ЖЭТФ, 2005, том 128, вып. 4 (10), стр. 752–759

АНАЛИЗ МЕЛКОМАСШТАБНЫХ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР КОЛЬЦА А САТУРНА ПО ДАННЫМ МЕЖПЛАНЕТНОГО АППАРАТА «КАССИНИ»

Е. Б. Постников[a], *А. Ю. Лоскутов*[b*]

[a] *Курский государственный университет*
305000, Курск, Россия

[b] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*
119992, Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 апреля 2005 г.

Описаны результаты анализа изображений, полученных в течение второй половины 2004 г. межпланетным модулем «Кассини». Метод исследования основан на оригинальном алгоритме непрерывного вейвлет-преобразования с комплексным вейвлетом Морле, сводящем интегральное преобразование к решению задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных. Показано, что метод является достаточно эффективным средством для анализа текущей переменной периодичности пространственной неоднородности частиц в радиальной структуре колец Сатурна.

PACS: 96.30.Wr, 05.45.-a

1. ВВЕДЕНИЕ

Структура планетных колец вообще, и кольца Сатурна в частности, вызывает постоянный научный интерес к их исследованию как динамической системы многих частиц (обзор состояния проблемы на 2002 г. и библиографию см., например, в [1]). Одной из характерных особенностей главных колец Сатурна (A, B, C) является их мелкомасштабная структура, обнаруженная «Вояджерами». Первичный ее анализ (см. [2–4]) привел к модели образования тонких спиральных волн вследствие резонансного механизма взаимодействия частиц кольца со спутниками Сатурна.

Позже обобщение полученных «Вояджерами» результатов по кольцу A посредством оконного преобразования Фурье было выполнено в работе [5]. Проведенный анализ позволил выявить и идентифицировать наличие около 40 резонансных структур, отождествленных с влиянием различных спутников Сатурна. В то же время в указанной статье отмечен ряд резонансных областей, в которых достигнутая степень разрешения и возможности алгоритма обработки не позволили детектировать особенности распределения вещества кольца.

За последний год в этой области открылись новые возможности для исследований благодаря данным, полученным космическим аппаратом «Кассини», в том числе фотографиям высокого разрешения (см. первичный отчет исследовательской группы проекта [6]). Для их обработки может быть использован такой активно разрабатываемый в последние два десятилетия метод анализа как вейвлет-преобразование. Важным его преимуществом перед другими подходами (см., например, [7]) является высокая степень локализации базисных функций как в пространственной, так и в частотной областях. Это позволяет эффективно проводить изучение нестационарных сигналов на основе понятия текущей частоты (или периода). Наличие взаимосвязи величины окна и текущего периода (для высокочастотных сигналов окно сжимается, а для низкочастотных расширяется, что приводит к сохранению эффективного числа колебаний базисной синусоиды в окне) выгодно отличает вейвлет-преобразование от оконного преобразования Фурье.

В приложении к небесной механике методы вейвлет-анализа показали свою эффективность при об-

