ЖЭТФ, 2005, том 128, вып. 3 (9), стр. 662–668

ТЕРМИЧЕСКИЕ $1/\omega$-ФЛУКТУАЦИИ КВАНТОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Б. А. Векленко *

Институт высоких температур Российской академии наук
127412, Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 ноября 2004 г.

Показано, что при воздействии коррелированного во времени гауссова случайного поля достаточной мощности на коэффициент упругости квантового осциллятора в последнем возникают термические флуктуации со спектром $1/\omega$. Также показано, что в любой физической системе, описываемой уравнением ангармонического осциллятора, при температуре выше критической возникают флуктуации со спектром $1/\omega$.

PACS: 05.40.Ca, 72.70.+m, 73.50.Td, 85.40.Qx

Так называемый $1/\omega$-шум, или фликкер-шум, представляет собой достаточно распространенное явление [1, 2]. В электрических цепях он был обнаружен в 1925 г. [3], но до сих пор его физическая природа вызывает оживленные дискуссии [4–8]. Бытует мнение, что существует множество микроскопических механизмов его появления [9], но ни один из этих механизмов не является общепризнанным. Наиболее распространенная математическая модель $1/\omega$-шума базируется на суммировании лоренцианов [7, 8]

$$\langle \mathcal{E}^2 \rangle_\omega = \int_0^\infty \frac{g(\tau)\tau\, d\tau}{1+\tau^2\omega^2} \propto \frac{1}{\omega}, \tag{1}$$

что эквивалентно предположению о существовании в системе спектра гауссовых распределений с весовой функцией $g(\tau)$. Левая часть в уравнении (1) представляет собой шумовую электродвижущую силу в электрической цепи. Проблема заключается в том, что нужное асимптотическое поведение весовой функции $g(\tau) \propto \tau^{-1}$ при $\tau \to \infty$ трудно реализуемо [1, 7]. Поэтому вряд ли такая теория способна описать столь распространенное в природе явление.

Известны попытки изучения природы $1/\omega$-шума путем исследования нелинейных дифференциальных уравнений численными методами [10].

*E-mail: VeklenkoBA@yandex.ru

Анализ ряда экспериментов (см., например, [11, 12]) свидетельствует в пользу термической природы $1/\omega$-шума. Ниже указывается одна из причин его возникновения. Именно, показано, что такой шум возникает в квантовом осцилляторе при параметрическом воздействии на него коррелированного во времени случайного поля достаточной мощности. Доказательство не требует каких-либо гипотез. Оно опирается на базисные уравнения динамики и на существование распределения Гиббса. Следствием доказанного утверждения является возникновение $1/\omega$-шума в любом классическом ангармоническом осцилляторе, помещенном в термостат с достаточно высокой температурой.

Рассмотрим квантовый гармонический осциллятор, взаимодействующий с некоторым внешним полем $\hat{\varphi}$, причем вся система находится в состоянии термодинамического равновесия. Уравнение Шредингера примем в виде

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi, \quad \hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}',$$

$$\hat{H}^0 = \hbar\omega_0 \left(\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} + \frac{1}{2}\right), \quad \omega_0^2 = \frac{\kappa}{m},$$

где ω_0 — частота осциллятора, κ и m — некоторые положительные постоянные; операторы рождения $\hat{\alpha}^\dagger$ и уничтожения $\hat{\alpha}$ подчиняются перестановочным соотношениям полей Бозе–Эйнштейна; $\hat{H}'$ — гамильтониан взаимодействия осциллятора с внешним полем $\hat{\varphi}$, $\hat{H}_\varphi$ — гамильтониан свободного внешнего поля.

Пусть временно $\hat{H}'=0$. В представлении Гейзенберга введем оператор координаты

$$\breve{x}(t)=\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\kappa}}\,\left[\hat{\alpha}\exp(-i\omega_0 t)+\hat{\alpha}^\dagger(i\omega_0 t)\right], \qquad (2)$$

такой что

$$\hat{H}^0=\frac{m}{2}\left(\frac{d\breve{x}(t)}{dt}\right)^2+\frac{\kappa}{2}\breve{x}^2(t),$$

$$m\frac{d^2\breve{x}(t)}{dt^2}+\kappa\breve{x}(t)=0.$$

Нам понадобится флуктуационно-диссипационная теорема [13], математический вид которой, как известно, не зависит от конкретного вида гамильтониана взаимодействия. По этой причине явный вид записи этой теоремы удобно получить на примере свободного ($\hat{H}'=0$) поля (2). Рассмотрим коррелятор $\langle\breve{x}(t)\breve{x}(0)\rangle$, где угловые скобки означают усреднение операторов как по квантовым состояниям, так и в статистическом смысле согласно распределению Гиббса.

