ЖЭТФ, 2004, том 126, вып. 5 (11), стр. 1027–1033

МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА–МАКСВЕЛЛА ДЛЯ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ С РАЗНЫМИ МАССАМИ

А. В. Захаров[*], *Р. К. Мухарлямов*[**]

Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина
420008, Казань, Россия

Поступила в редакцию 25 декабря 2003 г.

С точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию выведена макроскопическая система уравнений Эйнштейна–Максвелла для систем частиц с разными массами, в которых доминирующими являются электромагнитные межчастичные взаимодействия (например, радиационно-доминированная космологическая плазма в расширяющейся Вселенной до момента рекомбинации). Обобщаются результаты работы [1], применимые лишь для систем взаимодействующих частиц с одинаковыми массами.

PACS: 95.30.sf, 95.10.Fh

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что уравнения Максвелла для сплошных сред могут быть получены из микроскопических уравнений Максвелла–Лоренца посредством статистического усреднения по ансамблям [2]. Естественно предположить, что уравнения Эйнштейна (или их обобщения) в среде также могут быть получены путем усреднения микроскопических полевых уравнений Эйнштейна (уравнения Эйнштейна, в правой части которых стоит сумма тензоров энергии-импульса отдельных частиц). Однако ввиду нелинейности левой части уравнений Эйнштейна проблема усреднения микроскопических уравнений Эйнштейна намного более сложна, чем проблема вывода макроскопических уравнений Максвелла в специальной теории относительности .

Впервые задача о построении макроскопических уравнений Эйнштейна была поставлена Широковым [3]. В работах [4] и [5] был разработан метод усреднения по ансамблю микроскопических уравнений Эйнштейна для системы самогравитирующих частиц с одинаковыми массами. В результате получены макроскопические уравнения Эйнштейна для сплошных сред с точностью до членов второго порядка по гравитационному взаимодействию. Работа [6] обобщила результаты [4] и [5] для системы гравитационно взаимодействующих частиц с разными массами. Полученные уравнения отличаются от классических уравнений Эйнштейна дополнительными слагаемыми, обусловленными взаимодействием частиц. Эти слагаемые пропорциональны кубу постоянной Эйнштейна и выражаются через двухчастичную корреляционную функцию частиц.

Работа [1] посвящена выводу с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию макроскопической системы уравнений Эйнштейна–Максвелла для релятивистской плазмы, в которой доминирующим являются электромагнитные взаимодействия.

Данная работа обобщает результаты работы [1], применимые лишь для систем взаимодействующих частиц с одинаковыми массами.

Оказалось, что макроскопические уравнения Эйнштейна для релятивистской плазмы отличаются от классических уравнений Эйнштейна тем, что в левой части появляются дополнительные члены, обусловленные одновременно как электромагнитными, так и гравитационными взаимодействиями. Эти члены представляют собой симметричный двухвалентный бесследовый тензор с равной нулю дивергенцией. В работе получен явный вид этих членов как интегралов в импульсном пространстве от выражений, содержащих одночастичные функ-

[*]E-mail: Alexei.Zakharov@ksu.ru
[**]E-mail: Ruslan.Muharlyamov@ksu.ru

ции распределения взаимодействующих частиц плазмы.

Макроскопические уравнения Максвелла для системы электромагнитно и гравитационно взаимодействующих частиц также оказались отличными от классических уравнений Максвелла. Это отличие проявляется в том, что в левой части уравнений Максвелла возникают дополнительные члены, обусловленные одновременно как эффектами общей теории относительности, так и эффектами взаимодействия.

2. МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Запишем микроскопическую систему уравнений Эйнштейна и Максвелла в виде

$$\tilde{G}^{ij} = \chi \tilde{T}^{ij}_{(m)} + \chi \tilde{T}^{ij}_{(el)}, \tag{1}$$

$$\tilde{\nabla}_k \tilde{F}^{ik} = -\frac{4\pi}{c}\tilde{J}^i. \tag{2}$$

Здесь $\tilde{G}^{ij}$ — тензор Эйнштейна риманова пространства с метрикой $\tilde{g}_{ij}$, $\tilde{T}^{ij}_{(m)}$ — микроскопический тензор энергии-импульса частиц среды, $\chi = 8\pi k/c^4$ — постоянная Эйнштейна, k — гравитационная постоянная Ньютона, c — скорость света, $\tilde{F}^{ik}$ — тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла), $\tilde{J}^i$ — микроскопический 4-вектор тока, $\tilde{T}^{ij}_{(el)}$ — тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Операции поднимания и опускания индексов проводятся здесь с помощью метрического тензора $\tilde{g}_{ij}$ и обратного к нему $\tilde{g}^{ij}$. $\tilde{\nabla}_k$ обозначает ковариантную производную в римановом пространстве с метрикой $\tilde{g}_{ij}$.