*E-mail: loskutov@chaos.phys.msu.ru

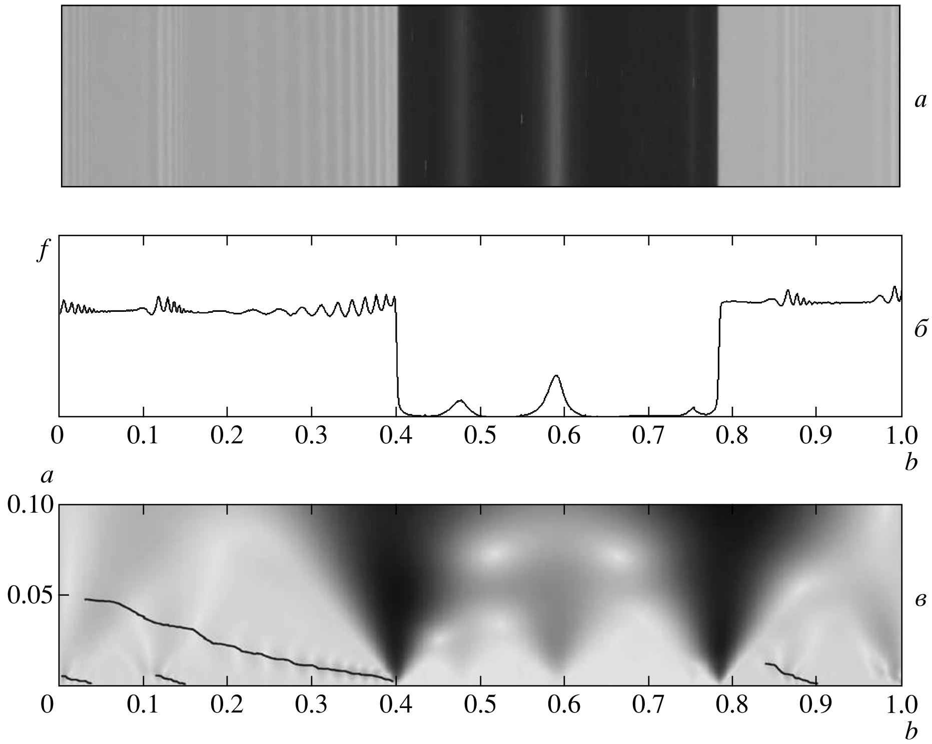

Рис. 1. Щель Энке. Начало отсчета практически совпадает с положением резонанса 11 : 10 с Пандорой. Следующая волнообразная структура генерируется резонансом 15 : 14 с Прометеем. Первый цуг волн после щели порождается резонансом 12 : 11 с Пандорой

работке функций-решений, генерируемых гамильтоновыми системами, в частности, в задаче трех тел [8] и в изучении вариаций периодов обращения астероидов в околорезонансных областях [9]. В приложении к системе Сатурна вейвлет-преобразование было предложено использовать для изучения строения щели Энке на основании данных «Вояджера-2» [10]. Так как основная задача, решаемая авторами цитируемой работы, состояла в выделении структур разного масштаба в зашумленном изображении, использовались только действительные вейвлеты. Вопрос же о характере локальной периодичности в структуре колец Сатурна требует применения преобразования с комплексным вейвлетом. Возможная эффективность такого подхода к этой задаче была показана на частных примерах в работах [6, 11].

Главной целью данной статьи является изучение мелкомасштабной структуры кольца А Сатурна в соответствии с новым подходом к вычислению комплексного интегрального преобразования с вейвлетом Морле, основанным на представлении вейвлет-образа как решения системы дифференциальных уравнений с частными производными.

2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Для решения задачи о выделении в сигнале текущего периода наиболее приспособлено комплексное непрерывное вейвлет-преобразование

$$w(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dt}{a} \qquad (1)$$

(звездочкой обозначено комплексное сопряжение) в амплитудной нормировке

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right| \frac{dt}{a} = \text{const.} \qquad (2)$$

