

ИЗМЕНЕНИЯ УСЛОВИЙ ФАЗОВОГО СИНХРОНИЗМА ПРИ ГЕНЕРАЦИИ СИГНАЛА ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В КОНЕЧНОМ ОДНОМЕРНОМ ФОТОННОМ КРИСТАЛЛЕ ВБЛИЗИ УСЛОВИЯ БРЭГГА: СЛУЧАИ СЛАБОЙ И СИЛЬНОЙ ДИФРАКЦИЙ

*E. V. Петров**, *Б. И. Манцызов***

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119992, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20 декабря 2004 г.

Теоретически исследован процесс эффективной генерации сигнала второй гармоники в конечном одномерном фотонном кристалле при неколлинеарной геометрии взаимодействия волн в условиях локализации энергии основного излучения вблизи края области селективного брэгговского отражения. Численно показано, что в конечном фотонном кристалле возможна синхронная генерация сигнала второй гармоники, для которого не выполнены традиционные условия фазового синхронизма, рассчитанные в приближении узких линий пространственного спектра эффективных блоховских мод, причем интенсивность этого сигнала более чем на порядок превосходит интенсивность сигнала второй гармоники, для которого выполнены традиционные условия фазового синхронизма. Существование такого явления объясняется интерференцией эффективных блоховских волн с близкими по величине амплитудами, волновыми числами и ширинами пространственных спектров. В ограниченной среде пространственный спектр сигналов имеет конечную ширину, поэтому при брэгговской дифракции излучения в фотонном кристалле на краю фотонной запрещенной зоны вблизи первых резонансов пропускания уширенные спектральные линии двух близких блоховских волн перекрываются и образуют единую линию пространственного спектра, центр которой смещен относительно эффективных волновых векторов каждой из блоховских мод. Это приводит к изменению условий синхронизма при генерации сигнала второй гармоники в ограниченном фотонном кристалле. В связи с этим предложены выражения для модифицированных условий фазового синхронизма, записанные не для точных значений эффективных волновых векторов отдельных блоховских мод, а для центров результирующих спектральных линий взаимодействующих волн. Показано, что условия синхронизма значительно отличаются в случаях сильной и слабой дифракций излучения и совпадают с традиционными условиями компенсации фазовой расстройки лишь для проходящих сигналов в случае слабой дифракции.

PACS: 42.70.Qs, 42.65.Ky

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в связи с появлением новых нелинейно-оптических материалов, фотонных кристаллов [1, 2], значительно возрос интерес к задачам нелинейно-оптического параметрического преобразования оптического излучения в периодических структурах [3]. Фотонные кристаллы представляют собой искусственные структуры с периодиче-

ской пространственной модуляцией (в общем случае в трех измерениях) функции диэлектрической проницаемости. Если период модуляции сравним с длиной волны оптического диапазона, то для оптического излучения возникают области частот или углов падения излучения на структуру, при которых излучение не распространяется в глубь структуры [4]. Такие зоны получили название фотонных запрещенных зон (ФЗЗ). Характерным свойством фотонных кристаллов является сильная локализации энергии излучения внутри структуры, когда частота или угол падения излучения соответствуют краю

*E-mail: epetrov@genphys.phys.msu.ru
**E-mail: mants@genphys.phys.msu.ru

ФЗ3. В этом случае значительное увеличение плотности энергии излучения на основной частоте приводит к росту амплитуд волн нелинейной поляризации и, следовательно, к росту интенсивности сигналов на комбинированных частотах в процессе нелинейно-оптического параметрического преобразования. Применительно к одномерным фотонным кристаллам этот эффект был исследован теоретически и экспериментально в работах [5, 6] и был назван несинхронным усилением. В работе [7] аналитически показано, что при несинхронном усилении энергия поля локализованных волн на основной частоте может достигать значения, пропорционального третьей степени числа периодов структуры, что делает механизм несинхронного усиления весьма эффективным способом увеличения нелинейно-оптического взаимодействия волн в тонких структурах, поскольку в сплошных средах рост интенсивности генерируемых сигналов ограничен квадратом длины среды. Как известно, для эффективной перекачки энергии из основного сигнала в волны на комбинированных частотах должны быть выполнены условия фазового или группового синхронизма, которые традиционно реализуются в двулучепреломляющих кристаллах [8], искусственных кристаллах с регулярной доменной структурой [9–11] или оптических волноводах [12–14]. Особенностью фотонных кристаллов является возможность одновременного выполнения как условий несинхронного усиления, так и фазового синхронизма [15–17], что позволяет добиться дополнительного увеличения эффективности нелинейной генерации сигналов в фотонных кристаллах по сравнению со сплошными средами. Коеффициент преобразования энергии основной волны в сигнал второй гармоники может превышать 10 % при размерах фотонных кристаллов порядка десятков микрон [18, 19], что более чем на два порядка выше эффективности нелинейно-оптического преобразования в однородной бездисперсионной среде той же толщины. Сильная пространственная дисперсия вблизи края ФЗ3 [4] позволяет компенсировать материальную дисперсию веществ, из которых изготовлен фотонный кристалл, обеспечивая синхронное взаимодействие основных и генерируемых сигналов в нелинейных процессах, — дисперсионный фазовый синхронизм (ДФС). Возможность одновременного выполнения условий ДФС и несинхронного усиления была предсказана теоретически [15] и продемонстрирована экспериментально [16] на примере генерации сигналов второй гармоники. Другой механизм компенсации фазовой расстройки взаимодействующих волн в фотонных кристаллах реализуется бла-

годаря вовлечению в условие синхронизма для волновых векторов вектора обратной решетки структуры. Такой механизм получил название фазового квазисинхронизма (ФКС) [10]. Условия ФКС при генерации нелинейных сигналов в фотонных кристаллах, как правило, реализуются для основных и генерируемых волн, распространяющихся в противоположных направлениях, тогда как ДФС имеет место для сонаправленных волн. Генерация сигнала суммарной частоты при одновременном выполнении условий ФКС и несинхронного усиления была продемонстрирована авторами работы [17]. Компенсация материальной дисперсии возможна также при генерации нелинейных сигналов в некоторых типах жидкых кристаллов [20–22], которые, по сути, являются природными фотонными кристаллами, однако незначительная амплитуда модуляции коэффициента преломления не обеспечивает сколько-нибудь заметного эффекта несинхронного усиления.