Тензор $\tilde{T}^{ij}_{(el)}$ выражается через $\tilde{F}^{ik}$ как

$$\tilde{T}^{ij}_{(el)} = \frac{1}{4\pi}\left(-\tilde{F}^{i}_{\cdot l}\tilde{F}^{lj} + \frac{1}{4}\tilde{g}^{ij}\tilde{F}_{lm}\tilde{F}^{lm}\right). \tag{3}$$

Тензоры $\tilde{T}^{ij}_{(m)}$ и $\tilde{J}^i$ выражаются через случайную функцию Климонтовича [7] как

$$\tilde{T}^{ij}_{(m)} = \sum_a m_a c^2 \int \frac{d^4\tilde{p}_a}{\sqrt{-\tilde{g}}}\tilde{u}^i_a \tilde{u}^j_a \tilde{N}_a(q^i, \tilde{p}_i), \tag{4}$$

$$\tilde{J}^i = \sum_b e_b c \int \frac{d^4\tilde{p}}{\sqrt{-\tilde{g}}}\tilde{u}^i_b \tilde{N}_b(q, \tilde{p}). \tag{5}$$

Здесь e_b — заряд частиц сорта «b», $\tilde{g}$ — определитель метрики $\tilde{g}_{ij}$, m_a, $\tilde{p}^i_a$ — масса и импульс частиц сорта «a»,

$$\tilde{u}^i_a = \frac{\tilde{p}^i_a}{\sqrt{\tilde{g}_{kj}\tilde{p}^k_a \tilde{p}^j_a}},$$

$$\frac{d^4\tilde{p}}{\sqrt{-\tilde{g}}}$$

— инвариантный элемент объема в четырехмерном импульсном пространстве с координатами $\tilde{p}_i$ [8]; $\tilde{N}_a(q^i, \tilde{p}^i_a)$ — случайная функция Климонтовича [7]:

$$\tilde{N}_a(q^i, \tilde{p}_j) = \sum_{i=1}^{n_a} \int d\tilde{s}\,\delta^4(q^i - q^i_{(l)})\delta^4(\tilde{p}_j - \tilde{p}^{(l)}_j(\tilde{s})), \tag{6}$$

где n_a — число частиц сорта «a», $\tilde{s}$ — канонический параметр вдоль траектории частиц:

$$d\tilde{s} = \sqrt{g_{ij}dq^i dq^j},$$

$q^i_{(l)}$ и $\tilde{p}^{(l)}_j$ — координаты и импульс l-й частицы сорта «a», которые определяются из уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{dq^i_{(l)}}{d\tilde{s}} &= \frac{\tilde{p}^i_{(l)}}{m_a c}, \\ \frac{d\tilde{p}^{(l)}_i}{d\tilde{s}} &= \frac{1}{m_a c}\left(\tilde{\Gamma}_{j,ik}\tilde{p}^j_{(l)}\tilde{p}^k_{(l)} + \frac{e_a}{c}\tilde{F}_{ik}\tilde{p}^k_{(l)}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

($\tilde{\Gamma}_{j,ik}$ — символы Кристоффеля первого рода, вычисленные по метрике $\tilde{g}_{ij}$).

Согласно уравнениям (7), функция (6) подчиняется следующему уравнению:

$$\tilde{p}^i \frac{\partial \tilde{N}_a}{\partial q^i} + \tilde{\Gamma}_{j,ik}\tilde{p}^j \tilde{p}^k \frac{\partial \tilde{N}_a}{\partial \tilde{p}_i} + \frac{e_a}{c}\tilde{F}_{ik}\tilde{p}^k \frac{\partial \tilde{N}_a}{\partial \tilde{p}_i} = 0. \tag{8}$$

Представим метрику $\tilde{g}_{ij}$ гравитационного поля, создаваемого всеми частицами, в виде суммы усредненной метрики g_{ij} и вклада h_{ij}, обусловленного микроскопическим взаимодействием частиц:

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + h_{ij}, \tag{9}$$

где $g_{ij} = \langle \tilde{g}_{ij} \rangle$ — усредненная по ансамблю метрика $\tilde{g}_{ij}$[1]. Заметим, что $\langle h_{ij} \rangle \equiv 0$. Тензор электромагнитного поля $\tilde{F}_{ik}$ также представим в виде суммы

$$\tilde{F}_{ik} = F_{ik} + \omega_{ik}, \tag{10}$$

где $F_{ik} = \langle \tilde{F}_{ik} \rangle$ — усредненный по ансамблям тензор Максвелла, ω_{ik} — микроскопический тензор электромагнитного поля, обусловленный взаимодействием частиц. Заметим, что $\langle \omega_{ik} \rangle \equiv 0$.

Наряду с импульсами

$$\tilde{p}^i_{(l)} = m_a c \frac{dq^i_{(l)}}{d\tilde{s}}$$

мы будем также использовать импульсы p^i, измеренные в метрике g_{ij}:

$$\begin{aligned} p^i_{(l)} &= \alpha^{-1}(q,p)\tilde{p}^i_{(l)}, \\ \alpha(q,p) &= \frac{ds}{d\tilde{s}} = \frac{(g_{ij}p^i p^j)^{1/2}}{(\tilde{g}_{lk}\tilde{p}^l \tilde{p}^k)^{1/2}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь s — канонический параметр, вычисленный по метрике g_{ij}.

Перейдем от $\tilde{p}_i$ к p_i по правилу

$$\tilde{p}_j = \tilde{g}_{jk}\tilde{p}^k = \alpha\tilde{g}_{jk}g^{ki}p_i. \qquad (12)$$

Якобиан преобразования (12) равен (см. [9])

$$\left|\frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial p_j}\right| = \alpha^4\frac{\tilde{g}}{g}, \qquad (13)$$

где g — определитель метрики g_{ij}. Введем в рассмотрение функцию $N_a(q^i,\tilde{p}_j)$, определенную в восьмимерном фазовом пространстве с координатами (q,p):

$$N_a(q,p) = \\ = \sum_{l=1}^{n_a}\int ds\delta^4(q^i - q^i_{(l)}(s))\delta^4(p_j - p_j^{(l)}(s)). \qquad (14)$$

Функции $q^i_{(l)}$ и $p_j^{(l)}$ в (14) определяются из уравнений, получающихся из (7) заменой (12) ($p^i = g^{ij}p_j$).

Отметим, что функции $\tilde{N}_a$ и N_a связаны следующим образом:

$$\tilde{N}_a(q,\tilde{p}) = \frac{g}{\tilde{g}\alpha^5}N_a(q,p). \qquad (15)$$

Уравнение для $N_a(q,p)$ получается из уравнения Лиувилля (8) с помощью замены переменных (12) и (15):

$$p^i\frac{\partial N_a}{\partial q^i} + \Gamma_{j,ik}p^jp^k\frac{\partial N_a}{\partial p_i} + \frac{e_a}{c}F_{ik}p^k\frac{\partial N_a}{\partial p_j} = \\ = \frac{\partial}{\partial p_i}\left[\left(\Omega^m_{jk}\Delta_{mi}p^jp^k - \frac{e_a}{c}\psi^l_{.k}\Delta_{lj}p^k\right)N_a\right]. \qquad (16)$$

Здесь

$$\Delta_{ki} = g_{ki} - u_ku_i, \quad u^k = \frac{p^k}{\sqrt{p^lp_l}}, \\ \Omega^m_{kj} = \tilde{\Gamma}^m_{kj} - \Gamma^m_{kj} \qquad (17)$$

— разность символов Кристоффеля второго рода для метрик $\tilde{g}_{ij}$ и g_{ij},

$$\psi^l_{.k} = \frac{1}{\alpha(q,p)}\tilde{F}^l_{.k} - F^l_{.k} = \\ = \frac{1}{\alpha(q,p)}\tilde{g}^{lm}\tilde{F}_{mk} - g^{lm}F_{mk}. \qquad (18)$$

Переходя в (4) и (5) к импульсам p_i и функции N_a, получим

$$\tilde{T}^{ij} = \sum_a m_ac^2\int\frac{d^4p_a}{\sqrt{-g}}\alpha(q,p)\times \\ \times\sqrt{\frac{g}{\tilde{g}}}u^i_au^j_aN_a(q,p_a), \qquad (19)$$

$$\tilde{j}^i = \sum_b e_bc\int\frac{d^4p_b}{\sqrt{-g}}\sqrt{\frac{g}{\tilde{g}}}u^i_bN_b(q,p_b), \qquad (20)$$

где $d^4p/\sqrt{-g}$ — инвариантный элемент объема в невозмущенном импульсном пространстве.