с базисом Морле. В точной форме, удовлетворяющей условию допустимости

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, d\xi = 0,$$

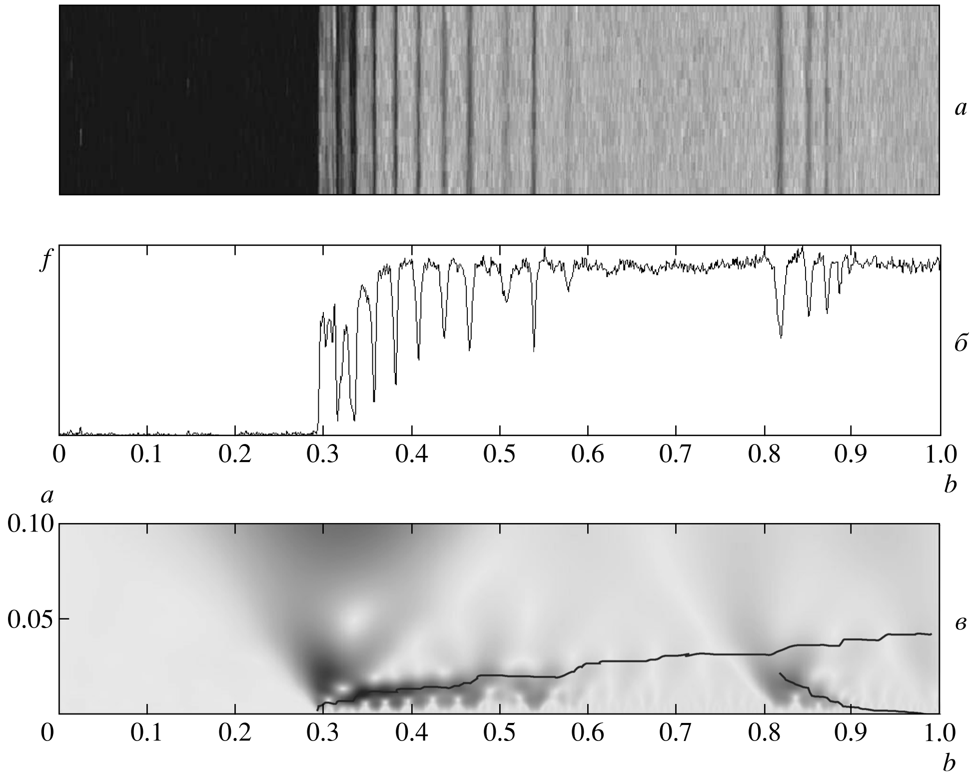

Рис. 2. Дальний от Сатурна край щели Энке

он имеет вид

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \\ \times \left[\exp(-i\omega_0\xi) - \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2}\right)\right] \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right). \quad (3)$$

Соответствующий вейвлет-образ $w(a,b)$ играет роль локального спектрального распределения по периодам a гармоник, составляющих сигнал, в окрестности точки b.

Однако в большинстве практических приложений в соотношении (3) пренебрегают вторым слагаемым при условии достаточно большой базисной частоты (как правило, $\omega_0 \geq 5$) и используют упрощенное определение:

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-i\omega_0\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right). \quad (4)$$

Оно соответствует нормировке (2) с const $= \exp(\omega_0^2/2)$. Одним из существенных преимуществ такого приближения является простая связь текущего периода вейвлет-образа и периода гармонического колебания с частотой ω. Иными словами, двумерный график распределения модуля вейвлет-образа комплексной монохроматической функции имеет линию максимума, соответствующую периоду $a = \pm\omega_0/\omega$. Множитель, являющийся гауссовой функцией, осуществляет сглаживание, автоматически подавляющее шум сигнала. Соотношение остается применимым и в случае действительной функции.

Вариация базисной частоты позволяет менять степень разрешения по частоте: чем выше ω_0, тем больше колебаний совершает базисная вейвлетная функция на характерной ширине окна и тем ближе модуль вейвлет-образа к локальному сглаженному фурье-спектру. При малых ω_0 он выявляет наличие индивидуального всплеска.

Следует отметить, что стандартный метод вычисления непрерывного вейвлет-преобразования, связанный с промежуточным переходом в частотную область и применением алгоритма быстрого преобразования Фурье, несмотря на такие преимущества, как простота алгоритма и высокая скорость расчетов, имеет ряд недостатков. Они следуют из особенностей быстрого преобразования Фурье: исходные данные должны быть представлены выборкой 2^N равноотстоящих узлов. Отклоне-

