ЖЭТФ, 2005, том 127, вып. 4, стр. 915–924 

# ДИНАМИКА ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ СИЛОЙ

***В. В. Вечеславов*** [*]

*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера*
*630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 5 августа 2004 г.

Рассматривается семейство гладких двухпараметрических гамильтоновых систем с кусочно-линейной силой, представленных как в виде отображений, так и в непрерывной форме. Дается обзор полученных к настоящему времени аналитических и численных результатов исследований обстоятельств возникновения хаоса и глобальной диффузии в таких системах. Описываются динамические эффекты, не имеющие аналогов в классе аналитических гамильтонианов. Проводится сравнение с хорошо изученным случаем возмущенного маятника и подчеркиваются кардинальные различия в динамическом поведении гладких и аналитических систем.

PACS: 05.45.-a

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерные канонические отображения

$$\overline{p} = p + Kf(x), \quad \overline{x} = x + \overline{p} \pmod 1, \tag{1.1}$$

где $K$ — параметр возмущения, уже давно и широко используются в нелинейной физике как весьма удобные и чрезвычайно информативные модели [1–3].

Отображение (1.1) можно записать в полностью эквивалентной ему форме непрерывной системы с гамильтонианом, явно зависящим от времени, и возмущением в виде толчков [1–3]:

$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{2} + KV(x)\delta_1(t) = \\ = H_0(x,p) + H_1(x,t), \tag{1.2}$$

где $V(x) = -\int f(x)\,dx$ — потенциал силы и

$$\delta_1(t) = 1 + 2\sum_{n\geq 1} \cos(2\pi n t)$$

обозначает $\delta$-функцию периода 1.

Невозмущенная часть,

$$H_0 = \frac{p^2}{2} + KV(x), \tag{1.3}$$

представляет в (1.2) основной (целый) резонанс, а

$$H_1(x,t) = KV(x)(\delta_1(t) - 1) \tag{1.4}$$

рассматривается как возмущение с периодом $T = 1$ и частотой $\Omega = 2\pi/T = 2\pi$ от всех остальных резонансов.

Основной резонанс (1.3) является интегрируемой системой без всяких признаков хаоса и его сепаратрисы устроены следующим образом. Прежде всего, имеется седло — неподвижная точка, которую следует рассматривать как самостоятельную траекторию (невозмущенный маятник может находиться в ней бесконечно долго). От седла в противоположных направлениях отходят и затем асимптотически к нему же приближаются еще две траектории (сепаратрисы), каждая из которых является пограничной между вращением фазы (вне резонанса) и ее колебанием (внутри резонанса). На самом деле обе невозмущенные сепаратрисы состоят из двух пространственно совпадающих траекторий для направлений времени, соответственно, вперед и назад. Возмущение, как известно, расщепляет каждую сепаратрису на две ветви, которые пересекаются в так называемых гомоклинных точках.

Возмущенная система (1.2) является, как правило, неинтегрируемой, и ее фазовое пространство в общем случае оказывается разделенным на хаотическую и регулярную компоненты. Одной из важ-

[*] E-mail: vecheslavov@inp.nsk.su

ных для практики задач является выяснение условий образования единой хаотической компоненты и возникновения глобального хаоса. Эти условия в решающей степени определяются функциональными свойствами потенциала основного резонанса $V(x)$.

Создатели теории КАМ (Колмогоров – Мозер – Арнольд) с самого начала отмечали, что возникновение глобального хаоса и возможность диффузии по всей единой хаотической компоненте в фазовом пространстве зависят не только от величины возмущения, но и от гладкости системы. Гладкость удобно характеризовать скоростью убывания фурье-амплитуд. Для аналитических функций убывание является экспоненциальным. В этом случае всегда существует пороговая величина $K_{tr}$ и глобальный хаос возникает лишь при $K \gtrsim K_{tr}$. Если же $K \lesssim K_{tr}$, то хаос локализован в относительно узких хаотических слоях (которые образуются при любом $K > 0$) и глобальная диффузия при числе степеней свободы консервативной системы $N \leq 2$ невозможна.

Характер движения существенно изменяется для гладкого потенциала $V(x)$, у которого фурье-амплитуды убывают как некоторая степень $\beta + 1$ их номера $n$ (см. [4] и ссылки там). В простейшем случае двумерного отображения порог $K_{tr} > 0$ возникновения глобального хаоса существует всегда при $\beta > \beta_{cr} = 3$. Это значение критической гладкости получено из простой оценки в работе [4] и требует проверки в численных экспериментах. Строгое доказательство удалось получить только для $\beta_{cr} = 5$ (см. [5], где было также высказано предположение, что на самом деле $\beta_{cr} = 4$).

Возвращаясь к отображению (1.1), отметим, что оно изучалось для случаев как аналитических, так и гладких функций. Аналитической функции $f(x) = \sin(2\pi x)$, например, отвечает известное стандартное отображение Чирикова, результаты обширных исследований которого (как и его непрерывного варианта — гамильтониана маятника) внесли заметный вклад в современную нелинейную динамику.

Вместе с тем именно в классе гладких функций были обнаружены некоторые новые динамические эффекты, о которых будет сказано ниже и которые не имеют места в аналитическом случае.

Настоящая работа посвящена гладким гамильтоновым системам, в которых синусоидальная сила заменена ее кусочно-линейным аналогом — пилой, с показателем гладкости $\beta = 2$ (см. разд. 2). Именно для этого показателя ситуация долгое время оставалась неясной, и здесь уместно кратко напомнить историю этого вопроса.