Для дальнейших целей уравнения Эйнштейна удобнее переписать в виде

$$R_{ij} + \nabla_m\Omega^m_{ij} - \nabla_j\Omega^m_{im} + \Omega^m_{mn}\Omega^n_{ij} - \Omega^m_{jn}\Omega^n_{im} = \\ = \chi\sum_a m_ac^2\int\frac{d^4p_a}{\sqrt{-g}}\alpha\sqrt{\frac{g}{\tilde{g}}}\Big(\tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jm} - \\ - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{km}\Big)u^k_au^m_aN_a(q,p_a) + \chi\tilde{T}^{(el)}_{ij}. \qquad (21)$$

Здесь R_{ij} — тензор Риччи риманова пространства с метрикой g_{ij}, ∇_m — ковариантная производная в этом пространстве.

Подставим (9) и (10) в уравнения Максвелла (2). Учитывая слабость гравитационных взаимодействий, разложим микроскопические уравнения Максвелла с точностью до членов первого порядка по h_{ij}:

$$\nabla_kF^{ik} + \nabla_k\left(h^i_mF^{km} - h^k_mF^{im}\right) + \frac{1}{2}F^{ik}\nabla_kh + \nabla_k\omega^{ik} + \\ + \nabla_k\left(h^i_m\omega^{km} - h^k_m\omega^{im}\right) + \frac{1}{2}\omega^{ik}\nabla_kh = \\ = -4\pi\sum_a e_a\int\frac{d^4p_a}{\sqrt{-g}}u^i_{(a)}\left(1 - \frac{1}{2}h\right)N_a(q,p_a). \qquad (22)$$

В выражениях (21), (22) и ниже поднимание и опускание индексов проводится с помощью усредненной метрики g_{ij}, $h = h^l_l$.

Теперь разложим уравнения (6) с точностью до членов второго порядка по величинам h_{ij}, ω_{ij} и усредним полученные уравнения по ансамблю. В случае, когда мы ограничиваемся усредненными уравнениями с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию, можно получить замкнутую систему уравнений для одночастичной функции распределения

$$f_a(q,p) = \frac{\langle N_a\rangle}{n_a}$$

для усредненной метрики g_{ij} и макроскопического тензора электромагнитного поля (тензора Максвелла). Уравнение для f_a получено ранее в работах [5, 6].

3. МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА И МАКСВЕЛЛА

В результате усреднения по ансамблям микроскопических уравнений по схеме, подробно описанной в работе [1], мы пришли к макроскопическим уравнениям Эйнштейна и Максвелла. Эти уравнения приняли вид

$$G_{ij} + \nabla_k \varphi^k_{ij} + \mu_{ij} - \chi \tau^{(gr)}_{ij} = \chi T_{ij}, \tag{23}$$

$$\nabla_k F^{ik} + \nabla_k \varphi^{ik} + \mu^i = -\frac{4\pi}{c} J^i. \tag{24}$$

Здесь G_{ij} — тензор Эйнштейна риманова пространства с макроскопической метрикой g_{ij}, F^{ik} — тензор Максвелла, J^i — макроскопический 4-вектор плотности электрического тока, T_{ij} — макроскопический тензор энергии-импульса. Последний представляет собой сумму макроскопических тензоров энергии-импульса $T^{(m)}_{ij}$ среды, макроскопического электромагнитного поля $T^{(el)}_{ij}$ и макроскопического тензора энергии-импульса $\tau^{(r)}_{ij}$ электромагнитного излучения в плазме. (Применительно к космологической плазме мы будем говорить в последнем случае о тензоре энергии-импульса реликтового излучения.)