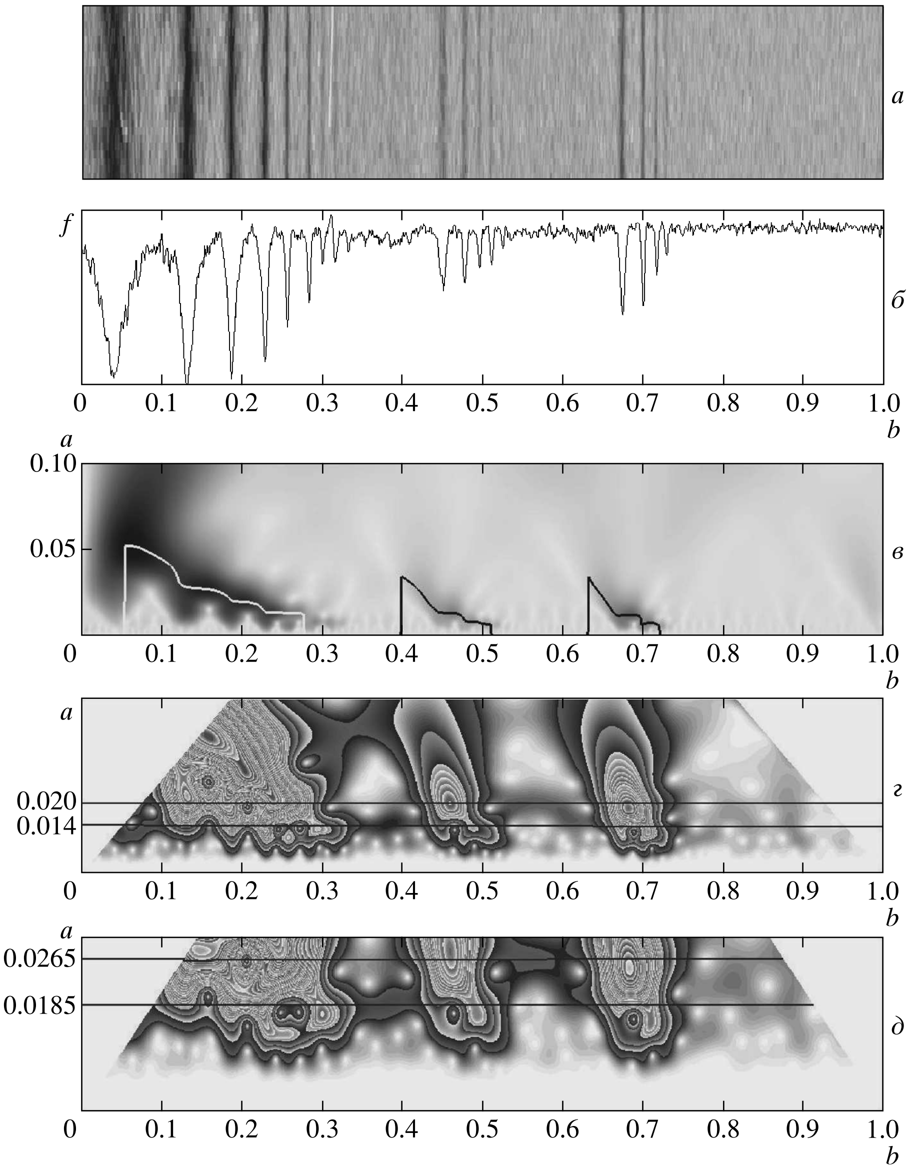

Рис. 3. Внешняя часть кольца А, содержащая резонансы $4:3$ с Янусом, $6:5$ с Пандорой и $7:6$ с Прометеем

ния от этого условия приводят к существенному усложнению расчетов и/или потере точности.

Поэтому в данной работе вводится альтернативный алгоритм, основанный на наблюдении, что образ, полученный сверткой с вейвлетом Морле, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(a\frac{\partial^2}{\partial b^2} - \frac{\partial}{\partial a} - i\omega_0\frac{\partial}{\partial b}\right) w(a,b) = 0. \tag{5}$$

Оно было получено в работе [12], однако использовалось только для демонстрации локальных свойств априори известного вейвлет-образа.

