ЖЭТФ, 2004, том 126, вып. 5 (11), стр. 1180–1191

ЗАКОНЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ СКОРОСТИ, ТЕМПЕРАТУРЫ И КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА РЕЙНОЛЬДСА В ПРИСТЕНОЧНОЙ ОБЛАСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*И. И. Вигдорович**

Центральный институт авиационного моторостроения им. П. И. Баранова
111116, Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 июня 2004 г.

Общее конечное число определяющих параметров задачи указывает на наличие универсальной функциональной зависимости турбулентного касательного напряжения от градиента усредненной скорости, а турбулентного потока тепла — также и от градиента усредненной температуры в пристеночной области пограничного слоя. Вместе с соображениями размерности это обстоятельство позволяет свести уравнения переноса импульса и тепла к обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка для профилей скорости и температуры, которые легко могут быть исследованы в общем виде. В результате получены правила подобия для скорости и температуры, обобщающие на случай вдува и отсоса на стенке известные логарифмические распределения. Установлены также соотношения подобия для касательного напряжения и среднеквадратичной поперечной пульсации скорости. Предложенный подход имеет значительные преимущества по сравнению с классическим методом [1–3], не использующим динамических уравнений, и расширяет круг задач пристенной турбулентности, законы подобия для которых могут быть установлены без формулировки специальных гипотез замыкания.

PACS: 44.05.+e, 44.20.+b, 47.27.-i

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известен вывод логарифмического закона для профиля скорости в турбулентных пристенных течениях, предложенный в работах [1–3], который не использует ни специальных гипотез о механизме турбулентного обмена, ни даже динамических уравнений, а основан только на соображениях размерности и предположении, что молекулярная вязкость не существенна вне вязкого подслоя, а внешний масштаб не оказывает влияния на течение в пристеночной области. Позднее подобный подход использовали очень многие авторы. Так, Ландау в 1944 г. получил логарифмический закон для профиля температуры (см., например, [4]).

Классический метод [1–3], очевидно, имеет существенные ограничения на число определяющих параметров задачи и в случае ненулевой поперечной скорости на стенке не дает каких-либо содержательных выводов.

В работе предлагается другой подход, который также основан на анализе размерностей, но при этом существенно использует уравнения движения. В результате получены законы подобия для скорости и температуры, которые обобщают известные логарифмические распределения на случай наличия вдува или отсоса на стенке. Установлены также законы подобия для касательного напряжения и среднеквадратичной поперечной пульсации скорости. Исследование проведено при тех же физических предположениях и на том же уровне строгости, которые обеспечивает классический анализ.

Закон подобия для профиля скорости впервые получен [5, 6] на основе формулы Прандтля для длины пути перемешивания. Остальные соотношения подобия являются новыми.

*E-mail: ivigdorovich@ciam.ru

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим течение несжимаемой теплопроводной жидкости в пристеночной области турбулентного пограничного слоя на гладкой проницаемой поверхности. Скорость вдува или отсоса будем считать направленной по нормали к стенке. В тонкой пристеночной области поперечные градиенты усредненных параметров много больше продольных, поэтому в первом приближении перенос импульса и тепла описывается известными уравнениями

$$\begin{aligned} &-\langle u'v'\rangle + \nu\frac{du}{dy} = \frac{\tau_w}{\rho} + v_w u, \\ &-\langle \theta'v'\rangle + \chi\frac{d\theta}{dy} = -j_w + v_w(\theta-\theta_w). \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь u — продольная составляющая усредненной скорости, θ — усредненная температура, y — расстояние от стенки, ν и χ — коэффициенты молекулярной вязкости и температуропроводности, v_w, θ_w, τ_w и j_w — значения на стенке поперечной скорости, температуры, касательного напряжения и потока температуры, соответственно.

Температура рассматривается как пассивная примесь, не оказывающая влияния на динамику течения, и в соответствующих обозначениях второе соотношение (1) является также уравнением переноса пассивной примеси.

Уравнения (1) описывают турбулентное течение вдоль бесконечной плоскости, в котором поперечная скорость и давление постоянны, а остальные параметры зависят только от расстояния до плоскости. Для такого течения

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dy} = F_1\left(y,\nu,v_w,\frac{\tau_w}{\rho}\right), \\ &\frac{d\theta}{dy} = F_2\left(y,\nu,\chi,v_w,\frac{\tau_w}{\rho},j_w\right), \\ &\langle u'v'\rangle = F_3\left(y,\nu,v_w,\frac{\tau_w}{\rho}\right), \\ &\langle \theta'v'\rangle = F_4\left(y,\nu,\chi,v_w,\frac{\tau_w}{\rho},j_w\right), \end{aligned} \qquad (2)$$

где $F_1,\ldots,F_4$ — некоторые универсальные функции. Мы, таким образом, предполагаем, что рассматриваемые величины в пристеночной области не зависят от внешних параметров пограничного слоя и полностью определены условиями на стенке и физическими константами жидкости.

Выразим теперь величины τ_w/ρ, j_w из первого и второго уравнений (2) и подставим в третье и четвертое уравнения. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} &\langle u'v'\rangle = G_1\left(y,\nu,v_w,\frac{du}{dy}\right), \\ &\langle \theta'v'\rangle = G_2\left(y,\nu,\chi,v_w,\frac{du}{dy},\frac{d\theta}{dy}\right). \end{aligned} \qquad (3)$$

Применяя к функциональным соотношениям (3) П-теорему и учитывая, что для температуры как пассивной примеси можно использовать специальную размерность, получим

$$\begin{aligned} &\langle u'v'\rangle = -\left(y\frac{du}{dy}\right)^2 S(\mathrm{Re},\beta), \\ &\langle \theta'v'\rangle = -y^2\frac{d\theta}{dy}\frac{du}{dy}T(\mathrm{Re},\mathrm{Pe},\beta), \\ &\mathrm{Re} = \frac{y^2}{\nu}\frac{du}{dy}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{y^2}{\chi}\frac{du}{dy}, \quad \beta = \frac{v_w}{\mathrm{Re}\, y}\frac{dy}{du}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь локальное число Рейнольдса Re есть отношение характерных значений турбулентной и молекулярной вязкостей, а локальное число Пекле Pe — турбулентной и молекулярной теплопроводностей. Относительно функций S и T предположим, что они непрерывны при

$$0 \le \mathrm{Re} \le \infty, \quad 0 \le \mathrm{Pe} \le \infty, \quad -\infty \le \beta \le \infty,$$

имеют частные производные по всем аргументам внутри этой области и удовлетворяют условиям

$$S(\infty,0) \ne 0, \quad T(\infty,\infty,0) \ne 0.$$

Физически это соответствует обычному предположению, согласно которому вязкость существенна лишь в тонком слое вблизи стенки (вязком подслое).

Соотношения (4) представляют собой выражения касательного напряжения и потока температуры через градиент усредненной скорости. Поскольку влияние скорости вдува или отсоса на эти зависимости по мере удаления от стенки должно убывать, параметр β выбран так, что в знаменателе стоит локальное число Рейнольдса Re.

Компонента тензора Рейнольдса $\langle v'^2\rangle$, связанная с поперечными пульсациями скорости, ведет себя аналогично касательному напряжению. Для нее примем

$$\langle v'^2\rangle = \left(y\frac{du}{dy}\right)^2 S_2(\mathrm{Re},\beta), \qquad (5)$$

где S_2 удовлетворяет тем же условиям, что и функция S в соотношении (4).