Уже в ранних численных экспериментах с системами, гладкость которых была ниже критической $\beta < \beta_{cr} = 3$, наряду с глобальной диффузией наблюдались случаи, когда траектории в течение весьма длительного времени счета не выходили за пределы некоторой ограниченной части фазового пространства [6, 7]. Однако это было не более чем подозрение на подавление или ослабление диффузии. Строгий результат был получен Булитом [8]. Для симметричного кусочно-линейного двумерного отображения (СКЛО) с $\beta = 2$ Булит доказал существование глобальных инвариантных кривых как с иррациональными, так и с рациональными числами вращения (см. также [9]). Такие глобальные инвариантные кривые имеют полную протяженность по фазе, что исключает неограниченную диффузию по действию.

В работе [8] впервые было показано, что среди инвариантных кривых с рациональными числами вращения присутствуют также неразрушенные сепаратрисы целых и дробных нелинейных резонансов. Особенно важным и неожиданным оказался тот факт, что система при этом отнюдь не становится интегрируемой и сепаратрисы сохраняются и запирают глобальную диффузию в условиях сильного локального хаоса.

По непонятным причинам эта важная и интересная работа Булита не получила в свое время широкой известности и значительно позже для той же самой модели СКЛО аналогичная теорема была независимо доказана Овсянниковым [10]. Он не только указал счетное множество значений параметра $K$, при которых в условиях локального хаоса сохраняются сепаратрисы целых резонансов, но и нашел для них явное выражение. Именно сообщение Овсянникова послужило для нас толчком к интенсивному исследованию СКЛО и его модификаций, результаты которых представлены в работах [11–17]. Теорема Овсянникова нигде не была опубликована и с разрешения автора мы поместили ее полный текст в приложениях к работам [12, 13]). Замечу попутно, что в первых публикациях [11, 12] на эту тему статья Булита не упоминается по той простой причине, что тогда она еще не была известна автору.

Следует подчеркнуть, что математические работы Булита и Овсянникова ограничены исследованием только самих инвариантных кривых нового типа, так как в противном случае две ветви расщепленных сепаратрис образуют не поддающиеся аналитическим исследованиям случайные траектории (это может быть сделано только в эксперименте — численном [11–17] или физическом).

Каждой инвариантной кривой в СКЛО отвечает определенное значение параметра возмущения $K$. В работе [11] предложено называть такие значения критическими и обозначать их символом $K_{Q,n}$, где $Q$ обозначает номер резонанса ($Q = 1$ — целый, $Q \geq 2$ — дробный), а $n$ — порядковый номер этого критического числа. Например, для критических чисел целого резонанса по теореме Овсянникова имеем

$$K_{1,n} = \sin^2 \frac{\alpha_n}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.5}$$

где $\alpha_n$ — наименьший положительный корень уравнения

$$\sqrt{2} \sin \frac{n\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}. \tag{1.6}$$

В работах [11–14] при численном отыскании критических чисел $K_{Q,n}$ использовался тот факт, что в случае кусочно-линейной силы именно для этих чисел угол пересечения ветвей сепаратрис в центральной гомоклинной точке проходит через нуль (для нечетных номеров $n$ плавно, для четных скачком меняет знак). В литературе уже отмечался тот факт, что из всех атрибутов хаоса только этот угол может быть измерен сколь угодно точно [14]. Надо заметить, что в общем случае обращение угла пересечения сепаратрис в нуль не является признаком их обязательного сохранения. В работе [17] приведен пример, когда ветви расщепившихся сепаратрис лишь касаются в гомоклинной точке, которая оказывается точкой перегиба.

Множество всех критических чисел является канторовым, и имеются интервалы значений параметра $K$, где глобальная диффузия определенно имеет место (один такой интервал $0.2295 < K < 0.2500$ для $d = 1/2$ явно указан в работе [8]).

Дальнейшее изучение показало, что каждая из обнаруженных Булитом глобальных инвариантных кривых (включая нерасщепленные сепаратрисы целых и дробных резонансов), возникающих при точном значении параметра $K_{Q,n}$, на самом деле существенно искажает структуру фазовой плоскости и в некоторой конечной окрестности $K_{Q,n}$. Это дало основание предложить новый термин — виртуальная инвариантная кривая. Наличие таких виртуальных кривых приводит к совершенно новому и очень сложному типу транспортного процесса в гладкой системе — так называемой фрактальной диффузии (подробности в работах [15, 16]). Исследование этой диффузии только началось и сразу же обнаружило много открытых и требующих специального рассмотрения вопросов, которые не включены в настоящий обзор.

Выше уже отмечалась важная роль, которая в нелинейной динамике принадлежит стандартному отображению и его непрерывному варианту — гамильтониану возмущенного маятника. При разработке теории хаотического слоя маятника Чириков широко использовал введенные им интегралы Мельникова – Арнольда, которые определяют величину амплитуды отвечающего за формирование хаотического слоя сепаратрисного отображения системы во всем диапазоне частот возмущений [1].

При исследовании гладких систем с кусочно-линейной силой также оказалось очень полезным наряду с отображением (1.1) рассматривать непрерывный гамильтониан (разд. 2). Аналитические выражения интегралов Мельникова – Арнольда для этого случая впервые, насколько известно автору, были получены в работах [13, 17]. Они полностью отражают весьма своеобразную динамическую специфику системы, включая наличие критических чисел и сохранение сепаратрис в условиях локального хаоса. Эти интегралы используются ниже для выяснения деталей формирования хаоса (разд. 3).

Полученные результаты для непрерывной системы с кусочно-линейной силой сравниваются с хорошо изученным случаем возмущенного маятника и отмечаются сходства и различия в динамическом поведении этих двух систем (разд. 4, 5).