В работе [15] показано, что при генерации второй гармоники в фотонных кристаллах условия синхронизма выполняются для эффективных волновых векторов [23] в приближении узких линий пространственного спектра, если частота основного излучения соответствует первому, а частота сигнала второй гармоники — второму минимумам коэффициента отражения (резонансам пропускания), отсчитанных от центров соответствующих ФЗ3. Наличие такого максимума интенсивности сигнала второй гармоники было подтверждено экспериментально [16, 24] для структур, специально выращенных для таких условий. Однако эффективность генерации второй гармоники в случае выполнения условия несинхронного усиления при совпадении других порядков резонансов пропускания для основной волны и второй гармоники не исследовалась. Задача нахождения параметров периодических структур и излучения, при которых обеспечивается оптимальная эффективность генерации сигналов на комбинированных частотах, традиционно решается с использованием метода эффективных волновых векторов [4, 23]. В рамках этого метода излучение в слоистой структуре представляется как суперпозиция волн (блоховских мод) с одинаковой частотой и набором волновых векторов, отличающихся от некоторого эффективного волнового вектора на целое число векторов обратной решетки. Недостатком такого подхода с точки зрения расчета условий синхронизма в фотонных кристаллах является использование тех же соотношений для компенсации фазовой расстройки, что и для сплошных протяженных сред, т. е. для волновых векторов с узкими ли-

ниями пространственного спектра, лишь с заменой волновых векторов на эффективные волновые векторы. Однако реальный фотонный кристалл даже приближенно нельзя считать протяженной средой. Весьма сложная пространственная структура поля внутри кристалла, связанная с ограниченностью среды, содержит блоховские моды с шириной линий пространственного спектра $\Delta k \sim 2\pi/L$, где L — длина среды. Поэтому, если вблизи края ФЗЗ две уширенные линии с близкими спектральными амплитудами смешены друг относительно друга на величину порядка Δk , суммарная линия будет иметь максимум, смещенный относительно эффективного волнового вектора. Таким образом, условия синхронизма при учете конечной ширины спектральных линий также могут быть смещены относительно условий синхронизма, рассчитанных в приближении узких линий блоховских мод (приближение эффективных волновых векторов), максимальная величина смещения равна π/L . Так, в эксперименте, представленном в работе [17], максимумы интенсивностей нелинейных сигналов второй гармоники и суммарной частоты были несколько смещены относительно точных условий синхронизма, рассчитанных в приближении эффективных волновых векторов.

В настоящей работе на примере генерации сигнала второй гармоники в оригинальной неколлинеарной геометрии взаимодействия излучений, использование которой позволило обеспечить выполнение условия несинхронного усиления в широком диапазоне частот, с помощью метода матриц переноса излучения [25] показано, что в тонком одномерном фотонном кристалле возможна эффективная генерация сигнала второй гармоники при совпадении первых резонансов пропускания основной волны и сигнала второй гармоники. В этом случае не выполняются условия фазового синхронизма, рассчитанные в традиционном приближении узких линий пространственного спектра эффективных блоховских мод, тем не менее интенсивность такого сигнала более чем на порядок превосходит интенсивность сигнала второй гармоники, для которого удовлетворяются традиционные условия синхронизма в приближении узких спектральных линий [15, 16]. Объяснение этого эффекта становится возможным при переходе к многомодовой задаче с учетом эффективного перекрытия пространственных спектров как основных, так и генерируемых волн. Предложены выражения для модифицированных условий фазового синхронизма, записанные для центров результирующих линий пространственных спектров взаимодействующих волн. Рассмотрены случаи сильной

и слабой брэгговской дифракции излучения в фотонном кристалле. Показано, что условия эффективного взаимодействия основных и генерируемых сигналов в этих случаях существенно различаются.

Работа имеет следующую структуру. Раздел 2 содержит постановку задачи, метод решения и описание структуры. В разд. 3 исследуются особенности формирования пространственных спектров сигналов, распространяющихся в конечных периодических структурах. Результаты, полученные в разд. 3, используются в разд. 4 для объяснения особенностей частотного распределения интенсивности нелинейных сигналов второй гармоники в случаях слабой и сильной дифракций.

2. ОСОБЕННОСТИ ГЕНЕРАЦИИ СИГНАЛА ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ВБЛИЗИ КРАЯ ФОТОННОЙ ЗАПРЕЩЕННОЙ ЗОНЫ В ОГРАНИЧЕННОМ ФОТОННОМ КРИСТАЛЛЕ

Рассмотрим процесс генерации волны второй гармоники в фотонном кристалле с квадратичной нелинейностью, состоящем из N плоскопараллельных бислоев. Каждый бислой состоит из двух слоев, которые характеризуются толщинами d_1 , d_2 , комплексными коэффициентами преломления $n_1(\omega)$, $n_2(\omega)$, зависящими от частоты излучения ω , и нелинейными восприимчивостями второго порядка $\chi_1^{(1)}$, $\chi_2^{(2)}$, которые для простоты будем считать константами. Нижние индексы 1 и 2 относятся, соответственно, к нечетным и четным слоям фотонного кристалла. Подложка фотонного кристалла считается бесконечной с комплексным коэффициентом преломления n_{sub} . Из вакуума на поверхность структуры падают основные волны с частотами ω_1 и ω_2 под произвольными углами θ_1 и θ_2 к нормали к поверхности. Ось z направлена вдоль нормали в глубь структуры, ось x — вдоль поверхности структуры, плоскость xz является плоскостью падения фундаментальных волн.

Наличие в структуре нелинейности второго порядка приводит к возбуждению внутри фотонного кристалла волны поляризации с частотой $\omega_1 + \omega_2$, которая обусловливает рождение сигнала на суммарной частоте $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Для нахождения полей $\mathbf{E}_{1,2}(\mathbf{r}, t)$ фундаментальных и $\mathbf{E}_3(\mathbf{r}, t)$ генерируемой волн внутри фотонного кристалла, а также поля генерируемого сигнала на входе и выходе структуры (т. е. интенсивности сигнала в вакууме и подложке) необходимо решить нелинейное волновое уравнение:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

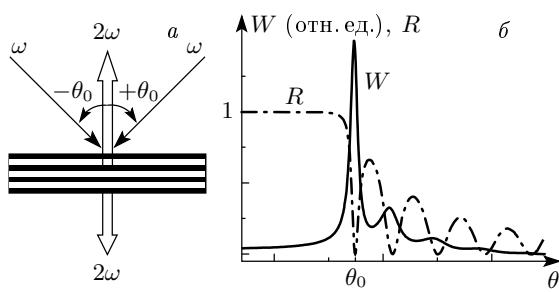


Рис. 1. а) Схема геометрии взаимодействия излучений при генерации второй гармоники. б) Зависимость коэффициента отражения R и энергии локализованного в фотонном кристалле электрического поля W основного излучения от угла падения θ ; θ_0 — угол падения, при котором реализуется несинхронное усиление

Здесь $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = n^2(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — вектор электрической индукции,

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \chi^{(2)} : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

— вектор нелинейной поляризации, c — скорость света в вакууме. В настоящей работе уравнение (1) решается методом матриц переноса излучения [17, 25] в приближениях плоских бесконечных монохроматических волн и заданного поля волны накачки. Такие приближения оказываются оправданными для импульсов длительностью вплоть до 200–300 фс [6, 17] и слабой нелинейности. Метод матриц переноса излучения дает точное решение уравнения (1) со вторыми пространственными производными в указанных приближениях, что позволяет учесть сложную многомодовую структуру полей волн, локализованных в тонком фотонном кристалле.