Компоненты $\langle u'^2\rangle$, $\langle w'^2\rangle$, связанные с пульсациями скорости в направлениях, параллельных стенке, рассматриваться не будут. Их поведение вблизи обтекаемой поверхности имеет более сложный характер (см., например, [7–9]) и недостаточно полно изучено даже в случае отсутствия потока массы на теле.

В переменных стенки

$$y_+ = \frac{y}{\nu}\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad u_+ = u\sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}, \quad v_+ = v_w\sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}},$$

$$\theta_+ = \frac{\theta_w - \theta}{j_w}\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

уравнения (1) с учетом (4) принимают вид

$$\begin{gathered}\left(y_+\frac{du_+}{dy_+}\right)^2 S(\mathrm{Re},\beta) + \frac{du_+}{dy_+} = 1 + v_+u_+,\\ u_+(0) = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}y_+^2\frac{d\theta_+}{dy_+}\frac{du_+}{dy_+}T(\mathrm{Re},\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re},\beta) + \\ + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{d\theta_+}{dy_+} = 1 + v_+\theta_+, \quad \theta_+(0) = 0,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\mathrm{Re} = y_+^2\frac{du_+}{dy_+}, \quad \beta = \frac{v_+}{\mathrm{Re}\,y_+}\frac{dy_+}{du_+}.$$

Здесь $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — молекулярное число Прандтля.

Задача, таким образом, сведена к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения для профиля скорости (6). Распределение температуры на основании (7) задается интегралом

$$\ln(1 + v_+\theta_+) = \int_0^{y_+} \frac{\mathrm{Pr}\,v_+dy_+}{1 + \mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\,T(\mathrm{Re},\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re},\beta)}. \tag{8}$$

В соответствии с (4) турбулентное число Прандтля есть

$$\mathrm{Pr}_t(\mathrm{Re},\mathrm{Pe},\beta) = \frac{S(\mathrm{Re},\beta)}{T(\mathrm{Re},\mathrm{Pe},\beta)}. \tag{9}$$

Если $\mathrm{Pr}_t \equiv 1$ и $\mathrm{Pr} = 1$, уравнение (7) имеет решение

$$\theta_+ \equiv u_+.$$

3. НЕПРОНИЦАЕМАЯ СТЕНКА

В частном случае непроницаемой стенки ($v_+ = 0$) уравнение (6) имеет решение в замкнутом виде

$$u_+ = \int_0^R \frac{d\,\mathrm{Re}}{\sqrt{\mathrm{Re}^2 S(\mathrm{Re},0) + \mathrm{Re}}} - \frac{\sqrt{\mathrm{Re}}}{\sqrt{\mathrm{Re}\,S(\mathrm{Re},0)+1}},$$

$$y_+ = \sqrt{\mathrm{Re}^2 S(\mathrm{Re},0) + \mathrm{Re}}, \quad 0 \le \mathrm{Re} < \infty, \tag{10}$$

а интеграл (8) есть

$$\theta_+ = \int_0^R \frac{\mathrm{Pr}\,d\sqrt{\mathrm{Re}^2 S(\mathrm{Re},0) + \mathrm{Re}}}{1 + \mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\,T(\mathrm{Re},\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re},0)}. \tag{11}$$

Из (10), (11) и условий, поставленных на функции S и T, следует, что скорость и температура имеют логарифмическую асимптотику во внешней части пристеночной области:

$$u_+ = \frac{1}{\varkappa}(\ln y_+ + C_0) + O(y_+^{-\alpha}), \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\theta_+ = \frac{\mathrm{Pr}_t^0}{\varkappa}[\ln y_+ + B(\mathrm{Pr})] + O(y_+^{-\alpha}),\\ y_+\to\infty, \quad \alpha > 0,\end{gathered} \tag{13}$$

$$\varkappa = \sqrt{S(\infty,0)}, \quad \mathrm{Pr}_t^0 = \mathrm{Pr}_t(\infty,\infty,0).$$

В соответствии с экспериментальными данными примем следующие значения постоянных в асимптотическом представлении (12):

$$\varkappa = 0.41, \quad C_0 = 2.05.$$

Для турбулентного числа Прандтля в логарифмической области Pr_t^0 чаще всего рекомендуются значения 0.85–0.95 [10]. В дальнейшем в соответствии с данными [11] будем считать $\mathrm{Pr}_t^0 = 0.89$.

Асимптотика входящей в (13) функции $B(\mathrm{Pr})$ при малых и больших значениях молекулярного числа Прандтля может быть получена из интегрального представления

$$\begin{aligned}B(\mathrm{Pr}) = {}&\frac{\varkappa\,\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_t^0}\int_0^1 \frac{d\sqrt{\mathrm{Re}^2 S(\mathrm{Re},0)+\mathrm{Re}}}{1+\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\,T(\mathrm{Re},\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re},0)} - \\ &- \int_1^\infty \frac{d\,\mathrm{Re}}{\mathrm{Re}(1+\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\,T(\mathrm{Re},\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re},0))} + \frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_t^0}\times \\ &\times\int_1^\infty \frac{\varkappa d\sqrt{\mathrm{Re}^2 S(\mathrm{Re},0)+\mathrm{Re}} - \mathrm{Pr}_t^0\,T(\mathrm{Re},\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re},0)\,d\,\mathrm{Re}}{1+\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\,T(\mathrm{Re},\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re},0)} - \\ &- \ln\varkappa,\end{aligned} \tag{14}$$

которое следует из (11), (13) и (10). При малых числах Прандтля эта асимптотика главным образом определяется вторым интегралом (14) и поведением подынтегральной функции при больших значениях локального числа Рейнольдса. В этом случае

$$B(\mathrm{Pr}) = \ln\mathrm{Pr} + b_1 + \ldots, \quad \mathrm{Pr}\to 0,$$

$$b_1 = \int\limits_0^1 \frac{T(\infty,\infty,0)\,d\,\mathrm{Pe}}{1+\mathrm{Pe}\,T(\infty,\mathrm{Pe},0)} - \\ - \int\limits_1^\infty \frac{[1+\mathrm{Pe}\,(T(\infty,\mathrm{Pe},0)-T(\infty,\infty,0))]\,d\,\mathrm{Pe}}{\mathrm{Pe}\,[1+\mathrm{Pe}\,T(\infty,\mathrm{Pe},0)]} - \\ - \ln\varkappa. \quad (15)$$

Если предположить, следуя [10], что коэффициент турбулентной температуропроводности не зависит от χ (функция T не зависит от числа Пекле), вычисление интегралов (15) дает

$$b_1 = \ln(\varkappa/\,\mathrm{Pr}_t^0),$$

что на единицу меньше величины, предложенной в работе [10].

При больших числах Прандтля основной вклад в асимптотику функции $B(\mathrm{Pr})$ дает первый интеграл (14) и существенным является поведение подынтегральной функции вблизи нижнего предела интегрирования. В соответствии с известной оценкой

$$\langle\theta' v'\rangle = O(y^3), \quad y \to 0,$$

примем

$$T(\mathrm{Re},\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re},0) = k(\mathrm{Pr})\sqrt{\mathrm{Re}} + \ldots, \quad \mathrm{Re}\to 0,$$

где $k(\mathrm{Pr})$ — некоторая функция. Тогда главный член асимптотики для $B(\mathrm{Pr})$ имеет вид

$$B(\mathrm{Pr}) = b_2\,\mathrm{Pr}^{2/3} + \ldots, \quad \mathrm{Pr}\to\infty,$$

$$b_2 = \frac{\varkappa}{\mathrm{Pr}_t^0}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+k(\infty)x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}\,\varkappa}{9\,\mathrm{Pr}_t^0\,\sqrt[3]{k(\infty)}}\,.$$

В работе [10] для коэффициента b_2 предложена приближенная формула, дающая весьма близкие значения.