## 2. ГАМИЛЬТОНИАН ЗАДАЧИ

Наряду с отображением (1.1) рассмотрим также непрерывную систему с гамильтонианом вида

$$\begin{gathered} H(x,p,t) = H_0(x,p) + U(x,t), \\ H_0(x,p) = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2 V(x), \end{gathered} \tag{2.1}$$

и двухчастотным, в общем случае несимметричным, возмущением

$$U(x,t) = \varepsilon_1 \cos(2\pi m_1 x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(2\pi m_2 x - \Omega_2 t), \tag{2.2}$$

где $m_1$, $m_2$ — целые числа и $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2 \ll 1$.

Оба члена в (2.2) также являются резонансами. Будем всегда полагать первую частоту положительной, $\Omega_1 > 0$, и называть ее верхней гармоникой возмущения (на фазовой плоскости она находится выше основного резонанса). Второй член в (2.2) при $\Omega_2 < 0$ будем считать по аналогии нижней гармоникой.

Потенциал системы (2.1)

$$V(x) = \frac{1}{4} - \int f(x)\,dx$$

порождается антисимметричной, $f(-x) = -f(x)$, кусочно-линейной силой с периодом 1:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1-d}, & 0 \le x < \dfrac{1-d}{2}, \\ \dfrac{1-2x}{d}, & \dfrac{1-d}{2} \le x \le \dfrac{1+d}{2}, \\ \dfrac{2(x-1)}{1-d}, & 1+d < x < 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Он может быть представлен своим рядом Фурье [15]:

$$\begin{gathered} V(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n\ge1} \frac{f_n}{2\pi n^{\beta+1}} \cos(2\pi n x), \\ f_n = -\frac{2}{\pi^2}\,\frac{\cos(n\pi)\sin(n\pi d)}{d(1-d)}, \end{gathered} \tag{2.4}$$

где $\beta = 2$ — показатель гладкости.

Формулы (2.3), (2.4) содержат параметр перекоса $d$, что позволяет исследовать сразу целое семейство пилообразных зависимостей [8, 14]. К настоящему времени наиболее полно изучен случай СКЛО с $d = 1/2$. Отметим, что обнаруженные в работах [8, 10–17] новые динамические эффекты и глобальные инвариантные кривые имеют место во всем открытом интервале $0 < d < 1$ значений параметра перекоса при следующем найденном в [8] условии для параметра возмущения $K$ (1.1):

$$K \le K_B(d) = \frac{2d^2}{1+d}. \tag{2.5}$$

При $K > K_B$ глобальные инвариантные кривые в системе (1.1), (2.3) полностью отсутствуют.

Из формул (2.4) для особого случая разрывной пилы для предельного перехода $d = 0$ получаем

$$f_n = -\frac{2}{\pi}\cos(n\pi), \quad \beta = 1. \tag{2.6}$$

Видно, что показатель гладкости системы $\beta$ в пределе $d = 0$ на единицу меньше его значения внутри интервала и оба они меньше критической величины $\beta_{cr} = 3$. В этом случае движение оказывается эргодическим, инвариантные кривые полностью отсутствуют и глобальная диффузия происходит при любом $K > 0$. Заметим попутно, что другой предел $d = 1$ неинтересен, поскольку движение при этом становится регулярным [14].

Характерной особенностью силы (2.3) является наличие на ее периоде двух участков: с отрицательным («эллиптический» участок) и положительным («гиперболический» участок) значениями производной $df/dx$. На границах этих участков имеет место сингулярность — разрыв первой производной.

Движение по верхней невозмущенной сепаратрисе ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$) описывается функцией безразмерного времени $\psi = 2\omega_0 t$ вида

$$x_s(\psi_s) = \begin{cases} A_d \exp\dfrac{\psi_s}{\sqrt{2(1-d)}}, & -\infty < \psi_s < -\psi_{s,1}, \\ \dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{d}\sin\dfrac{\psi_s}{\sqrt{2d}}\right), & -\psi_{s,1} \le \psi_s \le \psi_{s,1}, \\ 1 - A_d \exp\left(-\dfrac{\psi_s}{\sqrt{2(1-d)}}\right), & \psi_{s,1} < \psi_s < \infty, \end{cases} \tag{2.7}$$

импульс находится дифференцированием: $p_s = \dot{x} = 2\omega_0\,dx_s/d\psi_s$. Здесь использованы обозначения

$$\begin{gathered} \psi_{s,1} = \sqrt{2d}\,\arcsin\sqrt{d}, \\ A_d = \frac{1-d}{2}\exp\frac{\psi_{s,1}}{\sqrt{2(1-d)}}. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии обозначено $w = H_0/H_{0,s} - 1$ при значении гамильтониана на сепаратрисе $H_{0,s} = \omega_0^2/4$. Период движения $T_0$ вблизи сепаратрисы вычисляется по формуле

$$T_0(w) = 2T_{s,1} + \frac{1}{\omega_2}\ln\frac{4\sqrt{1-d}\,\cos(\omega_1 T_{s,1})}{|w|}, \tag{2.9}$$

где

$$\begin{gathered} \omega_1 = \omega_0\sqrt{\frac{2}{d}}, \quad \omega_2 = \omega_0\sqrt{\frac{2}{1-d}}, \\ T_{s,1} = \frac{\arcsin\sqrt{d}}{\omega_1}. \end{gathered} \tag{2.10}$$

При численном определении размеров хаотического слоя используется связь относительной энергии $w$ с периодом движения $T_0$, которая описывается обратной к (2.9) зависимостью:

$$w(T_0) = 4\sqrt{1-d}\cos(\omega_1 T_{s,1}) \times \times \exp(-\omega_2(T_0 - 2T_{s,1})). \quad (2.11)$$

Вывод формул (2.7)–(2.11) можно найти в работе [17].