Далее будем рассматривать вырожденный случай генерации сигнала суммарной частоты, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ и, соответственно, $\omega_3 = 2\omega$. Чтобы выяснить, какие параметры фундаментального излучения являются оптимальными для достижения максимальной интенсивности генерируемого сигнала, будем использовать неколлинеарную геометрию взаимодействия волн (рис. 1а), которая позволяет обеспечить выполнение условия несинхронного усиления в широком частотном диапазоне. Изменяя частоту ω основного сигнала, будем варьировать угол падения излучения таким образом, чтобы постоянно выполнялось условие несинхронного усиления, т. е. угол падения θ соответствовал максимуму энергии поля, локализованного внутри структуры, W (рис. 1б):

$$W = \int_0^L n^2(z)|E(z)|^2 dz,$$

где $z = 0$, $z = L$ — координаты входной и выходной поверхностей фотонного кристалла. Параметры Δ_{DPM} и Δ_{QPM} , которые характеризуют соответственно условия ДФС и ФКС, рассчитанные для эффективных волновых векторов в приближении узких линий пространственного спектра блоховских мод, определяются выражениями

$$\Delta_{DPM} = (k_{1z}^{eff} + k_{2z}^{eff} - k_{3z}^{eff})L, \quad (2)$$

$$\Delta_{QPM} = (k_{1z}^{eff} + k_{2z}^{eff} + k_{3z}^{eff} - Hl)L, \quad (3)$$

где k_{zi}^{eff} — z -проекция эффективных волновых векторов основных ($i = 1, 2$) и нелинейной ($i = 3$) волн, $L = N(d_1 + d_2)$ — толщина структуры, $H = 2\pi/(d_1 + d_2)$ — модуль вектора обратной решетки фотонного кристалла, l — целое число, порядок квазисинхронизма. Выражение (2) аналогично условию фазового синхронизма для однородной среды, тогда как выражение (3) записано с учетом блоховских мод (дополнительное слагаемое Hl), возникающих при брэгговской дифракции излучения в периодической структуре. При изменении частоты ω и угла падения θ значения параметров в формулах (2), (3) изменяются. Условия фазового синхронизма будут выполняться, если

$$\Delta_{DPM}, \Delta_{QPM} \leq \pi/2. \quad (4)$$

Так как частоты основных сигналов равны, их волновые векторы будут располагаться симметрично относительно нормали, т. е. $\theta_1 = +\theta_0$ и $\theta_2 = -\theta_0$, где θ_0 — угол падения, при котором выполнено условие несинхронного усиления для данной частоты ω . Исходя из условия непрерывности тангенциальных составляющих векторов электрических полей на границах слоев [23], угол «падения» θ_3 сигнала 2ω равен нулю для любой ω .

На рис. 2а изображена зависимость от нормированной частоты интенсивности $I^{(\pm)}$ прошедшего («+», сплошная линия) и отраженного («-», штриховая линия) сигнала второй гармоники, генерируемого в условиях описанной геометрии взаимодействия волн. Зависимость была получена для структуры, состоящей из $N = 15$ пар слоев, коэффициенты преломления нечетных слоев $n_1(\omega)$ соответствуют материалу AlO_x , четных $n_2(\omega)$ — материалу AlGaAs [16]. Толщины нечетных и четных слоев равны, соответственно, $d_1 = \lambda_0/3n_1(\omega_0)$ и $d_2 = 3\lambda_0/4n_2(\omega_0)$, $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$, ω_0 — опорная частота, нелинейными являются четные слои, т. е. слои

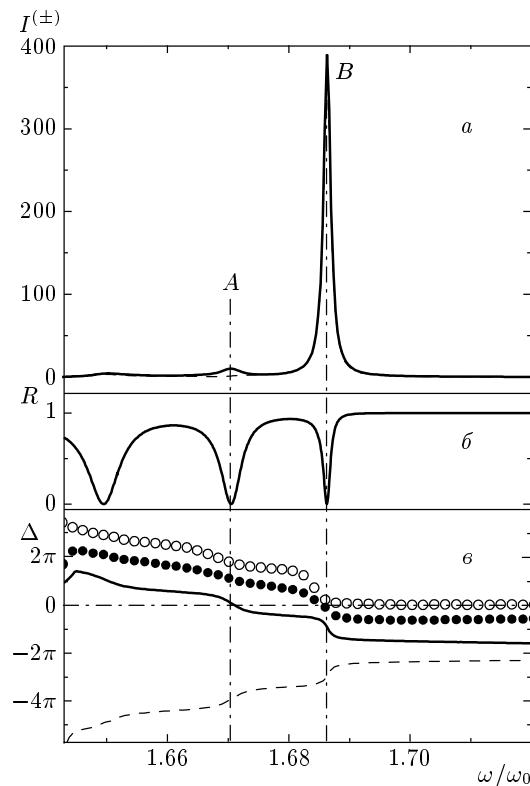


Рис. 2. Зависимости от нормированной частоты:
а — нормированной интенсивности прямого $I^{(+)}$ (сплошная линия) и отраженного $I^{(-)}$ (штриховая линия) сигналов второй гармоники; б — коэффициента отражения R сигнала второй гармоники;
в — параметров синхронизма ДФС Δ_{DPM} (сплошная линия), ФКС Δ_{QPM} (штриховая линия), $\Delta^{(+)}$ (•) и $\Delta^{(-)}$ (○). Вертикальные штрихпунктирные линии показывают частотное положение максимумов интенсивности сигнала второй гармоники, соответствующих второму (линия А) и первому (линия В) резонансам пропускания

AlGaAs. Подложка отсутствует. Интенсивность $I^{(\pm)}$ нормирована на интенсивность сигнала второй гармоники с частотой $2\omega_0$, генерируемого в однородной бездисперсионной среде толщиной $D = Nd_2$ с коэффициентом преломления $n_2(\omega_0)$. На рис. 2б и 2в изображены, соответственно, профиль коэффициента отражения сигнала второй гармоники и параметры синхронизма Δ_{DPM} , Δ_{QPM} . Параметр порядка квазисинхронизма $l = 4$, все излучения имеют s -поляризацию.

На рис. 2а видно, что в распределении интенсивности сигнала второй гармоники имеются два максимума, положение которых обозначено вертикальными штрихпунктирными линиями А и В. Положе-

ние максимума А совпадает с частотным положением нулевого значения параметра ДФС Δ_{DPM} и соответствует второму резонансу пропускания, отсчитанному от центра ФЗЗ для сигнала второй гармоники, т. е. это максимум интенсивности, существование которого было продемонстрировано ранее [15, 16, 24]. Положение же максимума интенсивности В не совпадает ни с нулевым значением параметра Δ_{DPM} , ни с нулевым значением параметра Δ_{QPM} и соответствует первому резонансу пропускания сигнала второй гармоники. Значение этого максимума более чем на порядок превосходит значение интенсивности в точке А, что свидетельствует о том, что генерация сигнала происходит в условиях фазового синхронизма, которые не могут быть описаны в приближении узких линий пространственного спектра блоховских мод, см. (2), (3). Поэтому для объяснения положения максимума интенсивности в резонансе В и нахождения условий синхронизма, отличных от (2)–(4), необходимо перейти к многомодовой задаче распространения и взаимодействия излучений.

3. ФОРМИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СПЕКТРОВ СИГНАЛОВ ПРИ ДИФРАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ФОТОННОМ КРИСТАЛЛЕ ВБЛИЗИ ФОТОННОЙ ЗАПРЕЩЕННОЙ ЗОНЫ

Как было отмечено выше, в модели эффективных волновых векторов для сигнала с частотой ω рассчитывается значение эффективного волнового вектора $k^{eff}(\omega)$ [23], который и характеризует распространение излучения в структуре. При изменении частоты изменяется и значение эффективного волнового вектора, таким образом строится дисперсионная кривая (рис. 3, сплошная кривая, правая ветвь), характеризующая линейные свойства фотонного кристалла. В любой слоистой структуре существует отраженный сигнал, т. е. сигнал, распространяющийся в направлении, противоположном прямой волне, и имеющий такой же модуль эффективного волнового вектора. Поэтому отраженный сигнал будет иметь дисперсионную кривую, симметричную относительно оси ω кривой прямого сигнала (рис. 3, сплошная линия, левая ветвь). Однако при брэгговской дифракции излучения с волновым вектором \mathbf{k}_1 в периодической структуре должна существовать дифрагированная, блоховская, волна, связанная с падающей условием Брэгга $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1 + m\mathbf{H}$, где m — целое число, номер ФЗЗ, вблизи которой происходит дифракция. Поэтому помимо волн, ве-

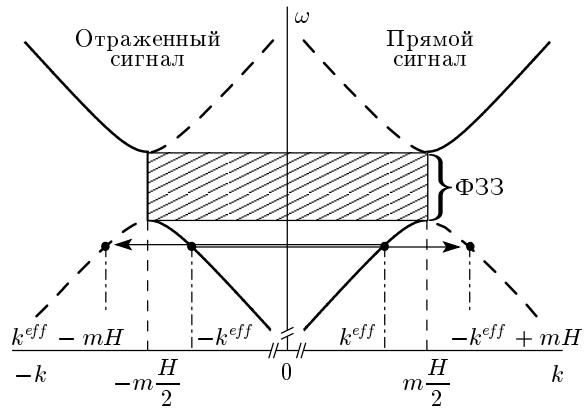


Рис. 3. Дисперсионные кривые прямых (правая ветвь) и отраженных (левая ветвь) сигналов в одноволновом приближении (сплошные линии) и дифрактированных сигналов (штриховые линии). Заштрихованная область соответствует положению ФЗЗ. Точки на дисперсионных кривых указаны положение волновых чисел прямой (k^{eff}) и обратной ($-k^{eff}$) волн, а также волн, рожденных вследствие брэгговской дифракции ($k^{eff} - mH$, $-k^{eff} + mH$). Стрелками схематически изображена связь волн при дифракции

личины волновых векторов которых равны k^{eff} и $-k^{eff}$, должны существовать волны, связанные с ними условием Брэгга, т. е. $k^{eff} - mH$ и $-k^{eff} + mH$ (см. рис. 3). Таким образом, при учете дифракции излучения в фотонном кристалле распространяются как минимум четыре волны: две прямые и две обратные.

Математически существование волн с волновыми числами $k^{eff} - mH$ и $-k^{eff} + mH$ наиболее просто и наглядно можно продемонстрировать на примере распространения излучения в структуре, функция диэлектрической проницаемости $\epsilon(z)$ которой не имеет разрывов. Это условие позволяет избежать необходимости разложения решений в ряд Фурье и спивки решений в каждой точке разрыва. Поэтому, принимая во внимание тот факт, что законы распространения волн в любой периодической структуре качественно совпадают, не ограничивая общности рассуждений, рассмотрим распространение излучения в структуре с изменением профиля диэлектрической проницаемости по гармоническому закону

$$\epsilon(z) = \begin{cases} \epsilon_0, & z \notin [0, L], \\ \epsilon_0 [1 + \mu \cos(Hz)], & z \in [0, L], \end{cases}$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость немодулированной части среды, μ — амплитуда модуляции, $H = 2\pi/d$ — вектор обратной решетки структуры,

d — период модуляции, число периодов равно N , $L = \Lambda N$ — длина структуры; $z = 0$, $z = L$ — координаты начала и конца модулированной части среды. Для нахождения пространственного распределения электрического поля $E(z)$ в случае линейного взаимодействия необходимо решить уравнение (1) с нулевой правой частью [23].

Пусть в среде распространяется плоская электромагнитная волна с частотой ω . Тогда электрическое поле волны для интервала $[0, L]$ можно записать в виде

$$E(r, t) = E_0(z) \exp[i(\omega t - k_x x)]. \quad (5)$$

Здесь $k_x = k_0 \sin \theta$ — тангенциальная составляющая волнового вектора, $k_0 = \omega/c$ — модуль волнового вектора излучения в вакууме, $k = k_0 \sqrt{\epsilon_0}$ — модуль волнового вектора в среде, θ — угол между направлением распространения излучения и осью z . Комплексную амплитуду $E_0(z)$ запишем в следующем виде:

$$E_0(z) = E_+(z) + E_-(z) = A_+(z) \exp(ik_z z) + A_-(z) \exp(-ik_z z), \quad (6)$$

где $A_{\pm}(z)$ — амплитуды прямой (+) и обратной (-) волн,

$$k_z = k_0 \sqrt{\epsilon_0 - \sin^2 \theta}$$

— z -проекция волнового вектора излучения. Далее будем считать модуляцию диэлектрической проницаемости малой, чтобы выполнялись соотношения для медленно меняющихся амплитуд,

$$\left| \frac{d^2 A_{\pm}}{dz^2} \right| \ll \left| 2k_z \frac{dA_{\pm}}{dz} \right|.$$

Предположим, что дифракция происходит вблизи первой ФЗЗ, тогда параметр $\delta = k_z - H/2$ является малой величиной.

Подставляя выражения (5) и (6) в (1) (\mathbf{P}_{NL} полагаем равным нулю), пренебрегая быстроосцилирующими членами и разделяя слагаемые, содержащие $\exp(ik_z z)$ и $\exp(-ik_z z)$, получим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} A_+ &= i \frac{\mu k^2}{4k_z} A_- \exp(-2i\delta z), \\ \frac{d}{dz} A_- &= -i \frac{\mu k^2}{4k_z} A_+ \exp(2i\delta z), \end{aligned} \quad (7)$$

которая решается с граничными условиями

$$A_+(z=0) = A_+^0, \quad A_-(z=L) = 0,$$

где A_+^0 — интенсивность излучения, падающего на границу раздела однородной и модулированной

сред. Условие $A_-(z = L) = 0$ означает, что на правую границу излучение не падает.