Непосредственным вычислением легко проверить, что образ фурье-преобразования искомого коррелятора имеет вид

$$\langle\breve{x}\breve{x}\rangle_\omega=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\langle\breve{x}(t)\breve{x}(0)\rangle dt=$$
$$=2\pi\left\{\delta(\omega-\omega_0)N(\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\left[1+N(\omega_0)\right]\right\}\times$$
$$\times\frac{\hbar\omega_0}{2\kappa}, \qquad (3)$$

причем

$$N(\omega)=\langle\hat{\alpha}^\dagger\hat{\alpha}\rangle=\left(\exp\frac{\hbar\omega}{T}-1\right)^{-1},$$

$$1+N(\omega)=-N(-\omega),$$

где T — температура системы. Введем запаздывающую G_r и опережающую G_a функции Грина,

$$G(r,a)(t)=\pm\frac{i}{\hbar}\langle[\breve{x}(t),\breve{x}(0)]\rangle\theta(\pm t). \qquad (4)$$

Через $\theta(t)$ обозначена ступенчатая функция Хевисайда. Прямое вычисление разности образов Фурье позволяет записать

$$\begin{aligned}&\langle\breve{x}\breve{x}\rangle_\omega=-i\hbar\left[1+N(\omega)\right]\left[G_r(\omega)-G_a(\omega)\right],\\&G_r(-\omega)=G_r^*(\omega)=G_a(\omega).\end{aligned} \qquad (5)$$

Вид этого соотношения при функциях Грина $G_{r,a}$, определяемых через коммутаторы (4), не зависит от гамильтониана взаимодействия. Поэтому первое выражение в (5) представляет собой по сути дела тождество, справедливость которого определяется наличием распределения Гиббса и возможностью описания исследуемой системы и ее взаимодействия с окружением с помощью гамильтонова формализма. Если ограничиться областью классических частот $\hbar\omega\ll T$, то

$$\langle\breve{x}\breve{x}\rangle_\omega=-\frac{iT}{\omega}\left[G_r(\omega)-G_a(\omega)\right],$$

$$\langle\breve{x}\breve{x}\rangle_\omega=\langle\breve{x}\breve{x}\rangle_{-\omega}.$$

Дальнейшей целью работы является нахождение в явном виде функций Грина $G_{r,a}$ при наличии гамильтониана взаимодействия $\hat{H}'$.

Пусть полный гамильтониан системы в представлении Шредингера имеет вид

$$\hat{H}_f=\hat{H}^0+\hat{H}'-f(t)\,\hat{x},\quad \hat{H}'=\frac{g}{2}\hat{\varphi}\hat{x}^2+\hat{H}_\varphi,$$

$$\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\kappa}}\,\left(\hat{\alpha}+\hat{\alpha}^\dagger\right),$$

где g — параметр взаимодействия осциллятора с внешним полем $\hat{\varphi}$, $f(t)$ — некоторая регулярная вспомогательная классическая функция, которая в конце расчетов полагается равной нулю. В представлении Гейзенберга имеем

$$m\frac{d^2\breve{x}_f(t)}{dt^2}+\kappa\breve{x}_f(t)+g\breve{\varphi}(t)\breve{x}_f(t)=f(t), \qquad (7)$$

причем $\breve{x}_f(t)=\breve{x}(t)$ при $f=0$. Решение уравнения (7) можно представить в виде

$$\breve{x}_f(t)=\breve{x}(t)+\int\breve{G}_r(t,t_1)f(t_1)\,dt_1, \qquad (8)$$

где операторная функция Грина $\breve{G}_r(t,t')$ удовлетворяет уравнению

$$m\frac{d^2\breve{G}_r(t,t')}{dt^2}+\kappa\breve{G}_r(t,t')+g\breve{\varphi}(t)\breve{G}_r(t,t')=$$
$$=\delta(t-t'). \qquad (9)$$

После усреднения в указанном выше смысле обеих частей решения (8) и сопоставления полученного равенства с формулой Кубо [14] найдем, что

$$\langle\breve{G}_r(t-t')\rangle=G_r(t-t').$$

Этим путем будем рассчитывать функцию G_r, входящую в выражение (6). Усредним теперь уравнение (9) по статистическому ансамблю систем,

$$m\frac{d^2\langle\breve{G}_r(t,t')\rangle}{dt^2}+\kappa\langle\breve{G}_r(t,t')\rangle+g\langle\breve{\varphi}(t)\breve{G}_r(t,t')\rangle = \\ =\delta(t-t'), \quad (10)$$