Макроскопические уравнения Эйнштейна отличаются от классических уравнений Эйнштейна присутствием в левой части дополнительных слагаемых $\nabla_k \varphi^k_{ij}$, μ_{ij} и $-\chi\tau^{(gr)}_{ij}$. Эти тензоры выражены в явном виде через одночастичные функции распределения по формулам, приведенным ниже. Последний из этих членов — это умноженная на постоянную Эйнштейна и перенесенная со знаком минус из правой части уравнений Эйнштейна в левую часть поправка к макроскопическому тензору электромагнитного излучения, обусловленная гравитационными взаимодействиями.

Макроскопические уравнения Максвелла в общей теории относительности также оказались отличными от классических уравнений Максвелла благодаря появлению в левой части дополнительных слагаемых $\nabla_k \varphi^{ki} + \mu^i$. Эти слагаемые обусловлены как эффектами взаимодействия, так и эффектами общей теории относительности. Они также выражаются в явном виде через одночастичные функции распределения.

Приведем явный вид дополнительных членов:

$$\varphi^k_{ij} = \sum_{b,c} \frac{\chi^2 e_b e_c m_b^2 m_c^2 c^5}{16\pi^2} \int \frac{d^3p'}{p'^0\sqrt{-g}} \times$$
$$\times \int \frac{d^3p''}{p''^0\sqrt{-g}} \left[\frac{1}{2} g^{fk} u''_i u''_j + u'^k (u'u'')(\delta^f_j u''_i + \delta^f_i u''_j)\right] \times$$
$$\times (u'u'') K_{f\alpha}(u', u'') \left(F_c(x'') \frac{\partial F_b(x')}{\partial p'_\alpha} - \right.$$
$$\left. - F_b(x') \frac{\partial F_c(x'')}{\partial p''_\alpha}\right), \tag{25}$$

$$\mu_{ij} = \sum_{b,c} \frac{\chi^2 e_b e_c m_b^2 m_c^2 c^5}{16\pi^2} \int \frac{d^3p'}{p'^0\sqrt{-g}} \times$$
$$\times \int \frac{d^3p''}{p''^0\sqrt{-g}} \left[\left(z^2 + \frac{1}{2}\right) \times \right.$$
$$\times (u''_i u''_j + u'_i u'_j) g^{qr} + (z^2 - \frac{1}{2}) g_{ij} g^{qr} -$$
$$- 2z(u'_i u''_j + u''_i u'_j) g^{qr} - (z^2 - \frac{1}{2}) \times$$
$$\left. \times \left(\delta^q_i \delta^r_j + \delta^q_j \delta^r_i\right)\right] (z\delta^m_\alpha - u''_\alpha u'^m)\, J_{rqm}(u', u'') \times$$
$$\times F_c(x'') \frac{\partial F_b(x')}{\partial p'_\alpha}, \tag{26}$$

$$\varphi^{ik} = \sum_{b,c} \frac{\chi e_b e_c^2 m_b^2 m_c c^3}{2\pi} \int \frac{d^3p'}{p'^0\sqrt{-g}} \times$$
$$\times \int \frac{d^3p''}{p''^0\sqrt{-g}} (u'u'') \times$$
$$\times K_{f\alpha}(u', u'')[(u'u'')(u'^i g^{kf} - u'^k g^{if}) -$$
$$- (u''^i g^{kf} - u''^k g^{if})] \times$$
$$\times \left(F_c(x'') \frac{\partial F_b(x')}{\partial p'_\alpha} - F_b(x') \frac{\partial F_c(x'')}{\partial p''_\alpha}\right), \tag{27}$$

$$\mu^i = \sum_{b,c} \frac{\chi e_b^2 e_c m_b m_c^2 c^3}{4\pi} \int \frac{d^3p'}{p'^0\sqrt{-g}} \int \frac{d^3p''}{p''^0\sqrt{-g}} \times$$
$$\times [(u'u'')\delta^s_\alpha - u''_\alpha u'^s] u'^k J^i_{ks}(u', u'') F_c(x'') \times$$
$$\times \frac{\partial F_b(x')}{\partial p'_\alpha}, \tag{28}$$

$$\tau_{ij}^{(gr)} = \sum_{b,c} \frac{\chi e_b e_c m_b^2 m_c^2 c^5}{16\pi^2} \int \frac{d^3p'}{p'^0\sqrt{-g}} \times \\ \times \int \frac{d^3p''}{p''^0\sqrt{-g}} \Big[2z\delta_i^p \delta_j^q - \\ - zg_{ij}g^{pq} - (\delta_i^q u''_j + \delta_j^q u''_i) u'^p + \\ + g^{pq}(u'_i u''_j + u''_i u'_j) \Big] J_{pqf}^{(gr)}(u', u'') F_c(x'') \times \\ \times \frac{\partial}{\partial p'_n} \left\{ F_b(x') \left[\left(z^2 - \frac{1}{2} \right) \delta_n^f + \right.\right. \\ \left.\left. + \left(z^2 + \frac{1}{2} \right) u'_n u'^f - 2z u''_n u'^f \right] \right\}. \quad (29)$$