Представим результат вейвлет-преобразования в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$w(a,b) = u(a,b) + iv(a,b),$$

относительно которых уравнение (5) может быть записано в виде системы

$$\frac{\partial u}{\partial a} = a\frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \omega_0\frac{\partial v}{\partial b}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial a} = a\frac{\partial^2 v}{\partial b^2} - \omega_0\frac{\partial u}{\partial b}. \tag{7}$$

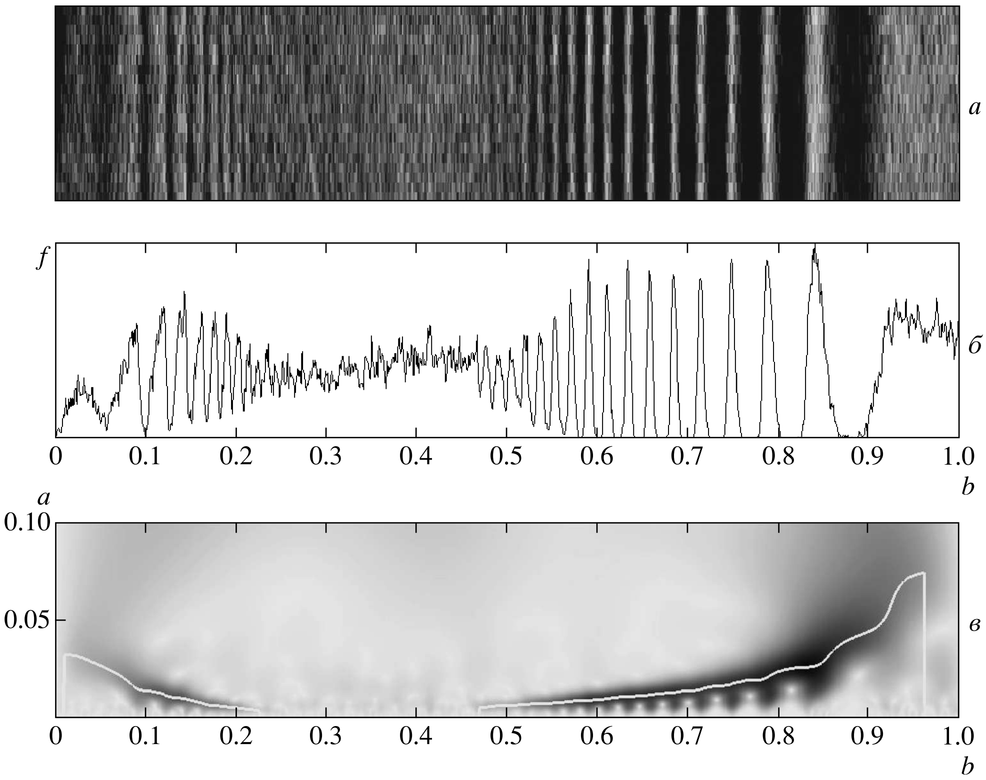

Рис. 4. Волны плотности, порождаемые резонансами 12 : 11 с Прометеем и 5 : 3 с Мимасом

Для нахождения соответствующих начальных условий запишем интегральное преобразование (1) с ядром вида (4) как

$$w(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-b}{a} - i\omega_0\right)^2\right]}{\sqrt{2\pi a^2}}\, dt.$$

Известно, что этот интеграл не зависит от мнимого вычитаемого в показателе степени и ядро преобразования в пределе $a \to 0$ является дельта-функцией. Следовательно, $w(0,b) = f(b)$. Из последнего равенства следуют начальные условия для системы дифференциальных уравнений (6), (7):

$$u(0,b) = \mathrm{Re}(f(b)),$$
$$v(0,b) = \mathrm{Im}(f(b)).$$

Необходимый для анализа модуль вейвлет-образа легко вычисляется:

$$|w(a,b)| = \sqrt{u^2(a,b) + v^2(a,b)}.$$

3. РЕЗУЛЬТАТ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ УЧАСТКОВ КОЛЬЦА A