и найдем с его помощью $\langle\breve{G}_r\rangle$. Для простоты ограничимся случаем классических частот ($\hbar\omega\ll T$), что, впрочем, вполне допустимо при исследовании области $\omega\to 0$. Для решения уравнения (10) введем вспомогательный функционал

$$\breve{S}=\exp\left(-i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(t)\breve{\varphi}(t)\,dt\right),$$

где $\rho(t)$ — некоторая гладкая классическая функция. Умножим уравнение (9) на $\breve{S}$ справа и проведем суммирование по ансамблю систем. Для вспомогательной функции

$$G_r(t,t'|\rho)=\frac{\langle\breve{G}_r(t,t')\breve{S}\rangle}{\langle\breve{S}\rangle}$$

имеем

$$m\frac{d^2G_r(t,t'|\rho)}{dt^2}+\kappa G_r(t,t'|\rho)+ig\frac{\delta G_r(t,t'|\rho)}{\delta\rho(t)}+ \\ +g\frac{\langle\breve{\varphi}(t)\breve{S}\rangle}{\langle\breve{S}\rangle}G_r(t,t'|\rho)=\delta(t-t'). \quad (11)$$

В пределе классических частот на коммутационные соотношения полей можно не обращать внимания. Очевидно, что при $\rho=0$

$$G_r(t,t'|\rho)=\langle\breve{G}(t-t')\rangle.$$

Считая $\delta G_r(t,t'|\rho)/\delta\rho(z)$ неизвестной функцией, получим для нее уравнение, проварьировав выражение (11) по $\rho(z)$:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\frac{\delta G_r(t,t'|\rho)}{\delta\rho(z)}+\kappa\frac{\delta G_r(t,t'|\rho)}{\delta\rho(z)}+ig\frac{\delta^2G_r(t,t'|\rho)}{\delta\rho(t)\delta\rho(z)}+ \\ +g\frac{\langle\breve{\varphi}(t)\rangle}{\langle\breve{S}\rangle}\frac{\delta G_r(t,t'|\rho)}{\delta\rho(z)}+ \\ +g\left[-i\frac{\langle\breve{\varphi}(t)\breve{\varphi}(z)\breve{S}\rangle}{\langle\breve{S}\rangle}+i\frac{\langle\breve{\varphi}(t)\breve{S}\rangle\langle\breve{\varphi}(z)\breve{S}\rangle}{\langle\breve{S}\rangle^2}\right]\times \\ \times G_r(t,t'|\rho)=0. \quad (12)$$

Но теперь возникла неизвестная вторая вариационная производная от $G_r(t,t'|\rho)$. Для нее можно получить свое уравнение, еще раз проварьировав уравнение (12). Таким образом, возникает незамкнутая цепочка уравнений. Чем позднее мы разорвем такую цепочку, тем точнее будет результат. Мы ограничимся двумя уравнениями, (11) и (12). Это значит, что более точные решения, полученные с учетом других опущенных нами уравнений, лишь улучшат полученный результат. Если в уравнении (11) опустить вариационную производную и ограничиться только одним оставшимся уравнением, то получим приближение Хартри – Фока. Наша система двух уравнений достаточна для изучения фазовых переходов. Таким образом, например, удается описать поведение ферромагнетика в районе точки Кюри [15]. При расцеплении уравнений не требуется предположений о наличии малого параметра. К границам применимости полученных результатов ниже мы вернемся еще раз.

С помощью уравнения (11) можно разрешить уравнение (12) следующим образом:

$$\frac{\delta G_r(t,t'|\rho)}{\delta\rho(z)}=ig\int G_r(t,t_1|\rho)\times \\ \times\left[\frac{\langle\breve{\varphi}(t_1)\breve{\varphi}(z)\breve{S}\rangle}{\langle\breve{S}\rangle}-\frac{\langle\breve{\varphi}(t_1)\breve{S}\rangle\langle\breve{\varphi}(z)\breve{S}\rangle}{\langle\breve{S}\rangle^2}\right]\times \\ \times G_r(t_1,t'|\rho)\,dt_1. \quad (13)$$