В следующих разделах будем сравнивать обстоятельства возникновения хаоса в исследуемых гладких системах со случаем хорошо изученного возмущенного маятника, гамильтониан которого запишем в виде

$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{2} + \cos x + U(x,t), \quad (2.12)$$

где частота малых колебаний принята за единицу и возмущение в общем случае определяется выражением (2.2).

## 3. ИНТЕГРАЛ МЕЛЬНИКОВА – АРНОЛЬДА ДЛЯ СИСТЕМЫ (2.1)

Возмущение, как известно, в общем случае разрушает сепаратрисы основного резонанса и образует на их месте хаотический слой, в котором следует различать три части: верхняя — вращение фазы при $p > 0$, средняя — колебания фазы и нижняя — вращение фазы при $p < 0$. При несимметричном возмущении размеры этих частей могут сильно различаться. Заметим, что верхняя часть слоя формируется преимущественно под влиянием верхних резонансов, нижняя — под влиянием нижних, а средняя — тех и других [17]. Мы будем в основном исследовать верхнюю часть хаотического слоя.

Рассмотрим пока одну верхнюю гармонику в возмущении (2.2) и, следуя описанной в работе [1] методике, будем искать вызванное этой гармоникой изменение невозмущенной энергии $H_0$ за полупериод колебаний или период вращения:

$$\Delta H_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{H,\, H_0\}\, dt = -\varepsilon_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(t)\,\frac{\partial U}{\partial x}\, dt = = 2\pi m\varepsilon_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(t)\sin(2\pi m_1 x - \tau - \tau_0)\, dt = = 2\pi m_1\varepsilon_1 \sin\tau_0 W_{MA},$$

где $\{\,,\}$ — скобка Пуассона, $\tau = \Omega_1 t$, $W_{MA}$ — интеграл Мельникова – Арнольда,

$$W_{MA} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_s(t)\cos[2\pi m_1 x_s(t) - \Omega_1 t]\, dt. \quad (3.1)$$

Здесь учтена только четная функция в разложении $\sin(2\pi m_1 x - \tau - \tau_0)$ и предположено, что система движется вблизи невозмущенной сепаратрисы.

Заметим попутно, что входящий в подынтегральное выражение (3.1) множитель $p_s$ снимает известную проблему специальной нормировки этого интеграла для подавления его осциллирующей части, поскольку при движении по невозмущенной сепаратрисе асимптотически стремится к нулю в обоих бесконечных пределах интегрирования (подробности в разд. 4.4 обзора [1]).

Амплитуда гармоники сепаратрисного отображения частоты $\Omega$ полностью определяется свойствами и поведением интеграла Мельникова – Арнольда, поскольку пропорциональна ему:

$$W = \pm\max|\overline{w} - w| = \pm\frac{\Delta H_0}{H_{0,s}} = \frac{8\pi m\varepsilon}{\omega_0^2}\, W_{MA}. \quad (3.2)$$

Переходя к безразмерному времени $\psi = 2\omega_0 t$ и вычисляя соотношение (3.1) вдоль невозмущенной сепаратрисы (2.7), находим, что вклад верхней гармоники возмущения в верхнюю часть хаотического слоя определяется выражением:

$$W_{MA}(\lambda_1 > 0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\psi_{s,1}} \cos\frac{\psi}{\sqrt{2d}} \times \times \cos\left[\pi m_1\left(1 + \sqrt{d}\sin\frac{\psi}{\sqrt{2d}}\right) - \lambda_1\psi\right] d\psi - - A_d\sqrt{\frac{2}{1-d}}\int\limits_{\psi_{s,1}}^{\infty} \exp\left(\frac{-\psi}{\sqrt{2(1-d)}}\right) \times \times \cos\left[2\pi m_1 A_d \exp\left(\frac{-\psi}{\sqrt{2(1-d)}}\right) + \lambda_1\psi\right] d\psi, \quad (3.3)$$

где $\lambda_1 = \Omega_1/2\omega_0$ — параметр адиабатичности [1].

Можно показать, что для вычисления вклада нижней гармоники возмущения в верхнюю часть хаотического слоя вместо (3.3) надо использовать формулу

$$W_{MA}(\lambda_2<0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\psi_{s,1}}\cos\frac{\psi}{\sqrt{2d}}\times$$
$$\times\cos\left[\pi m_2\left(1+\sqrt{d}\sin\frac{\psi}{\sqrt{2d}}\right)+|\lambda_2|\psi\right]d\psi+$$
$$+A_d\sqrt{\frac{2}{1-d}}\int\limits_{\psi_{s,1}}^{\infty}\exp\left(\frac{-\psi}{\sqrt{2(1-d)}}\right)\times$$
$$\times\cos\left[2\pi m_2A_d\exp\left(\frac{-\psi}{\sqrt{2(1-d)}}\right)-|\lambda_2|\psi\right]d\psi,\quad(3.4)$$

где $\lambda_2=\Omega_2/2\omega_0$.

Полная амплитуда сепаратрисного отображения для верхней части слоя определяется с помощью (3.2) как сумма вкладов в эту часть слоя от всех входящих в возмущение гармоник. В следующих двух разделах мы используем полученные здесь соотношения для анализа поведения системы (2.1) с симметричным и несимметричным возмущением (2.2).