Используем полученный алгоритм для анализа радиального распределения плотности вещества в центре кольца A Сатурна на основе фотографических данных, полученных аппаратом «Кассини» (июль 2004 г.). Для рассмотрения мы выбрали изображения из собрания NASA/JPL/Space Science Institute. Из каждого снимка в радиальном направлении выделялась узкая полоса: PIA06099 (1022×20 пикселей, рис. 1*a*), PIA06094 (891×23 пикселей, рис. 2*a*), PIA06095 (902×23 пикселей, рис. 3*a*) и PIA06093 (855×20 пикселей, рис. 4*a*). Легко убедиться, что в пределах каждой выборки искривлением структур, составляющих кольцо, можно пренебречь. Для наглядности все изображения существенно растянуты в поперечном направлении.

Мы использовали пару начальных условий $u(0,b) = f(b)$ и $v(0,b) = 0$, где функция $f(b)$ получается усреднением по выборке (рис. 1*б*–4*б*). В силу конечной длины сигнала задачу Коши для уравнений (6), (7) необходимо заменить граничной задачей. Мы использовали граничные условия первого рода: соответственно, исходное значение сигнала в этих точках и нуль для действительной и мнимой составляющих вейвлет-образа.

В качестве базисной частоты необходимо выбрать достаточно большие и удобные для интерпретации результатов величины. Этим условиям удовлетворяют значения $\omega_0 = \pi$ (рис. 1*в*–4*в*), $\omega_0 = 1.5\pi$ (рис. 3*г*, 5*б*), $\omega_0 = 2\pi$ (рис. 3*в*, 5*в*) в безразмерных единицах длины выборки. При последних двух значениях базисной частоты на графиках удалены области, искаженные влиянием краевого эффекта. Количественным критерием этого на плоскости (b, a) является условие

$$\exp\left(-\frac{(b-b_0)^2}{2a^2}\right) \geq 10^{-5},$$

где $b_0 = 0$ или $b_0 = 1$.

Обрабатываемое изображение (рис. 1*а*) представляет собой окрестность щели Энке. Характерной чертой, не выявляемой оконным преобразованием Фурье, является возможность проследить распределение текущего пространственного периода волновой структуры края щели Энке. На графике модуля вейвлет-образа (рис. 1*в*) черным выделены линии максимумов. Можно отметить, что крупномасштабное развитие спиральной волны, сопровождающееся увеличением значения ее текущего периода, допускает непрерывный переход в линию максимума, соответствующую крупномасштабным всплескам. Характерный размер на таких масштабах, как следует из рис. 1*в*, имеет порядок протяженности цуга резонансных волн, порождаемых резонансами 11:10 со спутником Пандора и 15:14 со спутником Прометей. При этом имеет место четкое перекрытие линии максимумов различных резонансов (рис. 1*в*). Похожая структура (однако без подробного анализа) была выявлена также в недавней работе [6]. Однако в нашем подходе, позволяющем использовать относительно малые значения ω_0, возможно сохранение единственной линии максимума. Аналогичный эффект пересечения линий максимума текущего периода мелкомасштабной и крупномасштабной (формируемой Паном) резонансных волновых структур обнаружен нами и на внешней части щели Энке (рис. 2).

Другой тип неоднородности, который позволяет выделить предлагаемый метод вейвлет-анализа, состоит в наличии мелкомасштабной периодичности в межрезонансных промежутках. Такое исследование возможно благодаря высокому разрешению (до 270 м/пиксел) снимков, полученных «Кассини», и описанному выше алгоритму, который допускает (в силу особенностей численного решения дифференциальных уравнений) малый шаг по масштабной переменной.