Подставляя асимптотику (12) в выражение (5), получим, что среднеквадратичная поперечная пульсация скорости во внешней подобласти постоянна:

$$\sqrt{\langle v'^2\rangle_+} = \frac{1}{\sigma_2} + O(y_+^{-\alpha}), \quad \sigma_2 = \frac{\varkappa}{\sqrt{S_2(\infty,0)}}, \\ y_+\to\infty. \quad (16)$$

Величина конечного предела $1/\sigma_2$ есть универсальная константа. Большинство экспериментов дает для σ_2 значения близкие, но несколько меньшие единицы [10]. В дальнейшем, согласно [12], будем считать $\sigma_2 = 0.95$.

4. ВДУВ И ОТСОС

В общем случае ненулевой поперечной скорости на стенке, переходя в (6) к новым переменным Y и w,

$$Y = \frac{y v_w}{\nu} = v_+ y_+, \quad w = \frac{2}{v_+}\sqrt{1+v_+u_+}\,, \quad (17)$$

получим уравнение

$$\left(Y\frac{dw}{dY}\right)^2 S(\mathrm{Re},\beta) + \frac{2}{w}\frac{dw}{dY} = 1, \quad w(0) = \frac{2}{v_+}, \quad (18)$$

$$\mathrm{Re} = \frac{Y^2 w}{2}\frac{dw}{dY}, \quad \beta = \frac{2}{\mathrm{Re}\,Yw}\frac{dY}{dw}.$$

Замена переменных (17) выбрана так, чтобы уравнение (18) не зависело от параметра v_+.

Интегральные кривые уравнения (18) расположены симметрично относительно оси абсцисс, поэтому достаточно рассмотреть их поведение в верхней полуплоскости. Качественная картина интегральных кривых показана на рис. 1 (построены решения уравнения (18) при $S = \varkappa^2$). Отрицательные значения Y соответствуют отсосу, положительные — вдуву. Вдоль каждой кривой w растет от 0 до $+\infty$.

В случае отсоса v_+ всегда есть малая величина, поскольку на внешней границе пристеночной области скорость u_+ достигает достаточно больших значений, а правая часть (6) остается положительной.

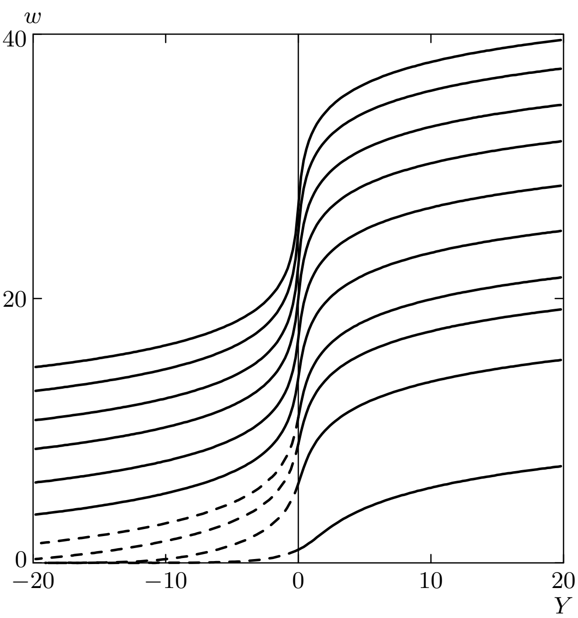

Рис. 1. Качественная картина интегральных кривых уравнения (18) в верхней полуплоскости

Следовательно, в соответствии с начальным условием (18) физический смысл имеют только интегральные кривые, пересекающие ось ординат при достаточно больших значениях w (отрезки интегральных кривых, не имеющие физического смысла, показаны на рис. 1 штриховыми линиями). В общем случае профиль скорости в пристеночной области пограничного слоя с отсосом описывают отрезки интегральных кривых, соответствующие большим значениям переменной w.

В первом квадранте все интегральные кривые имеют физический смысл. Малым значениям $w(0)$ соответствует сильный вдув, т. е. большая величина параметра v_+.

4.1. Законы подобия

Из уравнения (18) будем иметь

$$\frac{dw}{d\ln Y} = \frac{1}{\sqrt{S(\mathrm{Re},\beta) + 1/\mathrm{Re}}}. \tag{19}$$

Во внешней части пристеночной области локальное число Рейнольдса велико. Величинами порядка $1/\mathrm{Re}$ в уравнении (19) можно пренебречь, и мы получим

$$w = \frac{1}{\varkappa}\ln Y + C_1(v_+) + O(Y^{-\alpha}), \quad \alpha > 0, \tag{20}$$

где $C_1(v_+)$ — некоторая функция. Для случая вдува (20) есть асимптотика решения уравнения (6) при $Y \to \infty$, для случая отсоса — промежуточная асимптотика, соответствующая внешней части пристеночной области. Возвращаясь в (20) к исходным переменным, получим асимптотическое представление профиля скорости

$$\frac{2}{v_+}\left(\sqrt{1+v_+u_+} - 1\right) = \\ = \frac{1}{\varkappa}\left[\ln y_+ + C(v_+)\right] + O(y_+^{-\alpha}), \\ y_+ \to \infty, \quad \alpha > 0. \tag{21}$$

Здесь $C(v_+)$ — некоторая универсальная функция. Соотношение (21) является обобщением логарифмического закона на случай вдува и отсоса для профиля скорости и при $v_+ = 0$ должно совпадать с (12); отсюда

$$C(0) = C_0.$$

В силу уравнения (6) соотношение (21) задает также распределение касательного напряжения во внешней части пристеночной области:

$$\frac{2}{v_+}\left(\sqrt{-\langle u'v'\rangle_+} - 1\right) = \\ = \frac{1}{\varkappa}\left[\ln y_+ + C(v_+)\right] + O(y_+^{-\alpha}), \\ y_+ \to \infty. \tag{22}$$

Аналогичное представление можно получить для среднеквадратичной поперечной пульсации скорости, подставив асимптотику (21) в выражение (5):

$$\frac{2}{v_+}\left(\sigma_2\sqrt{\langle v'^2\rangle_+} - 1\right) = \\ = \frac{1}{\varkappa}\left[\ln y_+ + C(v_+)\right] + O(y_+^{-\alpha}), \quad y_+ \to \infty. \tag{23}$$

Здесь постоянная σ_2 имеет вид (16) и определяется по данным для непроницаемой стенки.