Здесь

$$\frac{d^3p'}{p'^0\sqrt{-g}}, \quad \frac{d^3p''}{p''^0\sqrt{-g}}$$

— инвариантные элементы объема в трехмерном импульсном пространстве соответственно частиц сорта «b» и «c». Греческий индекс «α» в выражениях (25)–(28) пробегает только значения $1, 2, 3$ (пространственный индекс). Производную по p'_f в (29) следует вычислять так, как будто все четыре компоненты импульса независимы. Зависимость p'_0 от p'_α учитывается после дифференцирования по p'_f.

Данные выражения полностью совпадают с соответствующими выражениями для дополнительных членов в макроскопических уравнениях Максвелла и Эйнштейна, полученными в работе [1] в предположении, что система состоит из частиц одинаковой массы.

Однако в случае систем частиц с разными массами появляются различия. Эти различия проявляются в явном виде тензора $J_{ijk}(u', u'')$ в выражениях (26), (28), (29).

В работе [5] приведен явный вид этих тензоров (см. (28), (29), (37)) в локально лоренцевой системе отсчета. Далее было указано, что в качестве такой системы следует выбирать систему центра импульсов. Для упрощения выкладок в работах [1, 5] предполагалось, что все частицы в системе имеют одинаковые массы покоя и, следовательно, в системе центра импульсов следует считать, что скорости взаимодействующих частиц равны по модулю и противоположно направлены:

$$\mathbf{v}'' = -\mathbf{v}',$$

где $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}''$ — трехмерные скорости взаимодействующих частиц.

Если не ограничиваться требованием равенства масс взаимодействующих частиц, то в этом случае в системе центра импульсов выполняется равенство

$$\mathbf{p}'' = -\mathbf{p}',$$

где $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}''$ — трехмерные импульсы взаимодействующих частиц.

В этой системе отсчета

$$K_{00} = K_{0\alpha} = 0,$$

$$K_{\alpha\beta} = \frac{4\pi^2 c}{v' u'_0 u''_0 k_{min}^2 (1 + m_b u'_0 / m_c u''_0)} \times \\ \times \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{v'_\alpha v'_\beta}{v'^2} \right). \quad (30)$$

Здесь

$$v' = \sqrt{v'^2_1 + v'^2_2 + v'^2_3}, \quad v'_\alpha = v'^\alpha = u'^\alpha / u'^0$$

— пространственные компоненты вектора $\mathbf{v}'$.

Ковариантное обобщение (21) имеет вид

$$K_{ij}(u', u'') = \frac{4\pi^2}{k_{min}^2 [(u'u'')^2 - 1]^{3/2}} \times \\ \times \big\{ - [(u'u'')^2 - 1] g_{ij} - \\ - u'_i u'_j - u''_i u''_j + (u'u'')(u'_i u''_j + u''_i u'_j) \big\}. \quad (31)$$

Выражение для $K_{ij}(u', u'')$ оказалось расходящимся при $k \to 0$, т. е. при больших прицельных расстояниях. Это связано с тем, что мы интегрируем по бесконечной области, в то время как на самом деле нужно ограничиваться интегрированием только по области корреляции, где мы считали метрику слабо меняющейся. Данную трудность так же, как и при выводе кинетического уравнения, следует обходить введением обрезания в расходящемся интеграле

$$\int_0^\infty \frac{dk}{k^3}.$$

Нижний предел интегрирования положим равным не нулю, а величине

$$k_{min} = 1/r_{max},$$

где r_{max} — размер области корреляции (радиус корреляции). Тогда предыдущий интеграл принимает значение

$$\frac{1}{2k_{min}^2} = r_{max}^2/2.$$

Тензор (31) обладает следующими свойствами:

$$K_{ij}(u', u'') = K_{ij}(u'', u'), \\ K_{ij} u'^i = K_{ij} u''^i = 0, \quad K_{ij} = K_{ji}. \quad (32)$$