Если бы уравнение (12) не содержало вариационных производных, то соотношение (13) представляло бы его точное решение. Подстановка (13) в (11) показывает, что одна вариационная производная остается нескомпенсированной. Приближенное равенство (13) представляет собой так называемое однопетлевое приближение. Полагая $\rho=0$ и учитывая, что $\langle\breve{\varphi}(t)\rangle=\langle\breve{x}(t)\rangle=0$, из выражений (11) и (13) получаем замкнутое интегродифференциальное уравнение относительно искомой функции $\langle G_r(t-t')\rangle$, эквивалентное следующему интегральному уравнению:

$$\langle G_r(t-t')\rangle=G_r^0(t-t')+ \\ +\int G_r^0(t-t_1)M_r(t_1-t_2)\langle G_r(t_2-t')\rangle dt_1dt_2, \quad (14) \\ m\frac{d^2G_r^0(t-t')}{dt^2}+\kappa G_r^0(t-t')=\delta(t-t'),$$

причем

$$M_r(t-t')=g^2\langle G_r(t-t')\rangle\langle\breve{\varphi}(t-t')\breve{\varphi}(0)\rangle. \quad (15)$$

Сделаем предположение относительно коррелятора $\langle\breve{\varphi}(t)\breve{\varphi}(t')\rangle$. Пусть с ростом величины $|t-t'|$ этот коррелятор экспоненциально затухает с постоянной γ:

$$\langle\breve{\varphi}(t)\breve{\varphi}(t')\rangle=\langle\breve{\varphi}^2\rangle\exp\left(-\gamma|t-t'|\right), \quad \langle\breve{\varphi}^2\rangle=\langle\breve{\varphi}(0)\breve{\varphi}(0)\rangle.$$

Тогда образ преобразования Фурье,

$$\langle\breve{\varphi}\breve{\varphi}\rangle_\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\omega(t-t')\right]\langle\breve{\varphi}(t)\varphi(t')\rangle d(t-t') = = i\langle\breve{\varphi}^2\rangle\left(\frac{1}{\omega+i\gamma} - \frac{1}{\omega-i\gamma}\right),$$

при малых γ в точке $\omega = 0$ обладает ярко выраженным максимумом, что позволяет после преобразования Фурье придать выражению (15) следующий вид:

$$M_r(\omega) = g^2\int G_r(\omega-\omega')\langle\breve{\varphi}\breve{\varphi}\rangle_{\omega'}\frac{d\omega'}{2\pi} \approx \approx g^2\langle\breve{\varphi}^2\rangle G_r(\omega). \quad (16)$$

Как следует из вывода системы уравнений (14), (15), их справедливость не зависит от статистических свойств исследуемых полей. Из системы уравнений (14), (16) находятся искомые функции

$$\begin{gathered} M_r(0) = \frac{\kappa}{2} - \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} - g^2\langle\breve{\varphi}^2\rangle}, \\ G_r(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m + \kappa - M_r(0)}, \quad \omega \to 0. \end{gathered} \quad (17)$$

Знак перед корнем выбран так, чтобы $M_r(0) \to 0$ при $g \to 0$. При

$$\kappa > \kappa_c = \sqrt{4g^2\langle\breve{\varphi}^2\rangle}$$

оператор $M_r(0)$ вещественен, и, согласно флуктуационно-диссипативный теореме, шум в системе при малых частотах не возникает. В точке $\kappa = \kappa_c$ происходит своего рода «фазовый переход» и оператор $M_r(0)$ приобретает мнимую часть:

$$M_r(0) = \frac{\kappa}{2} + i\,\mathrm{sign}\,\omega\sqrt{g^2\langle\breve{\varphi}^2\rangle - \frac{\kappa^2}{4}}\,. \quad (18)$$

Знак перед корнем выбран так, чтобы правая часть первого выражения в (6) оказалась положительной величиной. Знак $\mathrm{Im}\,M_r(0)$, согласно определению

$$\mathrm{Im}\,M_r(\omega) = \int\limits_0^{\infty} M_r(t)\sin\omega t\,dt, \quad (19)$$

изменяется вместе с изменением знака частоты ω. Подстановка соотношений (17) и (18) в тождество (6) свидетельствует о возникновении в системе при малых частотах шума,

$$\langle\breve{x}\breve{x}\rangle_\omega = \frac{2T}{\omega}\,\mathrm{sign}\,\omega\frac{\sqrt{g^2\langle\breve{\varphi}^2\rangle - \dfrac{\kappa^2}{4}}}{g^2\langle\breve{\varphi}^2\rangle}\,, \quad (20)$$

с характерной особенностью $1/\omega$.