## 4. СИММЕТРИЧНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

Выберем параметры возмущения (2.2) так, чтобы сделать его симметричным:

$$\begin{gathered}\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon\,,\quad m_1=m_2=m\,,\\ \Omega_1=-\Omega_2=\Omega.\end{gathered}\qquad(4.1)$$

Вначале напомним особенности образования хаоса в зависимости от частоты симметричного возмущения в случае маятника (2.12). Весь диапазон частот условно разбивается на участки низких частот, средних, или умеренных, частот и высокочастотный. Исследования Чирикова, выполненные в работе [1], показали, что в высокочастотном пределе, $\Omega\to\infty$, амплитуда $W$ сепаратрисного отображения и энергетический размер хаотического слоя с ростом частоты убывают экспоненциально, и что все три части слоя имеют при этом одинаковую ширину

$$w_{tp}=|w_{md}|=w_{bt}=\lambda W,\qquad(4.2)$$

где для маятника (2.12) $\lambda\equiv\Omega$ и $w=p^2/2+\cos x-1$ — относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии.

В недавней работе [18] также для симметричного возмущения маятника рассматривалась низкочастотная асимптотика $\Omega\to0$ и было найдено, что в этом случае амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, а ширина слоя вообще от нее не зависит.

Обе эти асимптотики, $\Omega\gg1$ и $\Omega\ll1$, устроены относительно просто, и наиболее трудной для анализа является область средних частот, где отсутствует какой-либо малый (или большой) параметр адиабатичности. Основная трудность здесь состоит в том, что размер хаотического слоя в этой области оказывается разрывной функцией амплитуды сепаратрисного отображения $W$ [19]. Такая структура в рамках современной динамики объясняется тем, что с ростом $W$ происходит последовательное разрушение инвариантных кривых с иррациональными числами вращения. Если такая кривая является границей между основным хаотическим слоем и ближайшим к нему резонансом сепаратрисного отображения, то при ее разрушении происходит слияние этих объектов и размер слоя прирастает на конечную величину — фазовый объем присоединившегося резонанса.

Весьма полезными здесь оказались так называемые резонансные инварианты, которые неплохо передают топологию отдельных резонансов. Техника построения и примеры использования таких инвариантов первых трех порядков, соответствующих резонансам 1 : 1, 1 : 2 и 1 : 3, предложены для стандартного отображения в работе [20] и для одночастотного сепаратрисного отображения в работе [19].

Вернемся вновь к гладкой системе и выясним особенности образования хаоса при низких и высоких частотах. Суммируя вклады от обеих гармоник, получаем выражение результирующего интеграла Мельникова – Арнольда для верхней части слоя

$$W_{MA}(\lambda)=\sqrt{2}\int\limits_0^{\psi_{s,1}}\cos\frac{\psi}{\sqrt{2d}}\times$$
$$\times\sin\left[\pi m\left(1+\sqrt{d}\sin\frac{\psi}{\sqrt{2d}}\right)\right]\times$$
$$\times\sin(\lambda\psi)\,d\psi+2A_d\sqrt{\frac{2}{1-d}}\times$$
$$\times\int\limits_{\psi_{s,1}}^{\infty}\exp\left(\frac{-\psi}{\sqrt{2(1-d)}}\right)\times$$
$$\times\sin\left[2\pi mA_d\exp\left(\frac{-\psi}{\sqrt{2(1-d)}}\right)\right]\sin(\lambda\psi)\,d\psi,\quad(4.3)$$

где $\lambda=\Omega/2\omega_0$. Первое слагаемое в этой формуле описывает вклад от «эллиптического» участка силы (2.3), второе — от остальной части.

Начнем со случая $\lambda\to0$. Выполним в обеих частях (4.3) замену $\sin(\lambda\psi)\to\lambda\psi$, вынесем $\lambda$ за знак интеграла и найдем, что в низкочастотном пределе

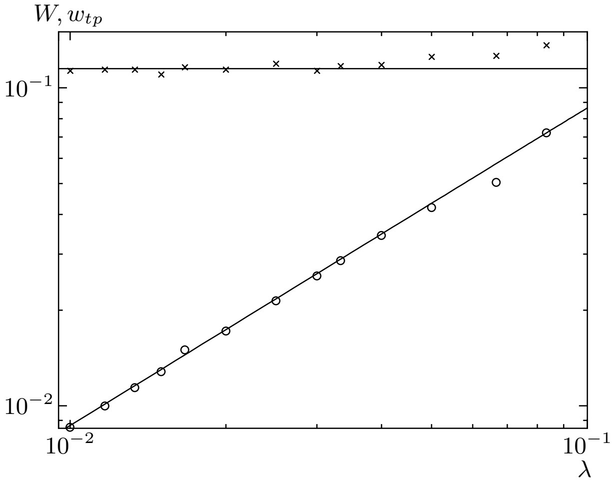


**Рис. 1.** Низкочастотная асимптотика ($\Omega \to 0$) системы (2.1) при симметричном возмущении. Кружки — полученные численно амплитуды сепаратрисного отображения $W$. Кресты — размер верхней части хаотического слоя $w_{tp}$, найденный с помощью итераций этого отображения. Наклонная прямая — интеграл Мельникова – Арнольда, построенный по формуле (4.3) и умноженный на подгоночный множитель 0.75