Подставляя решение системы (7) в (6), для амплитуд электрических полей прямой и обратной волн получим следующие выражения:

$$E_+(z) = \frac{\alpha \cos[\alpha(L-z)] - i\delta \sin[\alpha(L-z)]}{\alpha \cos(\alpha L) - i\delta \sin(\alpha L)} \times A_+^0 \exp\left(i\frac{H}{2}z\right), \quad (8)$$

$$E_-(z) = i\frac{\mu k^2}{4k_z} \frac{\sin[\alpha(L-z)]}{\alpha \cos(\alpha L) - i\delta \sin(\alpha L)} \times A_+^0 \exp\left(-i\frac{H}{2}z\right), \quad (9)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\delta^2 - \left(\frac{\mu k^2}{4k_z}\right)^2}.$$

Вещественные значения напряженностей электрических полей (8), (9) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[E_+(z)] &= \\ &= \frac{1}{4\xi} \left\{ (\alpha + \delta)^2 \cos(\beta_+ z) + (\alpha - \delta)^2 \cos(\beta_- z) - \right. \\ &\quad - \left(\frac{\mu k^2}{4k_z} \right)^2 \cos(2\alpha L) [\cos(\beta_+ z) + \cos(\beta_- z)] - \\ &\quad \left. - \left(\frac{\mu k^2}{4k_z} \right)^2 \sin(2\alpha L) [\sin(\beta_+ z) - \sin(\beta_- z)] \right\} A_+^0, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[E_-(z)] &= \frac{1}{4\xi} \frac{\mu k^2}{4k_z} \times \\ &\times \{ (\alpha - \delta) \cos(-\beta_+ z) - (\alpha + \delta) \cos(-\beta_- z) + \\ &+ (\alpha + \delta) \cos(2\alpha L) \cos(-\beta_+ z) - (\alpha - \delta) \times \\ &\times \cos(2\alpha L) \cos(-\beta_- z) - \\ &- (\alpha + \delta) \sin(2\alpha L) \sin(-\beta_+ z) - \\ &- (\alpha - \delta) \sin(2\alpha L) \sin(-\beta_- z) \} A_+^0. \quad (11) \end{aligned}$$

В формулах (10) и (11) введены следующие обозначения:

$$\xi = \alpha^2 \cos^2(\alpha L) + \delta^2 \sin^2(\alpha L),$$

$$\beta_+ = \frac{H}{2} + \alpha, \quad \beta_- = \frac{H}{2} - \alpha.$$

Из выражений (10), (11) видно, что сигнал, распространяющийся в модулированной среде, имеет четыре волновые компоненты, характеризующиеся

волновыми числами β_+ , β_- для прямых волн и $-\beta_+$, $-\beta_-$ для обратных. Эти волновые числа есть k^{eff} , $-k^{eff} + mH$ для прямых волн и $-k^{eff}$, $k^{eff} - mH$ для обратных, в данном случае $m = 1$. Кроме того, излучение, распространяющееся в фотонном кристалле, как и любой сигнал, распространяющийся в ограниченной среде, имеет пространственный спектр конечной ширины. Ширина спектральных линий при этом оценивается величиной $2\pi/L$. Таким образом, если расстояние Δk между центрами двух спектральных линий удовлетворяет условию

$$\Delta k \leq 2\pi/L, \quad (12)$$

то они перестают разрешаться и образуют единую спектральную линию, центр которой смещен относительно центров каждой из линий. Далее покажем, что если сигнал распространяется в модулированной среде в первом от центра ФЗЗ резонансе пропускания, то его спектральные компоненты удовлетворяют условию (12).

Коэффициент отражения R сигнала от периодической среды определяется выражением

$$R = \left| \frac{E_-(z=0)}{E_+(z=0)} \right|^2 = \frac{\sin^2(\alpha L)}{\left(\frac{4ak_z}{\mu k^2} \right)^2 + \sin^2(\alpha L)}.$$

Резонансы пропускания определяются соотношением $R = 0$, поэтому им соответствуют

$$\alpha = \frac{\pi}{L} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где n — номер резонанса пропускания. Тогда в резонансах пропускания волновые числа

$$\beta_+ = \frac{H}{2} + \frac{\pi n}{L}, \quad \beta_- = \frac{H}{2} - \frac{\pi n}{L}.$$

Следовательно, $\Delta k = |\beta_+ - \beta_-| = 2\pi n/L$, и в первом резонансе пропускания $n = 1$ и $\Delta k = 2\pi/L$, что удовлетворяет условию (12). Таким образом, спектральные компоненты, имеющие центрами волновые числа β_+ и β_- , значительно перекрываются.

Продемонстрируем это на примере структуры со следующими параметрами: $N = 20$, $\Lambda/\lambda_0 = 0.25$, $\epsilon_0 = 4$, $\mu = 0.01$. Пусть излучение падает нормально на границу раздела модулированной и немодулированной частей среды. Выбор значения параметра μ обеспечивает выполнение условия слабой брэгговской дифракции. Зависимость коэффициента отражения R такой структуры от нормированной частоты излучения изображена на рис. 4a. Буквами А, В, С обозначены, соответственно, третий, второй и

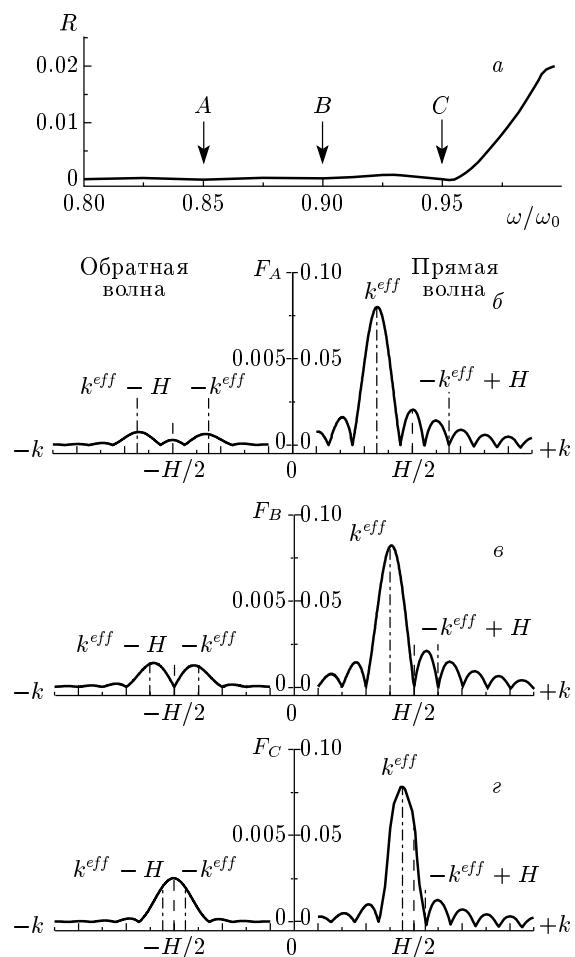


Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения R излучения от нормированной частоты ω/ω_0 в случае слабой брэгговской дифракции на косинусоидальной структуре (а); стрелками показаны третий (А), второй (В) и первый (С) резонансы пропускания. Пространственные спектры полей прямой и обратной волн при соответствии частоты сигнала резонансам пропускания: третьему, спектр F_A (б); второму, спектр F_B (в); первому, спектр F_C (г). Вертикальными штриховыми линиями показано положение компонент $H/2$, вертикальными штрихпунктирными — положение эффективных волновых векторов прямой, обратной и дифрагированных волн, рассчитанных в одноволновом приближении

первый резонансы пропускания. На рис. 4б–г изображены пространственные спектры $F(k)$ полей $E_{\pm}(z)$,

$$F(k) = \left| \frac{1}{2\pi L} \int_0^L \operatorname{Re}[E_{\pm}(z)] \exp(ikz) dz \right|,$$

в резонансах пропускания А (F_A), В (F_B), С (F_C);

k нормировано на величину $2\pi/L$. При $k < 0$ изображен спектр поля $E_{-}(z)$, при $k > 0$ — спектр поля $E_{+}(z)$. Вертикальные штрихпунктирные линии соответствуют положениям векторов $k^{eff} - mH$, $-k^{eff}$, k^{eff} , $-k^{eff} + mH$ для каждого резонанса пропускания ($m = 1$). На рис. 4б, в видно, что в спектре отраженного сигнала имеются две спектральные линии одинаковой интенсивности, центры которых соответствуют векторам $k^{eff} - mH$, $-k^{eff}$, эти компоненты отраженного сигнала формируются при дифракции прямой волны. В спектре же прямого сигнала присутствует лишь компонента с центром в k^{eff} , компонента $-k^{eff} + mH$ отсутствует. Такая ситуация имеет место вследствие слабой брэгговской дифракции, поскольку компонента $-k^{eff} + mH$ определяется дифракцией отраженного сигнала, а как следует из (9), $|E_{-}(z)| \sim \mu$.