Наличие конечной мнимой части оператора $M_r(0)$ при $\omega \to 0$ возможно, согласно соотношению (19), лишь в том случае, если при больших временах оператор $M_r(t)$ обладает асимптотой $M_r(t) \propto t^{-1}$. Такой же асимптотой по той же причине при больших временах обладает функция Грина: $G_r(t) \propto t^{-1}$. Вместе с тем ясно, что особенность $1/\omega$ у коррелятора $\langle\breve{x}\breve{x}\rangle_\omega$ не может простираться до сколь угодно малых частот. Это нарушило бы конечность интеграла

$$\int\limits_0^{\infty}\langle\breve{x}\breve{x}\rangle_\omega d\omega$$

и привело бы к бесконечному значению коррелятора $\langle\breve{x}(0)\breve{x}(0)\rangle$. Возникшая сложность вызвана использованием приближенного равенства (16). Поясним это более подробно. Поскольку при конечном значении γ коррелятор $\langle\breve{\varphi}(t)\breve{\varphi}(0)\rangle$ экспоненциально затухает с ростом аргумента, оказывается, согласно выражению (15), что величина $\mathrm{Im}\,M_r(\omega)$ стремится к нулю при $\omega \to 0$, а не остается конечной величиной, как предполагалось выше. Так как особенность $1/\omega$ в шуме возникает лишь при конечной величине $\mathrm{Im}\,M_r(0)$ и в пренебрежении постоянной γ, спектр $1/\omega$ существует лишь в интервале частот

$$\gamma \ll \omega \ll \omega_0. \quad (21)$$

Вернемся еще раз к вопросу о точности однопетлевого приближения. Для этого заметим, что в предположении о гауссовом характере поля $\breve{\varphi}$ и при $\gamma \to 0$ рассмотренная выше задача допускает точное решение (см. Приложение). Оно может быть получено путем разложения функции $G_r(\omega)$ в ряд по параметру $g^2\langle\breve{\varphi}^2\rangle/\kappa^2$, а также (с учетом тождества, аналогичного тождеству Уорда [16] в электродинамике) полного суммирования всех фейнмановских графов. На смену уравнению (16) относительно оператора $M_r(\omega)$ приходит следующее:

$$M_r(\omega) = g^2\langle\breve{\varphi}^2\rangle G_r(\omega)\left[1 - \frac{d}{d\kappa}M_r(\omega)\right]. \quad (22)$$

При

$$\frac{\kappa^2}{g^2\langle\breve{\varphi}^2\rangle} \ll 1 \quad (23)$$

это уравнение имеет следующее асимптотическое решение:

$$M_r(0) = \frac{\kappa}{2}\left(1 - \frac{\kappa^2}{6g^2\langle\breve{\varphi}^2\rangle}\right) + + i\,\mathrm{sign}\,\omega\sqrt{\frac{g^2\langle\breve{\varphi}^2\rangle}{2}}\left(1 - \frac{\kappa^4}{24g^2\langle\breve{\varphi}^2\rangle^2}\right). \quad (24)$$

Наличие такой асимптоты, свидетельствующей о конечности величины $\operatorname{Im} M_r(0)$ при $\omega \to 0$ в условиях неравенства (23), достоверно доказывает наличие $1/\omega$-шума в области частот (21), если предыдущие рассуждения, основанные на однопетлевом приближении, вызывали какие-либо сомнения. Что касается однопетлевого приближения, то при выполнении неравенства (23) оно, в свою очередь, дает

$$M_r(0) = \frac{\kappa}{2} + i \operatorname{sign}\omega \sqrt{g^2 \langle \breve{\varphi}^2 \rangle}\,. \qquad (25)$$

Сопоставление асимптотического результата (25), найденного в однопетлевом приближении, с асимптотическим поведением точного решения (24) показывает, что вещественная часть оператора $M_r(\omega)$ в условиях однопетлевого приближения (23) при большой константе взаимодействия g совпадает с вещественной частью точного решения. Мнимая часть оператора $M_r(0)$ в однопетлевом приближении при правильном буквенном сочетании оказывается завышенной в $\sqrt{2}$ раз. В условиях обратного неравенства,

$$\frac{\kappa^2}{g^2 \langle \breve{\varphi}^2 \rangle} \gg 1, \qquad (26)$$

однопетлевое приближение и точное решение дают совпадающие результаты, поскольку оба приводят к первому слагаемому теории возмущений. Таким образом, точность однопетлевого приближения вполне достаточна, чтобы при первоначальном ознакомлении с системой иметь возможность судить о наличии или отсутствии в ней шума со спектром $1/\omega$. В промежуточном интервале между неравенствами (23) и (24) однопетлевое приближение дает интерполяционный результат и правильно предсказывает существование «фазового перехода», к количественному описанию которого в этом интервале, тем не менее, надо относиться с осторожностью.