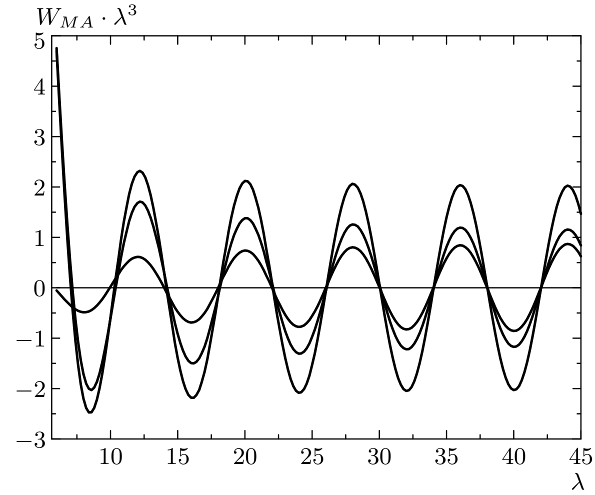


**Рис. 2.** Высокочастотная асимптотика ($\Omega \to \infty$) системы (2.1) при симметричном возмущении. Внешняя кривая описывает совместное действие верхней и нижней гармоник возмущения, средняя — одной верхней, внутренняя — одной нижней гармоники

интеграл Мельникова – Арнольда (а значит, и амплитуда сепаратрисного отображения $W$) растет линейно с увеличением частоты:

$$W \propto W_{MA} \propto \lambda. \tag{4.4}$$

Подчеркнем, что учет бесконечных пределов интегрирования в (4.3) ничего не меняет, поскольку, как отмечено выше, вклад «хвостов» этого интервала подавлен асимптотически стремящейся к нулю величиной импульса на невозмущенной сепаратрисе.

В работе [18] показано, что если амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, то ширина хаотического слоя от нее не зависит. Рисунок 1, построенный для симметричной системы (2.1), (2.2) с параметрами $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.01$, подтверждает этот факт, и мы убеждаемся, что в низкочастотном пределе система с кусочно-линейной силой и маятник ведут себя качественно одинаково.

Любопытной особенностью системы (2.1) является то, что ее сепаратрисное отображение при $\lambda \ll 1$ содержит две гармоники — с одинарной и с двойной частотой. В области средних частот вторая гармоника исчезает и сепаратрисное отображение становится одночастотным. Напомним, что у маятника все наоборот: двойная частота имеет место только в области средних частот и исчезает при подходе к обоим асимптотическим участкам, $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$ [21].

Перейдем к анализу случая высокой частоты $\Omega \to \infty$, где картина резко и качественно меняется. В этом пределе оба слагаемых в формуле (4.3) оказываются колебательными и знакопеременными, их колебания находятся почти в противофазе. Результирующая функция $W_{MA}(\lambda)$ также является знакопеременной и колебательной (см. рис. 2).

В работе [17] выполнены некоторые асимптотические ($\lambda \to \infty$) оценки интегралов Мельникова – Арнольда (3.3), (3.4), которые позволяют сделать следующие выводы.

Эти интегралы при $\lambda \gg 1$ оказываются периодическими по $\lambda$ функциями,

$$W_{MA}(\lambda) \approx (-1)^m \frac{|\lambda|^{-3}}{4d} \sqrt{\frac{1-d}{2}} \times \\ \times \left(1 \pm \pi |\lambda|^{-1} \sqrt{\frac{1-d}{2}}\right) \sin\left(\pi m d \mp |\lambda|\, \psi_{s,1}\right) \tag{4.5}$$

(верхние знаки отвечают верхней гармонике), с периодом

$$T_\lambda = \frac{2\pi}{\psi_{s,1}} = \frac{\pi}{\arcsin\sqrt{d}} \sqrt{\frac{2}{d}}. \tag{4.6}$$

На рис. 2 построены зависимости приведенного интеграла Мельникова – Арнольда $W^*_{MA} = W_{MA}\lambda^3$ для симметричной пилы $d = 1/2$. При значениях

$d \neq 1/2$ характер этих зависимостей остается таким же, но гармоники сдвигаются по фазе. Видно, что формулы (4.5) качественно правильно передают характер этих зависимостей, хотя и нуждаются в числовых поправках.

Выполненное в работе [13] итерирование сепаратрисного отображения для полученных через интеграл Мельникова – Арнольда амплитуд показало, что найденная Чириковым связь (4.2) между шириной хаотического слоя и амплитудой сепаратрисного отображения $W$ неплохо выполняется и для гладкой системы,

$$w_{tp} \approx \lambda \, |W|, \tag{4.7}$$

причем даже в окрестности нулевых значений $W$. При $\lambda = \Omega/2\omega_0 > 10$, например, имеет место неравенство $0.94 \leq w_{tp}/\lambda \, |W| \leq 1.3$.

Полученные выше для непрерывной гладкой системы (2.1) результаты можно прямо связать с отображением (1.1) [13]. Будем называть критическими те значения $\lambda_{1,n}$, $n = 1, 2, \ldots$, при которых интеграл Мельникова – Арнольда проходит через нуль, $W_{MA}(\lambda_{1,n}) = 0$ (первый индекс относится к основному резонансу). Чтобы перевести непрерывную систему (2.1) с параметром $\lambda$ в отображение (1.1) с параметром $K$ или наоборот, надо воспользоваться соотношением

$$K = {\omega_0}^2 = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Последнее равенство позволяет пересчитать критические значения $\lambda_{1,n}$ непрерывной системы в критические значения параметра отображения. Обозначив найденные путем такого пересчета величины через $K^*$, получим

$$K^*_{1,n} = \left(\frac{\pi}{\lambda_{1,n}}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Эти числа следует сравнить с величинами $K_{1,n}$, вычисленными по формулам Овсянникова (1.5), (1.6). Результат такого сравнения хорошо описывается приближенной формулой

$$\frac{K_{1,n}}{K^*_{1,m}} \approx 1 + 0.676 \, n^{-0.875}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

В асимптотическом пределе ($n \gg 1$) множества $K_{1,n}$ и $K^*_{1,n}$ совпадают, что и оправдывает применение полученных здесь результатов в отношении отображения (1.1).