Принимая во внимание (17) и (19), представим интеграл (8) в виде

$$\ln(1+v_+\theta_+) = \int\limits_{2/v_+}^{w} \frac{2\,\mathrm{Pr}\left[1+\mathrm{Re}\,S(\mathrm{Re},\beta)\right]dw}{w\left[1+\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\,T(\mathrm{Re},\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re},\beta)\right]}.$$

Тогда

$$\frac{\ln(1+v_+\theta_+)}{2\,\mathrm{Pr}_t^0} = \ln|w| + \ln\left|\frac{v_+}{2}\right| + \\ + \int\limits_{2/v_+}^{w}\left(\frac{\mathrm{Pr}\left[1+\mathrm{Re}\,S(\mathrm{Re},\beta)\right]}{\mathrm{Pr}_t^0\left[1+\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\,T(\mathrm{Re},\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re},\beta)\right]} - 1\right) \times \\ \times \frac{dw}{w}. \tag{24}$$

Интеграл в правой части соотношения (24) ограничен во внешней подобласти. Возвращаясь в (24) к старым переменным, с учетом (21) получим

$$\frac{2}{v_+}\left[(1+v_+\theta_+)^{1/2\,\mathrm{Pr}_t^0} - 1\right] + \\ + \frac{1}{\varkappa}D(v_+,\mathrm{Pr})(1+v_+\theta_+)^{1/2\,\mathrm{Pr}_t^0} = \\ = \frac{1}{\varkappa}\left[\ln y_+ + C(v_+)\right] + O(y_+^{-\alpha}), \quad y_+ \to \infty, \tag{25}$$

где $D(v_+,\mathrm{Pr})$ — некоторая функция. При $v_+ = 0$ соотношение (25) должно совпадать с (13), поэтому

$$D(0,\mathrm{Pr}) = C_0 - B(\mathrm{Pr}).$$

Когда турбулентное и молекулярное числа Прандтля равны единице, функция $D(v_+, 1) \equiv 0$.

Асимптотические представления (21)–(23), (25) выражают правила подобия для распределения продольной скорости, касательного напряжения, среднеквадратичной поперечной пульсации скорости и температуры в промежуточной области пограничного слоя, расположенной вблизи стенки вне вязкого подслоя. В случае непроницаемой стенки эта область носит название логарифмического подслоя.

Представление (21) впервые было установлено [5, 6] на основе формулы Прандтля для длины пути перемешивания. Правила подобия (22), (23), (25) являются новыми.

4.2. Малые значения параметра v_+

В случае малых значений v_+, который, в частности, всегда имеет место при произвольном отсосе, распределения скорости, касательного напряжения и температуры можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{2u_+}{1+\sqrt{1+v_+u_+}} = u_+^0(y_+) + O(v_+),\\
&\frac{2}{v_+}\left(\sqrt{-\langle u'v'\rangle_+ + \frac{du_+}{dy_+}} - 1\right) =\\
&= u_+^0(y_+) + O(v_+),\\
&\left[\frac{2\,\mathrm{Pr}_t^0}{v_+} + \frac{\mathrm{Pr}_t^0}{\varkappa}\left[C_0 - B(\mathrm{Pr})\right]\right] \times\\
&\times\left[(1+v_+\theta_+)^{1/2\,\mathrm{Pr}_t^0} - 1\right] =\\
&= \theta_+^0(y_+) + O(v_+), \quad y_+ \geq 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь $u_+^0(y_+)$, $\theta_+^0(y_+)$ — профили скорости и температуры для случая непроницаемой стенки. Подставляя первое соотношение (26) в (5), получим

$$\sqrt{\langle v'^2\rangle_+} = \sqrt{\langle v'^2\rangle_+^0} + \frac{v_+}{2\sigma_2}u_+^0(y_+), \quad y_+ \geq 0.$$

Первый член в правой части этого разложения — среднеквадратичная пульсация скорости в пограничном слое на непроницаемой поверхности.

Таким образом, в случаях произвольного отсоса и слабого вдува, когда параметр v_+ мал, профили рассматриваемых величин во всей пристеночной области можно представить с помощью данных, известных для непроницаемой стенки.

5. СОПОСТАВЛЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ И РАСЧЕТНЫМИ ДАННЫМИ

На рис. 2 в переменных подобия даны профили скорости, полученные при прямом численном моделировании напорного течения в плоском канале

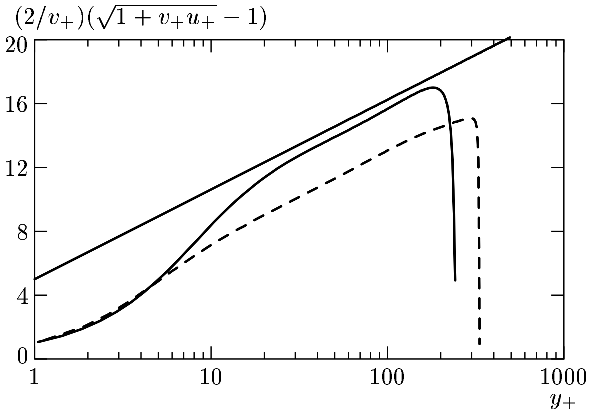

Рис. 2. Профили скорости для течения Пуазейля с поперечным потоком массы в переменных подобия. Сплошная и штриховая кривые — данные [13, 14]. Прямая линия соответствует уравнению $2.44\ln y_+ + 5.0$

с постоянным поперечным потоком массы [13, 14]. Сплошная кривая на рис. 2 получена при $v_+ = 0.061$ и числе Рейнольдса, вычисленном по средней скорости и ширине канала $\mathrm{Re}_m = 4357$; штриховая кривая — при $v_+ = 0.241$, $\mathrm{Re}_m = 8000$. Несмотря на небольшие числа Рейнольдса, при которых проводился расчет, эти распределения хорошо соответствуют правилу подобия (21), они имеют достаточно протяженный почти прямолинейный участок с наклоном, близким величине $1/\varkappa$ ($\varkappa = 0.41$).

На рис. 3 в переменных подобия представлены экспериментальные данные [15] (см. также [16]) по распределению скорости и касательного напряжения в турбулентном пограничном слое с равномерным вдувом и отсосом. Экспериментальные точки на рис. 3*а–г* отвечают вдуву при нулевом градиенте давления и различных значениях параметра $F = v_w/U_e$, где U_e — скорость невозмущенного набегающего потока, на рис. 3*д, е* — отсосу при умеренном неблагоприятном градиенте давления. Прямые на рис. 3 имеют наклон $1/\varkappa$ и соответствуют правой части соотношения (21), в котором функция $C(v_+)$ выбрана из условия наилучшей аппроксимации экспериментальных данных; ее значения построены на рис. 4. Согласно [15], для непроницаемой пластины экспериментальные данные хорошо соответствуют логарифмическому закону (12) при выбранном значении постоянных $\varkappa = 0.41$, $C_0 = 2.05$. На рис. 3*а–г* видно, что протяженность логарифмического участка для профилей скорости, т. е. интервал значений переменной y_+, в котором выполняется закон подобия (21), увеличивается с ростом числа Рейнольд-