Проведенный анализ позволяет утверждать, что для генерации $1/\omega$-шума в осцилляторе нет необходимости прибегать к внешнему шумовому полю $\breve{\varphi}(t)$. Помещенный в термостат гармонический осциллятор сам начинает флуктуировать. При этом амплитуда флуктуаций растет с температурой. Если этой амплитудой воздействовать на коэффициент жесткости осциллятора, т. е. ввести обратную связь, то, как показано выше, в осцилляторе возникнут $1/\omega$-флуктуации. Поскольку одна обратная связь по шуму при нахождении $M_r(0)$ уже была описана уравнением (16), можно говорить о появлении $1/\omega$-шума в нелинейных системах вследствие двойной обратной связи. Таким образом, можно утверждать, что любой ангармонический осциллятор обладает $1/\omega$-флуктуациями, если только температура термостата достаточно велика.

Действительно, рассмотрим уравнение ангармонического осциллятора

$$m\frac{d^2\breve{x}_f(t)}{dt^2} + \kappa\breve{x}_f(t) + g\breve{x}_f^2(t) = f(t). \qquad (27)$$

Пусть задача решена и решение уравнения (27) известно. Обозначим его через $\breve{\psi}(t)$. Перепишем уравнение (27) в виде

$$m\frac{d^2\breve{x}_f(t)}{dt^2} + \kappa\breve{x}_f(t) + g\breve{\psi}(t)\breve{x}_f(t) = f(t).$$

Коль скоро оператор $\breve{\psi}(t)$ известен, то для оператора $\breve{x}(t)$ мы получили изученное выше уравнение (7). Если предположить, что поле $\breve{\psi}$ гауссово, то, опираясь на систему уравнений (14), (22), можно найти точное решение задачи. Если же такого предположения не делать, то можно ограничиться однопетлевым приближением. Как показано выше, при большом ангармонизме его точность вполне удовлетворительна, а результаты не зависят от статистических свойств систем. В согласии с выражением (15) находим

$$M_r(t-t') = g^2 G_r(t-t')\langle \breve{\psi}(t-t')\breve{\psi}(0)\rangle. \qquad (28)$$

Вместо операторов $\breve{\psi}$ в уравнении (28) вновь будем писать оператор $\breve{x}$, имея в виду, что полученные таким образом результаты будут отвечать уравнению ангармонического осциллятора (27). После преобразования Фурье оператор оказывается равным

$$M_r(\omega) = g^2 \int G_r(\omega-\omega')\langle \breve{x}\breve{x}\rangle_{\omega'} \frac{d\omega'}{2\pi}. \qquad (29)$$

Как и выше, ограничимся областью классических частот $\hbar\omega \ll T$. Неизвестную функцию $\langle \breve{x}\breve{x}\rangle_\omega$ в согласии с соотношениями (3) и (20) будем искать в виде

$$\langle \breve{x}\breve{x}\rangle_\omega = \frac{2\pi A}{|\omega|}\theta\left(\omega_0 - |\omega|\right) + \\ + 2\pi B\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right], \qquad (30)$$

где $B = T/2\kappa$, а A — неизвестная постоянная. Учитывая в последнем выражении особенность $1/|\omega|$, в уравнении (29) функцию G_r можно вынести за знак интеграла в точке $\omega' = 0$:

$$M_r(\omega) = g^2 G_r(\omega) \times \\ \times \int\limits_\gamma^{\omega_0} \frac{2A}{\omega}\, d\omega + \frac{g^2 B}{-m(\omega-\omega_0)^2 + \kappa - M_r(\omega-\omega_0)} + \\ + \frac{g^2 B}{-m(\omega+\omega_0)^2 + \kappa - M_r(\omega+\omega_0)} . \quad (31)$$

Здесь интервалом интегрирования в действительности, согласно (6), служит полуось от 0 до ∞. Но если γ — малая величина, то бóльшая часть площади подынтегрального выражения при $t = 0$ из-за особенности $1/\omega$ сосредоточена в районе малых частот. По этой причине верхний предел интегрирования можно обрезать частотой ω_0, что согласуется с условием (21). Нижний предел интегрирования нулем быть не может. Но в рассматриваемой модели нет параметров, из которых можно было бы сконструировать нижний предел интегрирования, имеющий размерность частоты. Это означает, что в принятой модели особенность $1/\omega$ простирается до сколь угодно малых частот. Ограничение со стороны малых частот возникает только за счет взаимодействия осциллятора с внешними полями, обеспечивающими в реальных ситуациях, согласно условию (21), нижний предел интегрирования в выражении (31).