Запишем соотношение (27) из работы [5] в системе центра импульсов, в которой $\mathbf{p}'' = -\mathbf{p}'$. В этой системе отсчета компоненты $J^{(1)}_{lmn}(u',u'')$ имеют вид (пространственные индексы у трехмерного вектора скорости v'^{α} опускаются с помощью трехмерного символа Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$):

$$J_{000} = -\frac{2}{(1+m_b u'_0/m_c u''_0)}\frac{1}{u'_0 u''_0}\left(\frac{m_b u'_0}{m_c u''_0}\right)^3 \times \alpha\left(\frac{m_b u'_0}{m_c u''_0}v'\right)\frac{v'^2}{c^2}, \quad (33)$$

$$J_{00\alpha} = -\frac{2}{(1+m_b u'_0/m_c u''_0)}\frac{1}{u'_0 u''_0}\left(\frac{m_b u'_0}{m_c u''_0}\right)^2 \times \alpha\left(\frac{m_b u'_0}{m_c u''_0}v'\right)\frac{v'_\alpha}{c}, \quad (34)$$

$$J_{0\alpha\beta} = -\frac{2}{(1+m_b u'_0/m_c u''_0)}\frac{1}{u'_0 u''_0}\left(\frac{m_b u'_0}{m_c u''_0}\right) \times \alpha\left(\frac{m_b u'_0}{m_c u''_0}v'\right)\delta_{\alpha\beta} + \frac{2}{(1+m_b u'_0/m_c u''_0)}\frac{1}{u'_0 u''_0}\left(\frac{m_b u'_0}{m_c u''_0}\right)\beta\left(\frac{m_b u'_0}{m_c u''_0}v'\right) \times \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{v'_\alpha v'_\beta}{v'^2}\right), \quad (35)$$

$$J_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{2}{(1+m_b u'_0/m_c u''_0)}\frac{1}{u'_0 u''_0} \times \alpha\left(\frac{m_b u'_0}{m_c u''_0}v'\right)\frac{c^2}{v'^2}\left[\delta_{\alpha\beta}\frac{v'_\gamma}{c} + \delta_{\alpha\gamma}\frac{v'_\beta}{c} + \delta_{\beta\gamma}\frac{v'_\alpha}{c} - 2\frac{v'_\alpha v'_\beta v'_\gamma}{cv'^2}\right] + \frac{2}{(1+m_b u'_0/m_c u''_0)}\frac{1}{u'_0 u''_0} \times \beta\left(\frac{m_b u'_0}{m_c u''_0}v'\right)\frac{c^2}{v'^2}\left[\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{v'_\alpha v'_\beta}{v'^2}\right)\frac{v'_\gamma}{c} + \left(\delta_{\alpha\gamma} - \frac{v'_\alpha v'_\gamma}{v'^2}\right)\frac{v'_\beta}{c} + \left(\delta_{\beta\gamma} - \frac{v'_\beta v'_\gamma}{v'^2}\right)\frac{v'_\alpha}{c}\right]. \quad (36)$$

Функции α и β в выражениях (33)–(36) зависят только от аргумента

$$w = \frac{m_b u'_0}{m_c u''_0}v'$$

и имеют следующий явный вид:

$$\alpha = \frac{\pi c^3}{w^3 k_{min}} \times \left[\frac{2\frac{w}{c}\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)^2} + \ln\left(\frac{1-\frac{w}{c}}{1+\frac{w}{c}}\right)\right], \quad (37)$$

$$\beta = \frac{\pi c^3}{2w^3 k_{min}}\left[\frac{2\frac{w}{c}\left(3-2\frac{w^2}{c^2}+3\frac{w^4}{c^4}\right)}{\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)^2} + 3\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right)\ln\left(\frac{1-\frac{w}{c}}{1+\frac{w}{c}}\right)\right]. \quad (38)$$

Здесь введено обозначение для интеграла

$$\frac{1}{k_{min}} = \int\limits_{k_{min}}^{\infty}\frac{dk}{k^2}.$$

По соображениям, указанным выше, здесь мы вновь нижний предел положили равным $k_{min} = 1/r_{max}$.