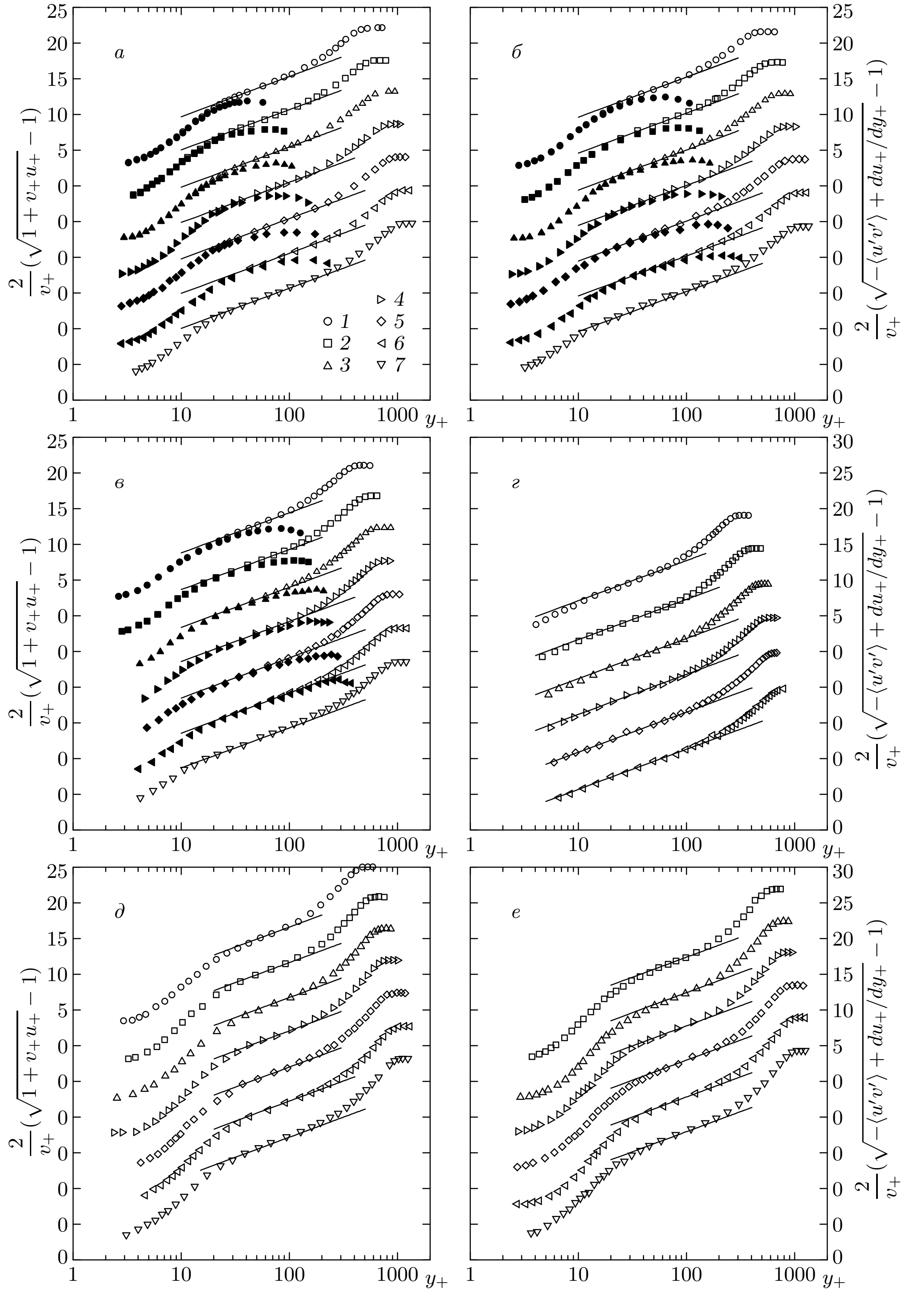

Рис. 3. Профили скорости и касательного напряжения в пограничном слое на пластине со вдувом и отсосом при различных числах Рейнольдса в переменных подобия по данным [15]: $F = 0.001$ (*а*), 0.002 (*б*), 0.00375 (*в*), 0.008 (*г*), -0.001 (*д*), -0.002 (*е*); точки *1–7* соответствуют $R_x = 3.5 \cdot 10^5$, $5.4 \cdot 10^5$, $7.3 \cdot 10^5$, $9.2 \cdot 10^5$, $1.1 \cdot 10^6$, $1.3 \cdot 10^6$, $1.4 \cdot 10^6$. Светлые символы — скорость, темные — касательное напряжение

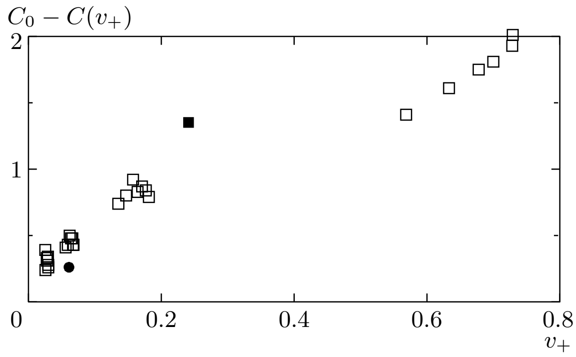

Рис. 4. Функция $C(v_+)$ по результатам обработки экспериментальных [15] (□) и расчетных [13, 14] работ (соответственно, ■ и ●)

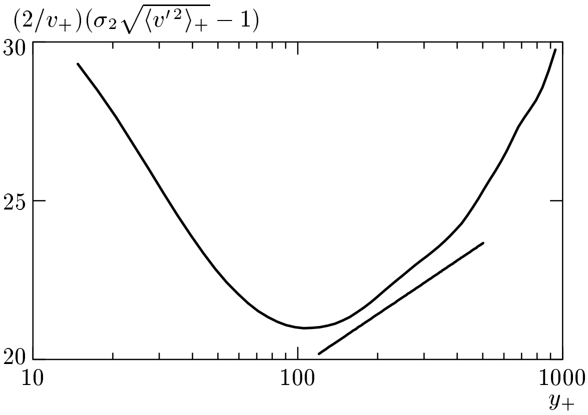

Рис. 5. Среднеквадратичная поперечная пульсация скорости в переменных подобия для пристеночной области по данным прямого численного моделирования [17]. Отрезок прямой имеет наклон $1/\varkappa$

са, а также по мере увеличения параметра v_+. При увеличении скорости вдува v_+ начало логарифмической области сдвигается ближе к стенке. Это хорошо видно на рис. 3*г*, который соответствует наибольшей в серии экспериментов [15] скорости вдува.

Как видно на рис. 3*д*, *е*, при отсосе для достаточно больших чисел Рейнольдса профили скорости в переменных подобия также имеют выраженный логарифмический участок.

В выбранных переменных профили скорости и касательного напряжения практически совпадают в вязком подслое и достаточно близки во внешней части пристеночной области, что является хорошим экспериментальным подтверждением справедливости первого уравнения (1). Из рис. 3*б*, *в* видно, что при наличии потока массы на стенке квадратный корень из касательного напряжения действительно имеет в пристеночной области логарифмическую асимптотику.

К сожалению, в настоящее время нет достаточно точных измерений пульсационных характеристик скорости в пристеночной области при наличии вдува или отсоса для проверки соотношения (23). На рис. 5 в переменных (23) дан профиль среднеквадратичной поперечной пульсации скорости, полученный [17, 18] путем прямого численного моделирования асимптотического турбулентного пограничного слоя с отсосом при $v_+ = -0.0601$ и числе Рейнольдса, вычисленном по толщине вытеснения, $\mathrm{Re}_{\delta^*} = 1000$. Как видно на рис. 5, несмотря на небольшое число Рейнольдса, при котором проводился расчет, профиль исследуемой величины имеет выраженный логарифмический участок, наклон которого, однако, приблизительно на 15 % превышает величину $1/\varkappa$.