Равенство (31) представляет собой систему зацепляющихся уравнений. Чем позднее мы разорвем эту цепочку, тем точнее будет результат. Нас интересует оператор $M_r(0)$. Согласно (31) имеем

$$M_r(0) = \frac{2g^2 A \ln \dfrac{\omega_0}{\gamma}}{\kappa - M_r(0)} - \frac{g^2 B}{M_r(\omega_0)} - \frac{g^2 B}{M_r(-\omega_0)}. \quad (32)$$

Теперь выписываем уравнения для $M_r(\pm\omega_0)$, и в этих уравнениях ограничиваемся диагональным приближением. Тогда

$$M_r^2(\pm\omega_0) = -2g^2 A \ln \frac{\omega_0}{\gamma} .$$

Нечетность, согласно (19), функции $\operatorname{Im} M_r(\omega)$ приводит к взаимному сокращению в уравнении (32) последних двух слагаемых. Это означает, что в первом приближении влиянием шума резонансной области частот на формирование $1/\omega$-шума осциллятора можно пренебречь. Теперь уравнение (32) легко решается. При

$$2g^2 A \ln \frac{\omega_0}{\gamma} > \frac{\kappa^2}{4}$$

находим

$$\langle \breve{x}\breve{x} \rangle_\omega = \frac{T}{\omega} \operatorname{sign} \omega \frac{\sqrt{2g^2 A \ln(\omega_0/\gamma) - \dfrac{\kappa^2}{4}}}{g^2 A \ln(\omega_0/\gamma)} . \quad (33)$$

Уравнение согласования для нахождения неизвестной A принимает вид

$$2\int\limits_\gamma^{\omega_0} \langle \breve{x}\breve{x} \rangle_\omega \frac{d\omega}{2\pi} = \left(2A \ln \frac{\omega_0}{\gamma} \right)^2 = \\ = \frac{2T}{\pi g^2} \sqrt{2g^2 A \ln \frac{\omega_0}{\gamma} - \frac{\kappa^2}{4}} \, \ln \frac{\omega_0}{\gamma} .$$

Это уравнение переписывается в безразмерных величинах

$$z^2 = \zeta \sqrt{z - \frac{1}{4}} , \quad (34)$$

где

$$\zeta = \frac{2g^2 T}{\pi \kappa^3} \ln \frac{\omega_0}{\gamma}, \quad z = \frac{2g^2 A}{\kappa^2} \ln \frac{\omega_0}{\gamma} .$$

Уравнение (34) имеет решение лишь при параметре ζ, большем некоторого критического значения ζ_c, определяющего критическую температуру T_c. В критической точке кривые z^4 и $\zeta^2(z-1/4)$ соприкасаются. Поэтому в этой точке выполняется равенство их производных, что позволяет найти величины

$$\zeta_c = \frac{2}{\sqrt{27}} , \quad z_c = \frac{1}{3} , \quad T_c = \frac{\pi\kappa^3}{g^2\sqrt{27}} \left(\ln \frac{\omega_0}{\gamma} \right)^{-1} .$$

При $T > T_c$ уравнение (34) имеет два решения. Существование одного из них достоверно, так как попадает в область справедливости однопетлевого приближения. Другое решение попадает в интерполяционную область и служит предметом дальнейших исследований. Есть основания полагать, что однопетлевое приближение правильно указывает на его существование. В итоге вместо формулы (33) имеем

$$\langle \breve{x}\breve{x} \rangle_\omega = z \frac{\pi\kappa^2}{g^2\omega} \left(\ln \frac{\omega_0}{\gamma} \right)^{-1} .$$

Таким образом, при достижении некоторой пороговой температуры T_c в любом ангармоническом осцилляторе возникает термический $1/\omega$-шум. Мы полагаем, что предложенный механизм возникновения термического $1/\omega$-шума вполне адекватно объясняет происхождение такого шума в спектре фононов кварца, экспериментально обнаруженного в работе [12] и до сих пор не нашедшего теоретического объяснения.