При дифракции излучения вблизи первого резонанса пропускания (точка С, рис. 4г) для отраженного сигнала ситуация кардинально меняется. Как было показано выше аналитически, линии, соответствующие $k^{eff} - mH$ и $-k^{eff}$, перекрываются и образуют единую линию. Это демонстрирует рис. 4г, где координата центра результирующей спектральной линии отраженного сигнала равна $mH/2$, тогда как центр спектральной линии прямого сигнала по-прежнему соответствует k^{eff} .

Рассмотрим случай сильной дифракции. Для этого найдем пространственные спектры поля сигнала, распространяющегося в среде с косинусоидальным профилем функции диэлектрической проницаемости, параметры которой были указаны выше, за исключением $\mu = 0.5$. В этом случае приближение медленно меняющихся амплитуд уже неприменимо, и задача нахождения пространственного распределения полей решалась численно методом матриц переноса излучения. Кривая отражения излучения и пространственные спектры обратного и прямого полей излучения изображены на рис. 5. Обозначения, использованные на рис. 5, совпадают с обозначениями на рис. 4.

На рис. 5 видно, что спектры отраженных сигналов в случае слабой и сильной дифракций качественно не различаются, изменилась лишь их амплитуда. Спектр же прямого сигнала изменился: стала четко видна спектральная компонента, соответствующая волновому числу $-k^{eff} + mH$, причем в резонансе В она интенсивнее, чем в А (рис. 5б, в). Это объясняется тем, что при приближении к ФЗЗ брэгговское отражение усиливается. Увеличение амплитуды спектральной компоненты $-k^{eff} + mH$ приводит в тому, что при дифракции излучения в первом ре-

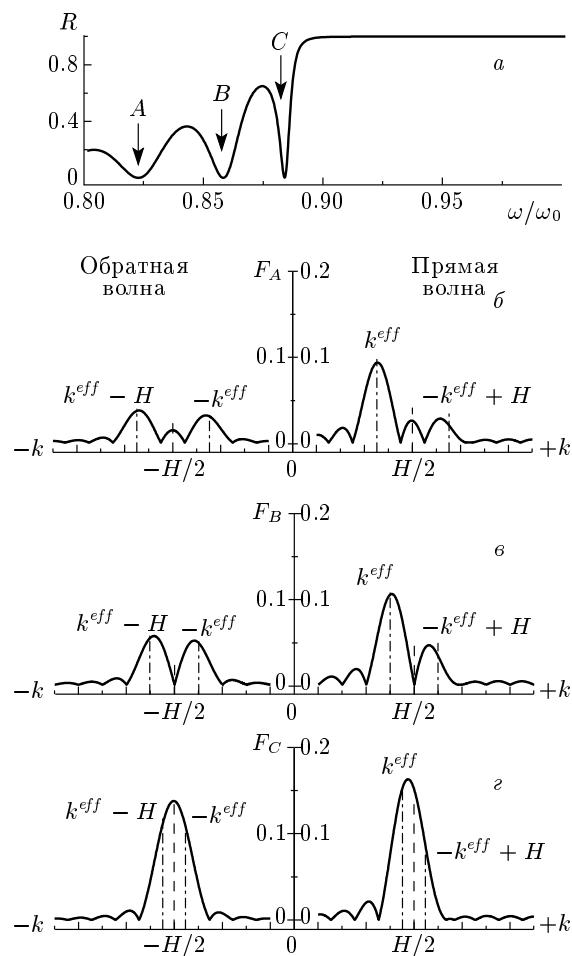


Рис. 5. Зависимость коэффициента отражения R излучения от нормированной частоты ω/ω_0 (а); пространственные спектры излучения в случае сильной брэгговской дифракции на косинусоидальной структуре (б, в, г). Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 4

зонансе пропускания С (рис. 5г) центр спектральной линии, образованный перекрытием обеих спектральных линий, оказывается смещен относительно k^{eff} в сторону координаты $mH/2$.

Полученные в настоящем разделе результаты применительно к задаче об эффективности взаимодействия излучений при генерации сигнала второй гармоники можно сформулировать следующим образом. Смещение центров спектральных линий взаимодействующих волн при генерации второй гармоники вблизи края соответствующей ФЗЗ приводит к тому, что условия фазового синхронизма (2)–(4) становятся некорректными как для отраженной волны в случае слабой дифракции, так и для отраженной и прямой волн в случае сильной дифракции.

Таким образом, для определения оптимальных условий генерации нелинейного сигнала необходимо учитывать эффективность перекрытия пространственных спектров взаимодействующих волн. Поскольку максимальная эффективность взаимодействия фундаментальных волн с сигналом второй гармоники будет иметь место при совпадении суммы волновых чисел наиболее интенсивных спектральных компонент основных волн (иными словами, волнового числа волны нелинейной поляризации) с центром линии сигнала второй гармоники, в этом случае вместо выражений (2), (3) необходимо использовать следующие модифицированные полуфеноменологические параметры синхронизма для центров уширенных спектральных линий:

$$\Delta^{(\pm)} = \left(\bar{k}_1^{(\pm)} + \bar{k}_2^{(\pm)} - \bar{k}_3^{(\pm)} \right) L, \quad (13)$$

характеризующие условия синхронизма

$$\Delta^{(\pm)} \leq \pi/2 \quad (14)$$

при генерации прошедшего $\Delta^{(+)}$ и отраженного $\Delta^{(-)}$ нелинейных сигналов. Здесь $\bar{k}_i^{(\pm)}$ — волновые числа, соответствующие центрам спектральных линий пространственных спектров прямой (+) и обратной (–) волн основных ($i = 1, 2$) и нелинейного ($i = 3$) сигналов.