Для детального анализа мелкомасштабной структуры в межрезонансной области рассмотрим волны плотности, формируемые резонансами Януса, Пандоры и Прометея. Характерный лестничный вид их текущего пространственного периода показан на рис. 3*в*. В целях большего пространственного разрешения увеличим базисную частоту до значения $\omega_0 = 1.5\pi$ (рис. 3*г*) и $\omega_0 = 2\pi$ (рис. 3*д*). Чтобы увеличить чувствительность к модулю малой амплитуды, будем использовать различные оттенки серого цвета для бо́льших значений. Этот прием приводит к размытию резонансных линий, позволяя выделить линиями яркости почти стабильно периодический сигнал на отрезке $[0.35, 0.45]$, соединяющий первые два резонансных цуга волн. На отрезке $[0.52, 0.67]$ между вторым и третьим резонансами также детектируется коротковолновый сигнал. Однако он имеет неустойчивую пространственную частоту, изменяющуюся в пределах 75π–107π (в единицах длины выборки). Вторая частота совпадает с частотой волны между резонансами Януса (4:3) и Пандоры (6:5). Его уточнение, выполненное с использованием базисной частоты $\omega_0 = 2\pi$, дает значение $108(\pm 1)\pi$ и подтверждает стабильность монохроматичности.

Спиральные волны на рис. 4, порождаемые резонансами Прометея (12:11) и Мимаса (5:3), являются одними из самых четких в структуре колец Сатурна. По этой причине они подвергались подробному изучению и моделированию по данным «Вояджера» (см. ранние работы [2–4], а также [5]). Исследуем, используя недавнюю фотографию, полученную «Кассини», межрезонансную область вейвлет-методом. Анализируя образы, полученные преобразованием с бо́льшим частотным разрешением (рис. 5*б, в*), можно отметить, что стабильная периодичность в этой области отсутствует. Однако легко видеть существование неустойчивого сигнала с пространственной частотой 125π (см. рис. 5*в*, где линии максимумов выделены белым цветом). Фактически он близок к наибольшему значению частоты резонансных цугов. Кроме того, выявляется короткая область более интенсивной периодичности с частотой 67π, занимающая отрезок $[0.30, 0.41]$ исследуемого сигнала. Рассматривая особенность текущего периода в области $[0.36, 0.38]$, имеющую форму, сходную с резонансной наклонной линией текущего периода, можно предположить, что частота 67π связана с наиболее длинноволновыми резонансными возмущениями.