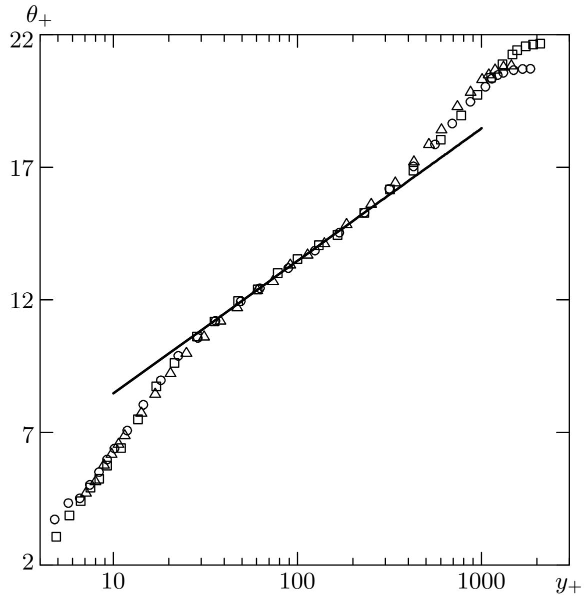

Рис. 6. Профили температуры в турбулентном пограничном слое на непроницаемой пластине по данным [11]: $R_x = 1.30 \cdot 10^6$ (○), $1.44 \cdot 10^6$ (□), $1.99 \cdot 10^6$ (△). Прямая линия соответствует уравнению $2.17(\ln y_+ + 1.6)$

Для проверки соотношения (25) использованы экспериментальные данные [11]. В работе [11] измерялись профили температуры и числа Стантона, но не измерялось трение на стенке. Мы вычисляли коэффициент трения вычислялся по значениям числа Рейнольдса, образованного по толщине потери импульса, с помощью универсального закона трения [19, 20].

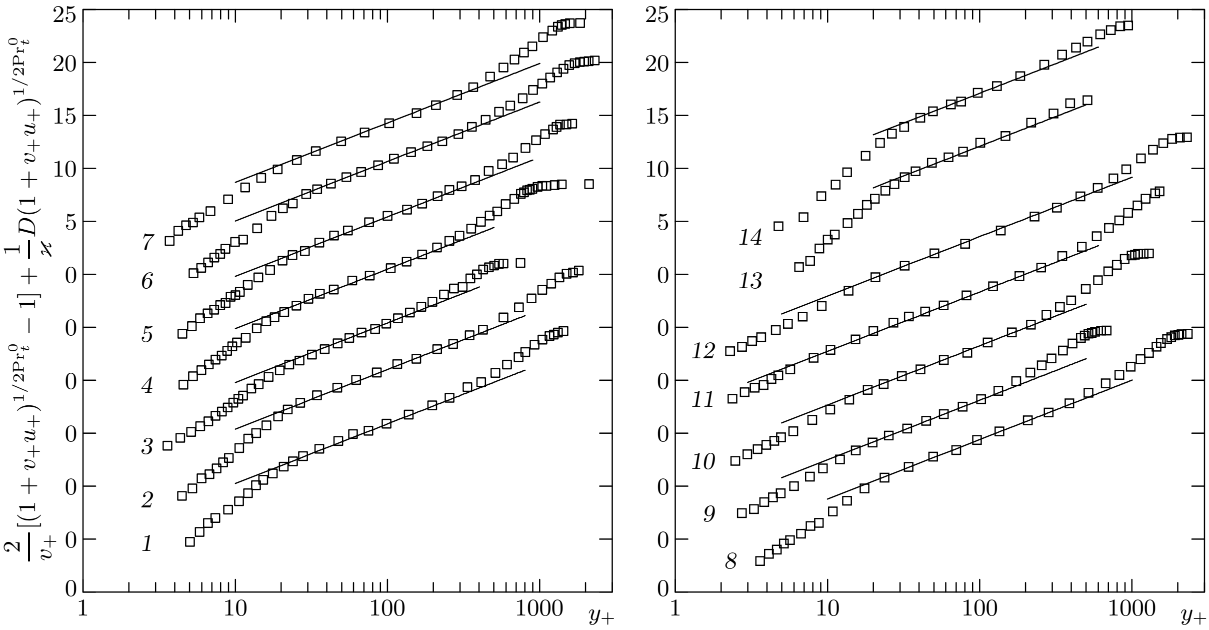

Рис. 7. Профили температуры в пограничном слое на пластине со вдувом и отсосом при различных числах Рейнольдса в переменных подобия по данным [11]: *1* — $F = 9.6 \cdot 10^{-4}$, $R_x = 1.5 \cdot 10^6$; *2* — $9.0 \cdot 10^{-4}$, $2.0 \cdot 10^6$; *3* — $2.4 \cdot 10^{-3}$, $3.9 \cdot 10^5$; *4* — $2.0 \cdot 10^{-3}$, $9.3 \cdot 10^5$; *5* — $1.9 \cdot 10^{-3}$, $1.5 \cdot 10^6$; *6* — $1.8 \cdot 10^{-3}$, $2.0 \cdot 10^6$; *7* — $3.8 \cdot 10^{-3}$, $1.5 \cdot 10^6$; *8* — $3.5 \cdot 10^{-3}$, $2.0 \cdot 10^6$; *9* — $6.0 \cdot 10^{-3}$, $4.0 \cdot 10^5$; *10* — $5.1 \cdot 10^{-3}$, $9.2 \cdot 10^5$; *11* — $4.7 \cdot 10^{-3}$, $1.5 \cdot 10^6$; *12* — $4.4 \cdot 10^{-3}$, $2.0 \cdot 10^6$; *13* — $-1.3 \cdot 10^{-3}$, $4.1 \cdot 10^5$; *14* — $-1.1 \cdot 10^{-3}$, $9.6 \cdot 10^5$

На рис. 6 построены профили температуры в пограничном слое на непроницаемой пластине. Экспериментальные данные на рис. 6 хорошо описываются формулой (13) при $\mathrm{Pr}_t^0 = 0.89$ и $B = 1.6$.

Для случая вдува и отсоса профили температуры в переменных подобия (25) построены на рис. 7. Здесь прямые линии имеют наклон $1/\varkappa$ и соответствуют правой части соотношения (25), в котором функция $C(v_+)$ определена по экспериментальным данным, построенным на рис. 4. Функция $D(v_+, \mathrm{Pr})$ определена таким образом, чтобы экспериментальные точки следовали прямым линиям при $\mathrm{Pr}_t^0 = 0.89$. Эта функция построена на рис. 8.

В соответствии с законом подобия (25) экспериментальные профили на рис. 7 имеют выраженные логарифмические участки, а функция на рис. 8, построенная в результате обработки экспериментальных данных, ведет себя достаточно монотонно.

В соответствии с (9) турбулентное число Прандтля в логарифмической области не зависит от поперечной скорости на стенке, что подтверждается экспериментальными наблюдениями [21].

6. ПРОФИЛИ СКОРОСТИ И ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ СИЛЬНОМ ВДУВЕ

Исследуем теперь асимптотическую структуру профилей скорости и температуры при больших значениях параметра v_+, применяя к уравнению (18) метод сращиваемых асимптотических разложений [22]. В этом случае в пристеночной области образуются четыре характерных подобласти.