Найденные при $\Omega \gg 1$ для гладкой системы периодические зависимости с убывающей по степенному закону $\lambda^{-3}$ амплитудой резко отличаются от случая аналитического потенциала, где $W_{MA}(\lambda)$ всегда монотонная и экспоненциально убывающая функция $\lambda$. Более того, при одинаковых по модулю частотах вклад нижней гармоники в верхнюю часть хаотического слоя меньше вклада верхней гармоники в $\exp(-\pi \, |\lambda|)$ раз [1]. В системе с кусочно-линейной силой все не так — с ростом частоты вклады в сепаратрисное отображение верхней и нижней гармоник сближаются. Столь глубокие различия двух обсуждаемых типов систем связаны, по-видимому, с существенно разным расположением сингулярностей интеграла Мельникова – Арнольда: для гладкого потенциала они находятся на действительной оси времени, а для маятника — в комплексной плоскости.

## 5. НЕСИММЕТРИЧНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

Несимметричное возмущение (2.2) с высокими частотами $\Omega_1$, $|\Omega_2| \gg 1$, насколько нам известно, впервые было рассмотрено в работах [22, 23] на примере гамильтониана маятника (2.12). Именно в этом случае в возмущении на комбинациях первичных (явно входящих в гамильтониан) частот возникают вторичные гармоники порядка $\varepsilon_1\varepsilon_2$:

$$\Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2, \quad \Delta\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1, \tag{5.1}$$

которые при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$ оказываются много слабее первичных.

Уже первые численные эксперименты с этой системой позволили обнаружить тот удивительный на первый взгляд факт, что именно эти весьма слабые вторичные гармоники возмущения при определенных условиях полностью определяют амплитуду сепаратрисного отображения и размер хаотического слоя.

В работе [23] дан пример такой системы с параметрами $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.075$, $\Omega_1 = 13$, $\Omega_2 = -10$, причем образующаяся на сумме частот $\Delta\Omega_+ = 3$ вторичная гармоника имела в возмущении амплитуду, примерно равную $4.5 \cdot 10^{-5}$, что приблизительно в 1700 раз меньше амплитуд первичных гармоник. Несмотря на это ее вклад в амплитуду отвечающего за образование хаоса сепаратрисного отображения верхней части слоя превысил суммарный вклад от первичных гармоник почти в 400 раз. Размеры и спектральный состав отдельных частей слоя оказались при этом существенно различными. Все это есть следствие упоминавшейся выше экспоненциальной зависимости ширины хаотического слоя маятника от частоты при $\Omega \gg 1$, что и позволяет очень слабым, но низкочастотным вторичным гармоникам решающим образом влиять на образование хаоса.

Для гладкой системы такая же картина имеет место в отношении гармоник на сумме частот, в то время как на разности частот эффект оказывается заметно слабее, чем для маятника [17].

Амплитуды вторичных гармоник возмущения заранее неизвестны и их необходимо найти. Строгая теория здесь пока отсутствует, однако общий подход к проблеме и способ получения приближенных аналитических соотношений был предложен в работе [22]. Следуя ей (см. также [17]), необходимо сделать в (2.1), (2.2) замену переменных, введя вместо координаты $x(t)$ и импульса $p(t)$ их отклонения от значений на невозмущенной сепаратрисе $x_s(t)$, $p_s(t)$ (2.7). Считая эти отклонения малыми и пренебрегая членами порядка выше второго, можно показать, что в возмущении появляются вторичные гармоники как на сумме частот:

$$\begin{gathered}\varepsilon_+ \cos(2\pi m_+ x_s - \Delta\Omega_+ t), \\ \varepsilon_+ = -2\pi^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2 \left(\frac{m_1}{\Omega_2^2} + \frac{m_2}{\Omega_1^2}\right),\end{gathered} \tag{5.2}$$

где $m_+ = m_1 + m_2$, так и на их разности:

$$\begin{gathered}\varepsilon_- \cos(2\pi m_- x_s - \Delta\Omega_- t), \\ \varepsilon_- = -2\pi^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2 \left(\frac{m_1}{\Omega_2^2} - \frac{m_2}{\Omega_1^2}\right),\end{gathered} \tag{5.3}$$

где $m_- = m_2 - m_1$ (при выводе последних формул предполагались выполненными неравенства $|\Omega_{1,2}| \gg 2\pi m_{1,2}\, p_{s,max}$).

Ограничимся наиболее интересным случаем суммы частот и будем рассматривать близкие по модулю первичные частоты. Возникающая при этом вторичная гармоника оказывается низкочастотной и предстоит выяснить, следует ли она зависимостям, найденным в предыдущем разделе при $\lambda \ll 1$ для первичных частот в симметричном случае.

Вначале рассмотрим систему (2.1), (2.2) с высокочастотным симметричным возмущением:

$$\begin{gathered}\omega_0^2 = 0.09, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05, \quad m_1 = m_2 = 1, \\ \Omega_1 = 30.0, \quad \Omega_2 = -30.\end{gathered} \tag{5.4}$$

Картинка построенного численно (подробности приведены в работе [22]) сепаратрисного отображения выглядит чистой синусоидой с амплитудой $W = 1.65 \cdot 10^{-4}$. Итерации этого отображения показали, что размеры всех трех частей слоя одинаковы и равны $w_{tp} = |w_{md}| = w_{bt} \approx 0.013$.