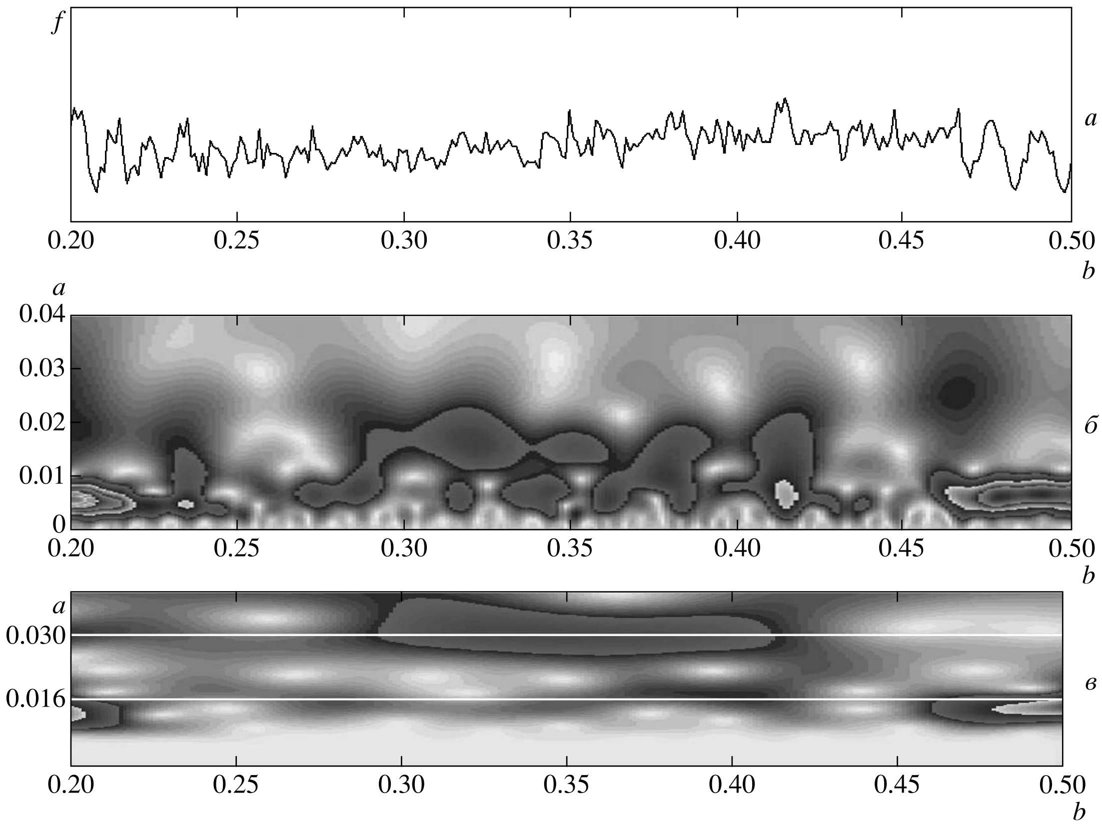

Рис. 5. Область между резонансами 12 : 11 с Прометеем и 5 : 3 с Мимасом

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Таким образом, непрерывное вейвлет-преобразование с комплексным вейвлетом Морле является эффективным инструментом исследования пространственной радиальной структуры колец Сатурна. Оно дает возможность детально проследить эволюцию текущего периода на разных масштабах. Детальное рассмотрение волновых процессов в веществе колец Сатурна должно включать в себя вопрос о взаимодействии длинноволновых участков возмущений с мелкомасштабными цугами волн, порождаемыми резонансным воздействием с другими спутниками, и механизмы образования почти монохроматических волн в областях, соединяющих высокочастотные концы резонансных зон.

Основными результатами, которые позволяет получить вейвлет-анализ изображений высокого разрешения, переданных «Кассини», являются следующие. В районе обеих границ щели Энке присутствуют перекрытия линий текущего периода резонансных волн, порождаемых Паном, и более мелкомасштабных цугов волн, генерируемых другими спутниками. Кроме того, в межрезонансных областях могут присутствовать почти монохроматические волны различной протяженности, вплоть до соединения резонансных цугов.

Следует отметить, что проведенный анализ является предварительным и находится в дальнейшей разработке с учетом коррекции изображений в зависимости от наклона, под которым проводилась съемка, и абсолютных значений расстояний до исследуемой области колец.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. W. Esposito, Rep. Progr. Phys. **65**, 1741 (2002).

2. F. H. Shu, J. N. Cuzzi, and J. J. Lissauer, Icarus **53**, 185 (1983).

3. F. H. Shu, C. Yuan, and J. J. Lissauer, Astrophys. J. **291**, 356 (1985).

4. F. H. Shu, C. Yuan, and J. J. Lissauer, Astrophys. J. **299**, 542 (1985).

5. L. J. Spilker, S. Pilorz, L. A. Lane et al., Icarus **171**, 373 (2004).

6. C. C. Porco et al., Science **307**, 1226 (2005).

7. *The Transforms and Applications Handbook*, ed. by A. Poularikas, IEEE Press, New York (2000).

8. L. V. Vela-Arevalo, *Time-Frequency Analysis Based on Wavelets for Hamiltonian Systems*, PhD thesis, Caltech (2002).

9. T. A. Michtchenko and D. Nesvorný, Astron. Astrophys. **313**, 674 (1996).

10. Ph. Bendjoya, J.-M. Petit, and F. Spahn, Icarus **105**, 385 (1993).

11. E. B. Postnikov and A. Loskutov, http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0502375.

12. M. Haase, in *Paradigms of Complexity*, ed. by M. M. Novak, World Scientific, Singapore (2000), p. 287.