Участникам семинара, руководимого А. А. Рухадзе, выражаю признательность за обсуждение работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приводим вывод уравнения (22). Уравнение (9), если только величина $\breve{\varphi}(t)$ описывает гауссово случайное поле, может быть решено следующим способом. Перепишем его в интегральной форме

$$\breve{G}_r(t,t') = G_r^0(t-t') - g\int_0^\infty G_r^0(t-t_1)\breve{\varphi}(t_1)G_r(t_1,t')\,dt_1,$$

где

$$m\frac{d^2G_r^0(t-t')}{dt^2} + \kappa G_r^0(t-t') = \delta(t-t'),$$

и решим методом итераций. Возникший ряд усредним по ансамблю систем и, воспользовавшись свойствами гауссова распределения, выразим корреляторы высших порядков поля $\breve{\varphi}$ через билинейные комбинации этих операторов. Возникший ряд Фейнмана легко суммируется методом Дайсона. В результате суммирования находим

$$\langle G_r(t-t')\rangle = G_r^0(t-t') + \\ + \int G_r^0(t-t_1)M_r(t_1,t_2)\langle G_r(t_2-t')\rangle dt_1 dt_2,$$

где

$$M_r(t,t') = g\int G_r(t-t_1)\langle\breve{\varphi}(t_1-t_2)\breve{\varphi}(0)\rangle \times \\ \times \Gamma(t_1,t_2,t')\,dt_1 dt_2. \quad (\text{П}.1)$$

Здесь $\Gamma(t_1,t_2,t')$ — вершинная функция. Дельтаобразное поведение коррелятора $\langle\breve{\varphi}\breve{\varphi}\rangle_\omega$ позволяет оператору (П.1) после преобразования Фурье придать вид

$$M_r(\omega,\omega') = g\langle\breve{\varphi}^2\rangle \times \\ \times \int \delta(\omega-\omega_1)G_r(\omega_1)\Gamma(\omega_1,0,\omega')\,d\omega_1. \quad (\text{П}.2)$$

Если воспользоваться аппроксимацией

$$\Gamma(\omega_1,0,\omega') = 2\pi\delta(\omega_1-\omega'),$$

то мы приходим к уравнениям однопетлевого приближения.

В структурном отношении ряд, представляющий пропагатор $\langle\breve{G}_r(\omega)\rangle$, аналогичен фейнмановскому ряду для функции Грина в квантовой электродинамике. Повторяя известные рассуждения [17], находим

$$\Gamma(\omega_1,0,\omega') = 2\pi g\delta(\omega_1-\omega') - g\frac{d}{d\kappa}M_r(\omega_1,\omega'). \quad (\text{П}.3)$$

Точность этого соотношения обусловлена точностью тождества Уорда [16]. Введем обозначение

$$M_r(\omega,\omega') = 2\pi\delta(\omega-\omega')M_r(\omega)$$

и подставим выражение (П.3) в (П.2). Для интересующего нас оператора $M_r(\omega)$ получаем уравнение (22). Этому уравнению можно придать вид

$$M_r(\omega) = g^2\langle\breve{\varphi}^2\rangle\frac{d}{d\kappa}\ln\left[-m\omega^2+\kappa-M_r(\omega)\right] = \\ = g^2\langle\breve{\varphi}^2\rangle\frac{d}{d\kappa}\ln G_r^{-1}(\omega).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, УФН **141**, 1511 (1983).
2. Г. П. Жигальский, УФН **173**, 465 (2003).
3. J. B. Jonson, Phys. Rev. **26**, 71 (1925).
4. P. H. Handel, Phys. Rev. A **22**, 745 (1980).
5. T. Musha, in *Proc. 17th Conf. on Noise in Physical System and 1/f Fluctuations*, ed. by J. Sikula, Prague, August (2003), p. 3.
6. H. Furukava, Phys. Rev. A **34**, 2315 (1986).
7. B. Pellegrini, in *Proc. 15th Int. Conf. on Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations*, ed. by C. Surya, Hong Kong (1999), p. 303.
8. Sh. M. Kogan and K. E. Nogaev, Sol. St. Comm. **49**, 387 (1984).
9. M. N. Mihaila, in *Proc. 16th Int. Conf. on Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations*, ed. by G. Bosman, Floride USA (2001), p. 169.
10. В. Н. Скоков, В. П. Каверда, А. В. Решетников, ЖЭТФ **119**, 613 (2001).
11. R. F. Voss and J. Clarke, Phys. Rev. Lett. **36**, 42 (1976).
12. T. Musha, G. Borbely, and M. Shoji, Phys. Rev. Lett. **64**, 2394 (1990).
13. H. B. Callen and T. A. Welton, Phys. Rev. **83**, 34 (1951).
14. Р. Кубо, в сб. *Термодинамика необратимых процессов*, Изд-во иностр. лит., Москва (1962), стр. 345.
15. С. В. Тябликов, Украин. мат. ж. **11**, 287 (1959).
16. J. Ward, Phys. Rev. **73**, 182 (1950).
17. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1969).