Сделаем теперь возмущение слегка несимметричным, изменив частоту нижней гармоники и породив

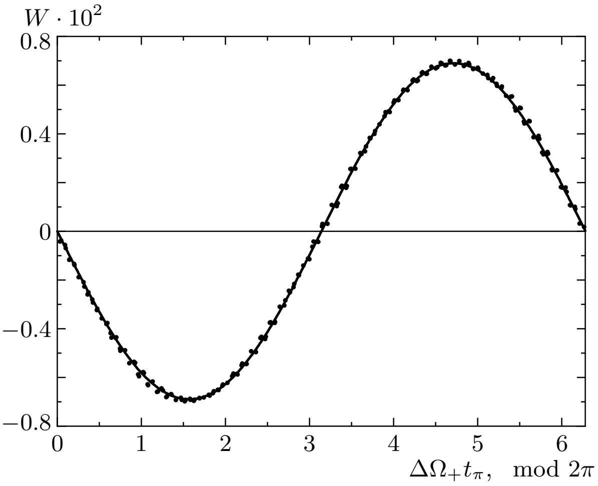


**Рис. 3.** Сепаратрисное отображение системы (2.1) с несимметричным возмущением (5.5). Точки — численный расчет, сплошная линия — результат подгонки методом наименьших квадратов

тем самым низкочастотную вторичную гармонику на сумме частот

$$\Omega_1 = 30.0, \quad \Omega_2 = -29.5, \quad \Delta\Omega_+ = 0.5. \tag{5.5}$$

Результат численного построения сепаратрисного отображения для системы (2.1), (5.5) представлен на рис. 3 (где $t_\pi$ — моменты прохождения положения устойчивого равновесия $x = 0.5$, см. [22]). Здесь также изображена полученная по методу наименьших квадратов синусоида, но с амплитудой $W = 6.91 \cdot 10^{-3}$ и, что самое главное, с совершенно другой частотой $\Delta\Omega_+ = 0.5$. Размер верхней части слоя также увеличился почти в сорок раз: $w_{tp} \approx 0.50$. Спектральный анализ показал, что суммарный вклад первичных гармоник составил менее двух процентов. Возникает впечатление, что в возмущении нет двух высокочастотных гармоник, а есть одна низкочастотная (факт, получивший полное численное подтверждение в работе [23]).

Видно, что качественно повторяется картина, которая имеет место и для маятника. Слабые, но низкочастотные вторичные гармоники «перехватывают инициативу» у первичных в формировании хаоса.

Дополнительные исследования показали также, что для вторичных гармоник очень низких частот, как и для первичных в случае симметричного возмущения, амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с увеличением частоты, а размер верхней части хаотического слоя практически от нее не зависит.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование семейств гладких гамильтоновых систем с кусочно-линейной силой, начатое математической работой Булита [8], обнаружило новую и во многом необычную (или лучше сказать — непривычную) динамику.

Сохранение сепаратрис нелинейных резонансов при наличии хаоса и полное подавление диффузии в критических режимах, фрактальный характер этой диффузии в окрестности (по параметру возмущения) таких режимов, периодическая и степенная зависимость интегралов Мельникова – Арнольда от частоты и другие эффекты не имеют аналогов в случае аналитических гамильтонианов. Обнаружение этих эффектов заставляет пересмотреть некоторые, казалось бы надежно установленные, представления. К числу последних относятся утверждения о том, что возмущение всегда в первую очередь разрушает сепаратрисы нелинейных резонансов с рациональными числами вращения, а в последнюю очередь разрушаются инвариантные кривые с иррациональными числами вращения. Как отмечалось во Введении, особенно богатый набор открытых и ждущих своего решения вопросов породило начатое недавно исследование фрактальной диффузии.

Поиск ответов на все эти вопросы, так же как и поиск других систем с таким же или близким динамическим поведением, должен быть, по нашему мнению, продолжен.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке комплексной научной программы РАН «Математические методы в нелинейной динамике».

## ЛИТЕРАТУРА

1. B. V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
2. A. Lichtenberg and M. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer, Berlin (1992).
3. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).
4. B. V. Chirikov, Chaos, Solitons and Fractals **1**, 79 (1991).
5. J. Moser, *Stable and Random Motion in Dynamical Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton (1973).
6. B. V. Chirikov, E. Keil, and A. Sessler, J. Stat. Phys. **3**, 307 (1971).
7. M. Hénon and J. Wisdom, Physica D **8**, 157 (1983).
8. S. Bullett, Comm. Math. Phys. **107**, 241 (1986).
9. M. Wojtkowski, Comm. Math. Phys. **80**, 453 (1981); Ergodic Theory Dyn. Syst. **2**, 525 (1982).
10. Л. В. Овсянников, Частное сообщение, май (1999).
11. В. В. Вечеславов, Препринт ИЯФ 99-69, Новосибирск (1999).
12. В. В. Вечеславов, Препринт ИЯФ 2000-27, Новосибирск (2000); E-print archives, nlin.CD/0005048.
13. В. В. Вечеславов, ЖЭТФ **119**, 853 (2001).
14. В. В. Вечеславов, Б. В. Чириков, ЖЭТФ **120**, 740 (2001).
15. В. В. Вечеславов, Б. В. Чириков, ЖЭТФ **122**, 175 (2002).
16. B. V. Chirikov and V. V. Vecheslavov, ЖЭТФ **122**, 647 (2002).
17. В. В. Вечеславов, ЖТФ **73** (9), 1 (2003).
18. В. В. Вечеславов, ЖТФ **74** (5), 1 (2004).
19. В. В. Вечеславов, ЖТФ **72** (2), 20 (2002).
20. В. В. Вечеславов, ЖТФ **58** (1), 20 (1988).
21. В. В. Вечеславов, ЖЭТФ **125**, 399 (2004).
22. В. В. Вечеславов, ЖЭТФ **109**, 2208 (1996).
23. В. В. Вечеславов, Письма в ЖЭТФ **63**, 989 (1996).