{\beta}{\nu}, \quad \gamma_1 = \frac{\gamma}{\nu}, \quad \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = 1.$$

Таковы необходимые условия устойчивости однородной релятивистской плазмы, в которой распределение электронов по скоростям обладает центром симметрии. Напомним, что при выводе этих условий подразумевалось длинноволновое приближение и что при этом роль векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ одинаково существенна, т. е. речь идет об электромагнитной неустойчивости. Достаточные условия мы не выводим. Ориентировочно можно рассчитывать, что если неустойчивость и появляется при выполнении (21), то это происходит за счет достаточно сложной структуры распределения скоростей, интерпретируемой как наложение различных слабо перекрывающихся между собой пучков [4, 9, 10].

5. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ ПРИЗНАКОВ

Условия (21), вообще говоря, не выполняются для произвольно заданного анизотропного распределения $f(p_x,p_y,p_z)$, в том числе и эллипсоидального [5, 10]. Однако легко построить примеры их выполнения. Именно, возьмем, в частности,

$$f - \langle f\rangle = p_z^2 M(p) \sum_\kappa \sigma_\kappa \exp(-\chi_\kappa p^2)$$

с произвольным положительным χ_κ и подлежащими подбору коэффициентами σ_κ.

Кроме поворотов системы координат при раскрытии левых частей (21) используем известные определенные интегралы

$$\int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-qx} \ln x\, dx = \frac{1}{q^p}\Gamma(p)\left(\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} - \ln q\right),$$

$$p > 0, \quad q > 0$$

(см., например, [11], формула 3.723).

В данном случае указанные левые части оказываются линейными суперпозициями конечного числа выражений, не содержащих $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$, и наши необходимые условия устойчивости соответственно приобретают вид

$$\sum_\kappa \frac{\sigma_\kappa}{\chi_\kappa^{5/2}} = \sum_\kappa \frac{\sigma_\kappa}{\chi_\kappa^{5/2}} \ln\chi_\kappa = \sum_\kappa \frac{\sigma_\kappa}{{\chi_\kappa}^2} = 0,$$

причем они всегда выполняются, если число используемых в суммах значений κ больше трех. Для завершения построения примера остается подобрать сферически-симметричную функцию

$$\langle f\rangle = C\exp(-\chi_0 p^2)$$

при $\chi_0 < \min\chi_\kappa$ и величине C достаточно большой для компенсации вкладов членов с отрицательными σ_κ. Разумеется, сходным образом можно построить и много других примеров анизотропных распределений, устойчивых по крайней мере в длинноволновом приближении.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Электромагнитная неустойчивость представляет интерес для теоретического исследования как лабораторной плазмы, так и межзвездной среды. До сих пор в таких исследованиях использовались частные примеры, и выведенные нами общие необходимые условия устойчивости оказываются несколько неожиданными в том смысле, что они формально выражаются равенствами, не особенно ограничивающими свободу выбора распределения f. Отметим, что эти равенства записаны не в терминах гидродинамических характеристик (моментов), как можно было бы ожидать, а несколько иначе, хотя все равно через интегральные характеристики. Привычная модель эллипсоидального распределения попадает в разряд неустойчивых, но это не означает неустойчивости анизотропных распределений вообще. В будущих исследованиях можно, вероятно, подобрать более реалистическую модель такого рода, чем данная в предыдущем разделе.

Напротив, учет релятивизма не вносит существенных изменений в сравнении со случаем малых скоростей и сводится только к появлению в окончательных формулах множителя $M(p)$.

По аналогии с результатами, известными в теории плазмы [4, 5, 7], можно догадываться, что учет движения ионов (а не только электронов) не внесет в данном случае существенных изменений.

Для приблизительных численных оценок достаточно сослаться на пример двух потоков [1, 12]. Как подтверждают и рассуждения в данной статье, используемая асимптотика длинных волн применима при

$$k \ll \frac{\omega_p}{c}, \tag{22}$$

где ленгмюровская частота

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{m}} \tag{23}$$

выражается через пространственную плотность n. Например, при характерных для межзвездной среды значениях $n = 0.1\,\text{см}^{-3}$ [13] получаем критическую длину согласно формуле (22): $l \sim 2\pi/k \sim 100\,\text{км}$, так что любые характерные длины в условиях межзвездного пространства заведомо много больше l и используемое нами приближение применимо. Инкремент же согласно (23) имеет порядок времени пересечения волны типичной частицей, т. е. неустойчивость развивается в определенных астрофизических ситуациях, например на длинах 10^{-4} пк и менее, достаточно быстро (за время порядка полмесяца). Для некоторых объектов, например, планетарных туманностей, значение n может быть на 4–5 порядков выше указанного, но тогда согласно (22) и (23) критическое значение l будет в сотни раз меньше, и все равно длина волны в этом случае чрезвычайно мала в сравнении с размерами системы.

Для плазмы в термоядерных магнитных ловушках можно взять $T \approx 3\cdot 10^7$ град и $n = 10^{20}\,\text{см}^{-3}$, тогда те же формулы дают $\omega_p \approx 5.7\cdot 10^{14}\,\text{с}^{-1}, l \approx$ $\approx 3\cdot 10^{-4}\,\text{см}$ и время развития возмущения $\tau \approx$ $\approx 0.25\cdot 10^{-13}$ с. Эти величины важны в современной технике ядерного синтеза.

Интересно было бы обобщить полученные результаты на случаи произвольных несимметричных распределений и на случай наличия внешнего магнитного поля.

Автор искренне признателен В. А. Антонову за интерес и внимание к работе и важные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. S. Weibel, Phys. Rev. Lett. **2**, 83 (1959).
2. H. Saleem, K. Watanabe, and Y. Sato, Phys. Rev. E **62**, 1155 (2000).
3. V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus, and C. E. Capjack, Письма в ЖЭТФ **78**, 150 (2003).
4. Р. Дэвидсон, *Кинетическая теория волн и неустойчивостей в однородной плазме. Основы физики плазмы*, под ред. А. А. Галеева, Р. Судана, Энергоатомиздат, Москва (1983), т. 1.
5. А. И. Ахиезер, *Электродинамика плазмы*, Наука, Москва (1974).
6. А. А. Власов, ЖЭТФ **8**, 291 (1938).
7. А. Б. Михайловский, *Электромагнитные неустойчивости максвелловской плазмы. Вопросы теории плазмы*, Вып. 6, Атомиздат, Москва (1972).
8. Р. Беллман, *Введение в теорию матриц*, Наука, Москва (1969).
9. S. Heinz and R. Sunyaev, Astron. and Astrophys. **390**, 751 (2002).
10. А. С. Баранов, Физика плазмы **29**, 956 (2003).
11. Н. М. Рыжик, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Гостехиздат, Москва–Ленинград (1951).
12. А. С. Баранов, ЖТФ **75**, 65 (2005).
13. Д. Я. Мартынов, *Курс общей астрофизики*, Наука, Москва (1979).