Непосредственно у стенки расположена по-

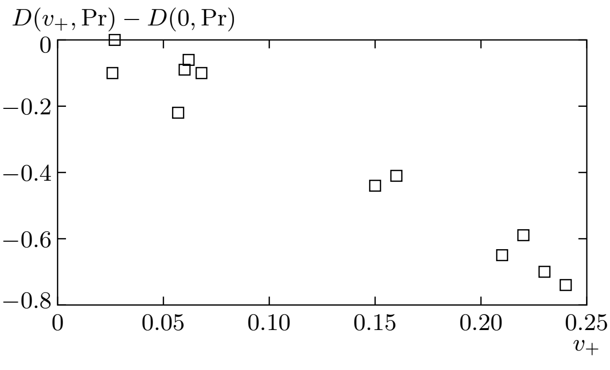

Рис. 8. Функция $D(v_+, \mathrm{Pr})$ по результатам обработки экспериментальных данных [11]

добласть I, в которой $Y = O(1)$. Здесь турбулентным касательным напряжением в уравнении (18) можно пренебречь, и решение в главном члене такое же, как для чисто ламинарного течения:

$$\begin{gathered} w = \frac{2}{v_+} e^{Y/2} + O(v_+^{-4}), \\ \ln(1 + v_+\theta_+) = \Pr Y + O(v_+^{-3}). \end{gathered} \tag{27}$$

В лежащей выше подобласти II решение будем искать в виде

$$\begin{gathered} Y = M + Y_2, \quad w = \frac{W_2(Y_2)}{M} + \ldots, \\ Y_2 = O(1), \quad M \to \infty. \end{gathered} \tag{28}$$

Подстановка (28) в уравнение (18) и предельный переход при $M \to \infty$, $Y_2 = O(1)$ дают

$$\begin{gathered} \left(\frac{dW_2}{dY_2}\right)^2 S(\mathrm{Re}, \infty) + \frac{2}{W_2} \frac{dW_2}{dY_2} = 1, \\ \mathrm{Re} = \frac{W_2}{2} \frac{dW_2}{dY_2}. \end{gathered} \tag{29}$$

Таким образом, турбулентная и ламинарная составляющие касательного напряжения здесь одного порядка. Асимптотическое сращивание разложений (27) и (28) позволяет определить начальное условие для уравнения (29) и параметр M:

$$W_2 \to 2e^{Y_2/2}, \quad Y_2 \to -\infty; \quad Me^{M/2} = v_+. \tag{30}$$

Из (29) с учетом начального условия (30) получим решение в параметрическом виде:

$$\begin{gathered} Y_2 = \ln \mathrm{Re} + \mathrm{Re}\, S(\mathrm{Re}, \infty) + \int\limits_0^{\mathrm{Re}} S(\mathrm{Re}, \infty)\, d\,\mathrm{Re}, \\ W_2 = 2\sqrt{\mathrm{Re}^2 S(\mathrm{Re}, \infty) + \mathrm{Re}}, \quad 0 < \mathrm{Re} < \infty. \end{gathered} \tag{31}$$

Распределение температуры в подобласти II запишем в виде

$$\begin{gathered} \ln(1 + v_+\theta_+) = \Pr Y^* + \\ + \int\limits_{Y^*-M}^{Y_2} \frac{\Pr dY_2}{1 + \Pr \mathrm{Re}\, T(\mathrm{Re}, \Pr \mathrm{Re}, \infty)} + \ldots, \\ Y^* = O(1). \end{gathered} \tag{32}$$

После замены переменной (31) в интеграле (32) и предельного перехода при $M \to \infty$ будем иметь

$$\begin{aligned} \ln(1 + v_+\theta_+) &= \Pr M + \\ &+ \Pr \int\limits_0^{\mathrm{Re}} \frac{\mathrm{Re}\, dS(\mathrm{Re}, \infty) + 2S(\mathrm{Re}, \infty)\, d\,\mathrm{Re}}{1 + \Pr \mathrm{Re}\, T(\mathrm{Re}, \Pr \mathrm{Re}, \infty)} + \\ &+ \Pr \int\limits_1^{\mathrm{Re}} \frac{d\,\mathrm{Re}}{\mathrm{Re}\,[1 + \Pr \mathrm{Re}\, T(\mathrm{Re}, \Pr \mathrm{Re}, \infty)]} - \\ &- \Pr^2 \int\limits_0^1 \frac{T(\mathrm{Re}, \Pr \mathrm{Re}, \infty)\, d\,\mathrm{Re}}{1 + \Pr \mathrm{Re}\, T(\mathrm{Re}, \Pr \mathrm{Re}, \infty)} + \ldots \end{aligned}$$

Отсюда, устремляя Re к ∞, получим на внешней границе подобласти II

$$\begin{gathered} \ln(1 + v_+\theta_+) = 2 \Pr_t^\infty \ln Y_2 + \Pr M + \\ + a_2(\Pr) + \ldots, \quad Y_2 \to \infty, \end{gathered} \tag{33}$$

$$\Pr_t^\infty = \Pr_t(\infty, \infty, \infty),$$

$$\begin{aligned} a_2(\Pr) &= \Pr \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{Re}\, dS(\mathrm{Re}, \infty)}{1 + \Pr \mathrm{Re}\, T(\mathrm{Re}, \Pr \mathrm{Re}, \infty)} + \\ &+ \Pr \int\limits_1^\infty \frac{d\,\mathrm{Re}}{\mathrm{Re}\,[1 + \Pr \mathrm{Re}\, T(\mathrm{Re}, \Pr \mathrm{Re}, \infty)]} - \\ &- \Pr^2 \int\limits_0^1 \frac{T(\mathrm{Re}, \Pr \mathrm{Re}, \infty)\, d\,\mathrm{Re}}{1 + \Pr \mathrm{Re}\, T(\mathrm{Re}, \Pr \mathrm{Re}, \infty)}. \end{aligned}$$

В подобласти III

$$Y = M + \sqrt{M}\, Y_3, \quad w = \frac{W_3(Y_3)}{\sqrt{M}} + \ldots,$$

$$\frac{1}{Y_3} = O(1), \quad Y_3 = O(1).$$

В уравнении (18) после предельного перехода

$$M \to \infty, \quad \frac{1}{Y_3} = O(1), \quad Y_3 = O(1)$$

остается только турбулентная составляющая касательного напряжения:

$$\left(\frac{dW_3}{dY_3}\right)^2 S(\infty, \beta) = 1, \quad \beta = \left(\frac{2}{W_3} \frac{dY_3}{dW_3}\right)^2. \tag{34}$$

Решение уравнения (34), удовлетворяющее условию сращивания с решением в подобласти II, имеет вид

$$Y_3 = \frac{S(\infty,\beta)}{\sqrt{\beta}} + \int\limits_{\beta}^{\infty} \frac{S(\infty,\beta)\,d\beta}{2\beta^{3/2}},$$
$$W_3 = 2\sqrt{\frac{S(\infty,\beta)}{\beta}}\,, \quad 0<\beta<\infty. \tag{35}$$

В подобласти III к выражению (32) для распределения температуры добавится интеграл

$$I_3 = \int\limits_{Y_2/\sqrt{M}}^{Y_3} \frac{\sqrt{\beta}\,dY_3}{T(\infty,\infty,\beta)}\,.$$

Замена переменных (35) в этом интеграле дает

$$I_3 = \int\limits_{\beta^*}^{\beta} \frac{\beta\,dS(\infty,\beta) - S(\infty,\beta)\,d\beta}{\beta T(\infty,\infty,\beta)},$$

$$\beta^* = M\left(\frac{2S(\infty,\infty)}{Y_2}\right)^2 + \ldots$$

Переходя к пределу при $M\to\infty$, получим

$$I_3 = \Pr_t^{\infty}\left[\ln M - 2\ln Y_2 + 2\ln\left(2S(\infty,\infty)\right)\right] + \int\limits_{\beta}^{1} \frac{\Pr_t(\infty,\infty,\beta)\,d\beta}{\beta} - \int\limits_{\beta}^{\infty} \frac{dS(\infty,\beta)}{T(\infty,\infty,\beta)} + \int\limits_{1}^{\infty}\left[\Pr_t(\infty,\infty,\beta) - \Pr_t^{\infty}\right]\frac{d\beta}{\beta} + \ldots$$