Например, в случае сильной дифракции излучения вблизи первого резонанса пропускания центры линий отраженных сигналов точно определяются выражением $\bar{k}_i^{(-)} = m_i H/2$, где m_i — номер соответствующей ФЗЗ. Для прямых волн это равенство также выполняется, хотя и приближенно. Следовательно, как для отраженных, так и для прошедших волн параметры (13) можно записать в виде

$$\Delta^{(\pm)} = (m_1 + m_2 - m_3) \frac{HL}{2}.$$

Поэтому в случае, изображенном на рис. 2, где имеет место сильная дифракция и номера ФЗЗ $m_{1,2} = 2$, $m_3 = 4$, параметры $\Delta^{(\pm)} = (2 + 2 - 4)HL/2 = 0$ и условия фазового синхронизма выполнены точно. Это объясняет существование максимума интенсивности сигнала второй гармоники в точке В (рис. 2а). На рис. 2в изображены зависимости параметров (13) для прямого (•) и отраженного (○) сигналов от частоты излучения, где положения центров линий определялись непосредственно из пространственных спектров полей в структуре. Хорошо видно, что условия синхронизма (14) в приближении уширенных спектральных линий действительно выполняются вблизи первых резонансов пропускания.

4. ГЕНЕРАЦИЯ СИГНАЛА ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В БЛИЗИ ТОЧКИ ЗАПРЕЩЕННОГО БРЭГГОВСКОГО ОТРАЖЕНИЯ: СЛАБАЯ И СИЛЬНАЯ ДИФРАКЦИИ

Продемонстрируем выполнение модифицированных условий фазового синхронизма (13), (14) на примере генерации сигнала второй гармоники вблизи точки так называемого запрещенного брэгговского отражения. Эффект запрещенного брэгговского отражения имеет место в том случае, когда для волны, распространяющейся в слоистой структуре, выполнено условие Брэгга $2k = m\mathbf{H}$, однако каждый слой структуры удовлетворяет условию безотражательного прохождения света. Тогда вместо полного отражения сигнала от структуры, которое должно происходить при выполнении условия Брэгга, имеет место его полное пропускание. В частности, для фотонного кристалла, состоящего из чередующихся слоев двух типов, в случае распространения излучения вдоль нормали к его поверхности эффект запрещенного брэгговского отражения наблюдается, если оптические толщины d_1 нечетных и d_2 четных слоев будут кратны половине длины волны излучения. То есть $d_i = p\lambda/2n_i$, где p — любое положительное целое число, λ — длина волны излучения, $i = 1, 2$, индекс $i = 1$ соответствует нечетным слоям, $i = 2$ — четным, n_i — коэффициенты преломления слоев.

Рассмотрим изменение частотной зависимости интенсивности $I^{(\pm)}$ сигнала второй гармоники, генерируемого вблизи точки запрещенного брэгговского отражения для сигнала с частотой 2ω , при увеличении контраста $\Delta n = |n_1 - n_2|$ коэффициентов преломления материалов, из которых изготовлен фотонный кристалл, т. е. при увеличении брэгговской дифракции в нем, причем излучение основного сигнала распространяется вблизи края ФЗЗ. Для примера возьмем модельную среду, имеющую следующие параметры: $N = 15$, $d_{1,2} = 3\lambda_0/4n_{1,2}$, $n_1 = 1$, $n_{subs} = 1$, n_2 изменяется, нелинейными являются четные слои, материальная дисперсия отсутствует. Здесь использованы такие же обозначения, как и в разд. 2. Будем рассматривать генерацию сигнала в неколлинеарной геометрии взаимодействия (рис. 1).

Построим зависимости $I^{(\pm)}(\omega)$ для значений $n_2 = 1.1$ (рис. 6а, случай слабой дифракции), $n_2 = 1.3$ (рис. 6б, промежуточный случай), $n_2 = 2.5$ (рис. 6в, случай сильной дифракции). На рис. 6 изображены интенсивности прошедшего $I^{(+)}$ и отраженного $I^{(-)}$ сигналов второй гармоники, коэффициента отражения R сигнала второй гармоники и па-

раметров синхронизма Δ_{DPM} и $\Delta^{(+)}$, соответствующих (2) и (13). Вертикальные штрихпунктирные линии на рис. 6 показывают частотное положение максимума интенсивности $I^{(+)}(\omega)$ прямого сигнала второй гармоники. Левая шкала на графиках интенсивности соответствует проходящему, правая — отраженному нелинейным сигналам. Нормировка интенсивности нелинейного сигнала такая же, как и на рис. 2. При выбранных параметрах фотонного кристалла эффект запрещенного брэгговского отражения будет иметь место для сигнала второй гармоники, частота которого $2\omega_0$ соответствует центральному резонансу пропускания на частотной зависимости коэффициента отражения R сигнала второй гармоники (рис. 6). Остальные резонансы пропускания влево и вправо от него есть первые, вторые и т. д. резонансы пропускания, которые аналогичны резонансам пропускания вблизи ФЗЗ как по структуре распределения поля, так и по виду спектров. Они обозначены на графике кривой отражения номерами (-1) , (-2) и $(+1)$, $(+2)$, резонанс (0) — точка запрещенного брэгговского отражения.

На рис. 6а изображены зависимости интенсивности $I^{(\pm)}$, коэффициента отражения R и параметров синхронизма Δ_{DPM} и $\Delta^{(+)}$ в случае слабой дифракции излучения. На рисунке видно, что положение максимума интенсивности проходящего сигнала второй гармоники точно совпадает с положением нулевых значений параметров ДФС и $\Delta^{(+)}$. Пространственные спектры основных волн в силу выбранной геометрии взаимодействия аналогичны спектру, изображеному на рис. 4г, как для прямой, так и для обратной волн. Поэтому центр спектральной линии прямой волны всегда совпадает со значением $2k_{1z}^{eff}$, где k_{1z}^{eff} — z -проекция эффективного волнового вектора фундаментального сигнала, и значения параметров Δ_{DPM} и $\Delta^{(+)}$ при изменении частоты совпадают. Спектры сигнала второй гармоники в резонансе (± 2) имеют вид, аналогичный спектру на рис. 4в, а в резонансе (± 1) — на рис. 4г. Таким образом, модифицированные условия фазового синхронизма (14) для прямого сигнала выполняются вблизи резонанса пропускания (-2) , где перекрываются наиболее интенсивные спектральные компоненты взаимодействующих волн, а для отраженного сигнала вблизи резонансов пропускания (± 1) и точки запрещенного брэгговского отражения.

На рис. 6б изображены зависимости, аналогичные приведенным на рис. 6а, в промежуточном случае, когда дифракцию уже нельзя считать слабой. Как и ожидалось, для отраженного сигнала картина качественно не изменилась, увеличилась лишь

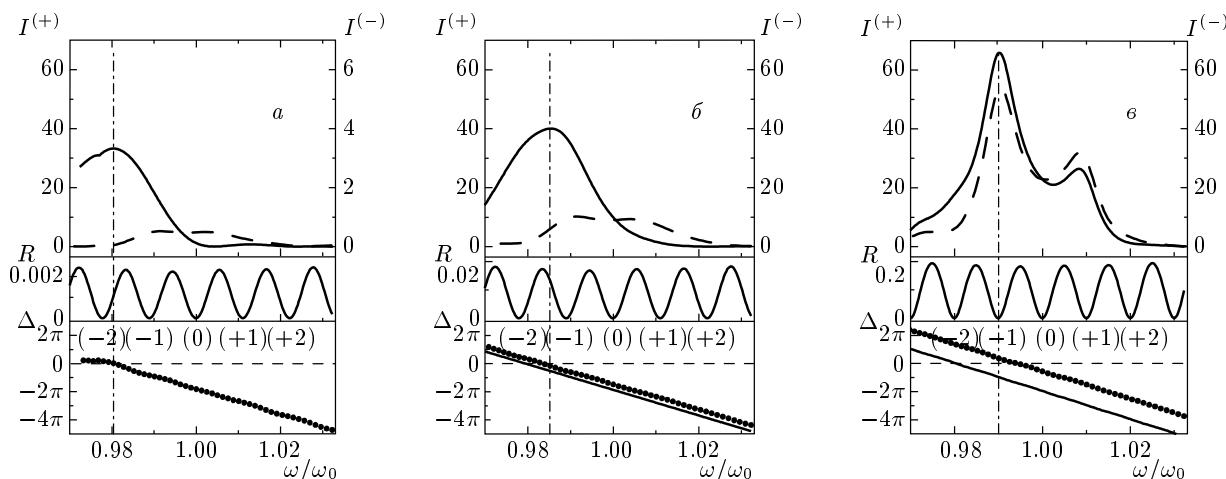


Рис. 6. Зависимости нормированной интенсивности прямого $I^{(+)}$ (сплошные линии) и отраженного $I^{(-)}$ (штриховые линии) сигнала второй гармоники, коэффициента отражения R сигнала второй гармоники, параметров синхронизма Δ_{DPM} (сплошные линии) и $\Delta^{(+)}$ (●) от нормированной частоты ω/ω_0 при контрасте коэффициентов преломления нечетных и четных слоев $\Delta n = 0.1$ (а), 0.3 (б), 1.5 (в). Вертикальные штрихпунктирные линии показывают частотное положение максимума интенсивности прошедшего сигнала второй гармоники

интенсивность нелинейного сигнала второй гармоники, поскольку вследствие усиления дифракции возросла амплитуда обратных волн. Максимум же интенсивности прошедшего сигнала второй гармоники сместился вправо относительно положения точки $\Delta_{DPM} = 0$, кривые $\Delta_{DPM}(\omega)$ и $\Delta^{(+)}(\omega)$ не совпадают. Это связано с тем, что в спектрах прямых сигналов, как линейного, так и нелинейного, появились спектральные компоненты с координатами $-k_z^{eff} + mH$, величины которых уже не малы. Положение нулевого значения параметра $\Delta^{(+)}$ совпадает с максимумом распределения интенсивности $I^{(+)}$ прошедшего нелинейного сигнала.

Наконец, на рис. 6 изображены зависимости при сильной дифракции излучений, когда спектральные компоненты прямых сигналов, соответствующие $-k_z^{eff} + mH$, становятся интенсивными. Результирующие линии в первых резонансах пропускания для основных волн имеют вид, аналогичный изображенным на рис. 5г, а положения их центров практически точно совпадают с $mH/2$. Поэтому максимумы интенсивности как прямого, так и обратного сигналов второй гармоники соответствуют резонансам пропускания (± 1).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере генерации сигнала второй гармоники проведено исследование условий наиболее эффективного нелинейного взаимодействия в конечном одномерном фотонном кристалле в случаях сильной и слабой дифракций. Использование ориги-

нальной неколлинеарной геометрии взаимодействия волн позволило реализовать условия несинхронного усиления сигнала второй гармоники и определить параметры волн, при которых одновременно наиболее точно выполняются и условия синхронизма. Показано, что учет ограниченности среды при генерации сигнала второй гармоники вблизи ФЗЗ или точки запрещенного брэгговского отражения приводит к изменению традиционных условий фазового синхронизма для прямых волн в случае сильной дифракции и для отраженных волн при сильной и слабой дифракциях. Предложены выражения для модифицированных условий фазового синхронизма в ограниченном фотонном кристалле, которые записываются не для точных значений эффективных волновых векторов отдельных блоховских мод, а для центров линий пространственных спектров, учитывающих перекрытие близких линий, уширенных вследствие конечных размеров образца. Использование таких модифицированных условий позволило наглядно объяснить предсказанный в настоящей работе эффект синхронного усиления нелинейного сигнала при совпадении первых резонансов пропускания для основной волны и сигнала второй гармоники вблизи ФЗЗ. Полученные результаты могут быть также использованы при анализе условий эффективности нелинейно-оптических преобразований других типов (параметрических, комбинационных, ВКР и др.) в ограниченных фотонных кристаллах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-02-16866).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Yablonovitch, J. Mod. Opt. **41**, 173 (1994).
2. K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals*, Springer, Berlin (2001).
3. *Nonlinear Photonic Crystals*, ed. by R. E. Slusher and B. J. Eggleton, Springer-Verlag, Berlin (2003).
4. A. Yariv and P. Yeh, J. Opt. Soc. Amer. **67**, 438 (1977).
5. M. Scalora, M. J. Bloemer, A. S. Manka et al., Phys. Rev. A **56**, 3166 (1997).
6. А. В. Балакин, Д. Бушев, В. А. Бушуев и др., Письма в ЖЭТФ **70**, 718 (1999).
7. Е. В. Петров, В. А. Бушуев, Б. И. Манцызов, Изв. РАН, сер. физ. **66**, 1787 (2002).
8. J. A. Giordmaine, Phys. Rev. Lett. **8**, 19 (1962).
9. J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, and P. S. Pershan, Phys. Rev. **127**, 1918 (1962).
10. M. M. Fejer, G. A. Magel, D. H. Jundt, and R. L. Byer, IEEE J. Quant. Electron. **28**, 2631 (1992).
11. А. С. Чиркин, В. В. Волков, Г. Д. Лаптев, Е. Ю. Морозов, КЭ **30**, 847 (2000).
12. Y. Fujii, B. S. Kawasaki, K. O. Hill, and D. C. Johnson, Opt. Lett. **5**, 48 (1980).
13. Y. Ohmori and Y. Sasaki, Appl. Phys. Lett. **39**, 466 (1981).
14. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Acad. Press, New York (1995).
15. M. Centini, C. Sibilia, M. Scalora et al., Phys. Rev. E **60**, 4891 (1999).
16. Y. Dumeige, I. Sagnes, P. Monnier et al., J. Opt. Soc. Amer. B **19**, 2094 (2002).
17. A. V. Balakin, V. A. Bushuev, B. I. Mantsyzov et al., Phys. Rev. E **63**, 046609 (2001).
18. G. D'Aguanno, M. Centini, M. Scalora et al., Phys. Rev. E **64**, 016609 (2001).
19. Б. И. Манцызов, Е. В. Петров, Е. Б. Терешин, В. А. Трофимов, Изв. РАН, сер. физ. **68**, 1710 (2004).
20. I. D. Olenik and M. Copic, Phys. Rev. E **56**, 581 (1997).
21. В. А. Беляков, Письма в ЖЭТФ **70**, 793 (1999).
22. J.-G. Yoo, S.-W. Choi, H. Hoshi et al., Jpn. J. Appl. Phys. Lett. **36**, L1168 (1997).
23. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1990).
24. Y. Dumeige, P. Vidakovic, S. Sauvage et al., Appl. Phys. Lett. **78**, 3021 (2001).
25. D. S. Bethune, J. Opt. Soc. Amer. B **6**, 910 (1989).