Складывая это выражение с асимптотикой (33) и переходя к пределу при $\beta\to 0$, на внешней границе подобласти III будем иметь

$$\ln(1+v_+\theta_+) = 2\Pr_t^0 \ln Y_3 + \Pr M + \Pr_t^{\infty}\ln M + a_2(\Pr) + a_3 + \ldots, \quad Y_3\to\infty, \tag{36}$$

$$a_3 = \int\limits_0^1 \left[\Pr_t(\infty,\infty,\beta) - \Pr_t^0\right]\frac{d\beta}{\beta} - \int\limits_0^{\infty}\frac{dS(\infty,\beta)}{T(\infty,\infty,\beta)} + \int\limits_1^{\infty}\left[\Pr_t(\infty,\infty,\beta) - \Pr_t^{\infty}\right]\frac{d\beta}{\beta} - 2\Pr_t^0\ln(2\varkappa^2).$$

Во внешней подобласти IV

$$Y = MY_4, \quad w = W_4(Y_4) + \ldots,$$

$$1/Y_4 = O(1),$$

$$\left(\frac{dW_4}{d\ln Y_4}\right)^2 S(\infty,0) = 1. \tag{37}$$

Решение уравнения (37), удовлетворяющее условию сращивания с решением в подобласти III, есть

$$W_4 = \frac{1}{\varkappa}\ln Y_4. \tag{38}$$

Сопоставляя (38) с (21), для функции $C(v_+)$ получим асимптотику

$$C(v_+) = \frac{M}{2} + \ldots, \quad v_+\to\infty,$$
$$M + 2\ln M = 2\ln v_+. \tag{39}$$

Для получения распределения температуры во внешней подобласти IV к асимптотическому представлению (36) следует добавить интеграл

$$I_4 = 2\Pr_t^0 \int\limits_{1+Y_3/\sqrt{M}}^{Y_4} \frac{dY_4}{Y_4\ln Y_4}\,.$$

Это дает выражение

$$\ln(1+v_+\theta_+) = 2\Pr_t^0\ln\ln Y_4 + \Pr M + (\Pr_t^{\infty} + \Pr_t^0)\ln M + a_2(\Pr) + a_3 + \ldots,$$

сопоставив которое с (25), получим асимптотическое представление для функции $D(v_+,\Pr)$:

$$D(v_+,\Pr) = \exp\left[-\frac{\Pr M}{2\Pr_t^0} - \frac{\Pr_t^0 + \Pr_t^{\infty}}{2\Pr_t^0}\ln M - \frac{a_2(\Pr)+a_3}{2\Pr_t^0}\right] - \frac{2\varkappa}{M}e^{-M/2} + \ldots,$$
$$v_+\to\infty.$$

Следовательно, эта функция стремится к нулю при больших значениях параметра v_+.

На рис. 4 функция $C_0 - C(v_w^+)$, построенная по результатам обработки экспериментальных [15] и расчетных [13, 14] профилей скорости, возрастает вплоть до $v_+\approx 0.8$. В то же время, согласно (39), $C(v_+)\to\infty$ при $v_+\to\infty$. Следовательно, функция $C(v_+)$ немонотонна и зависимость на рис. 4 при некотором значении скорости v_+ должна иметь максимум.

Подобласти I и II образуют вязкий подслой. Обозначим d_+ характерную толщину вязкого подслоя, отнесенную к пристеночному масштабу $\rho\nu/\tau_w$. Проведенный анализ показывает, что

$$d_+ = O(\ln v_+/v_+)$$

при $v_+ \to \infty$. Уменьшение толщины вязкого подслоя и расширение внешней логарифмической области в результате вдува было отмечено при анализе экспериментальных данных, приведенных на рис. 3.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, постановка задачи, основанная на динамических уравнениях, обычном предположении о независимости течения в пристеночной области от внешних параметров пограничного слоя и требовании непрерывности задающих турбулентное касательное напряжение и поток температуры функций S и T без привлечения каких-либо гипотез о конкретных механизмах турбулентного обмена, позволяет получить правила подобия для распределения скорости, температуры и компонент тензора Рейнольдса и дать асимптотические представления входящих в эти соотношения универсальных функций $C(v_+)$ и $D(v_+, \mathrm{Pr})$.

Пристеночная область турбулентного пограничного слоя со вдувом и отсосом состоит из двух характерных подобластей: расположенного непосредственно у стенки вязкого подслоя, в котором турбулентные и вязкие напряжения одного порядка, и внешней подобласти, где молекулярной вязкостью можно пренебречь. Во внешней подобласти скорость, температура, касательное напряжение и среднеквадратичная поперечная пульсация скорости в переменных подобия имеют одно логарифмическое распределение, которое зависит только от безразмерной поперечной скорости на стенке v_+.

При увеличении скорости вдува v_+ толщина вязкого подслоя, измеренная в единицах пристенного масштаба, падает и при $v_+ \to \infty$ стремится к нулю как $O(\ln v_+/v_+)$, а область применимости законов подобия начинается непосредственно у стенки.

Автор благодарен У. Кэйсу и Р. Моффату (Стэнфордский университет) за любезно предоставленные экспериментальные данные.

Работа выполнена в рамках Государственной программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1635.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Изаксон, ЖЭТФ **7**, 919 (1937).
2. C. B. Millikan, in *Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech.*, Wiley, New York (1939), p. 386.
3. R. von Mises, in *Th. von Kármán Anniversary Volume*, Calif. Inst. Techn. Press. Pasadena (1941), p. 317.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Изд. 3-е, Наука, Москва (1986).
5. T. N. Stevenson, CoA Rept. Aero. №166 (1963).
6. T. N. Stevenson, AIAA J. **6**, 553 (1968).
7. A. E Perry, S. Henbest, and M. S. Chong, J. Fluid Mech. **165**, 163 (1986).
8. H. H. Fernholz and P. J. Finley, Prog. Aerospase Sci. **32**, 245 (1996).
9. J. F. Morrison, W. Jiang, B. J. McKeon et al., in *Turbulence and Shear Flow Phenomena. Second Int. Symp.*, ed. by E. Lindborg et al., KTH, Stockholm (2001), Vol. 1, p. 43.
10. Б. А. Кадер, А. М. Яглом, *Итоги науки и техн. Сер. Механика жидкости и газа*, ВИНИТИ, Москва (1980), т. 18, с. 81.
11. D. G. Whitten, W. M. Kays, and R. J. Moffat, Rep. HMT-3, Stanford Univ. (1967).
12. P. S. Klebanoff, *NACA Rep. 1247* (1954).
13. Y. Sumitani and N. Kasagi, AIAA J. **33**, 1220 (1995).
14. Н. В. Никитин, А. А. Павельев, Изв. Академии наук. МЖГ №6, 18 (1998).
15. P. S. Andersen, W. M. Kays, and R. J. Moffat, *Rep. HMT-15*, Stanford Univ. (1972).
16. P. S. Andersen, W. M. Kays, and R. J. Moffat, J. Fluid Mech. **69** 353, (1975).
17. P. Mariani, P. Spalart, W. Kollmann, in *Proc. Int. Conf. Near-Wall Turbulent Flows*, ed. by R. M. C. So et al., Elsevier, Amsterdam (1993).
18. R. A. Antonia, P. R. Spalart, and P. Mariani, Phys. Fluids **6**, 430 (1994).
19. И. И. Вигдорович, ДАН **337**, 39 (1994).
20. И. И. Вигдорович, ДАН **356**, 42 (1997).
21. R. L. Simpson, R. J. Moffat, and D. G. Whitten, Int. J. Heat and Mass Transf. **13**, 125 (1970).
22. М. Ван-Дайк, *Методы возмущений в механике жидкости*, Мир, Москва (1967).