Ковариантное обобщение данных результатов, полученных в локально лоренцевой системе отсчета центра масс, на произвольные системы отсчета имеет вид

$$J^{(1)}_{ijk}(u',u'') = J^{(2)}_{ijk}(u'',u') = J_{ijk}(u',u''), \quad (39)$$

$$J_{ijk}(u',u'') = A\Big[(g_{ij}u'_k + g_{ik}u'_j + g_{jk}u'_i) - z(g_{ij}u''_k + g_{ik}u''_j + g_{jk}u''_i) - (u'_i u''_j u''_k + u''_i u'_j u''_k + u''_i u''_j u'_k) + 3z u''_i u''_j u''_k\Big] + C\Big[u'_i u'_j u'_k - z(u'_i u'_j u''_k + u'_i u''_j u'_k + u''_i u'_j u'_k) + z^2(u'_i u''_j u''_k + u''_i u'_j u''_k + u''_i u''_j u'_k) - z^3 u''_i u''_j u''_k\Big]. \quad (40)$$

Здесь

$$z = (u'u'') = (u'^i u''_i),$$

$$A = \frac{\pi}{k_{min}}\frac{(\mu^2+2\mu z+1)^{1/2}(1+\mu z)^2}{\mu^3(z^2-1)^{5/2}} \times \left[\frac{2\mu\sqrt{z^2-1}(1+3\mu^2+2\mu z-2\mu^2 z^2)}{(1+\mu z)(\mu^2+2\mu z+1)} + \frac{(1-3\mu^2+2\mu z+4\mu^2 z^2)}{(1+\mu z)^2} \times \ln\left(\frac{1+\mu z-\mu\sqrt{z^2-1}}{1+\mu z+\mu\sqrt{z^2-1}}\right)\right], \quad (41)$$

$$C = \frac{\pi}{k_{min}}\frac{(\mu z+1)}{(1+2\mu z+\mu^2)^{1/2}\mu^3(z^2-1)^{7/2}} \times \left[2\mu\sqrt{z^2-1}(5+7\mu^2+10\mu z-2\mu^2 z^2) + \frac{(1+2\mu z+\mu^2)}{(1+\mu z)} \times (5-7\mu^2+10\mu z+12\mu^2 z^2) \times \ln\left(\frac{1+\mu z-\mu\sqrt{z^2-1}}{1+\mu z+\mu\sqrt{z^2-1}}\right)\right], \quad (42)$$

$$\mu = m_b/m_c.$$

При $\mu = 1$ данные результаты совпадают с результатами, полученными ранее в работе [1].

Таким образом, мы обобщили результаты работы [1] на случай многокомпонентной системы электромагнитно и гравитационно взаимодействующих частиц с разными массами.

Тензор $J_{ijk}(u', u'')$ удовлетворяет тождеству

$$J_{ijk}(u', u'')u''^k = 0. \tag{43}$$

Тензоры φ^k_{ij}, μ_{ij}, $\tau^{(gr)}_{ij}$ и μ^i должны подчиняться дополнительным условиям

$$g^{lj}\nabla_l\left(\nabla_k\varphi^k_{ij} + \mu_{ij} - \chi\tau^{(gr)}_{ij}\right) = 0, \tag{44}$$

$$\nabla_i\mu^i = 0, \tag{45}$$

поскольку дивергенции всех остальных тензоров в макроскопических уравнениях Эйнштейна и Максвелла тождественно равны нулю.

Уравнения (44), (45) накладывают некоторые ограничения на зависимость от координат и относительной скорости частиц (последняя может быть выражена через z) параметров r_D и r_g, присутствующих соответственно в выражениях для $J^{(el)}_{rpq}$ и $J^{(gr)}_{rpq}$.

Макроскопические тензор энергии-импульса частиц плазмы и 4-вектор тока также могут быть выражены через семимерные функции распределения:

$$T^{(m)}_{ij} = \sum_a c\int \frac{d^3p}{p^0\sqrt{-g}}p_i p_j F_a(p), \tag{46}$$

$$J^i = \sum_a e_a c\int \frac{d^3p}{p^0\sqrt{-g}}p^i F_a(p). \tag{47}$$

К полученной системе уравнений нужно добавить кинетическое уравнение для F_b. Для релятивистской плазмы оно получено в работах [10, 11].

4. ВОЗМОЖНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ

Полученные уравнения гравитационного поля для сплошных сред отличаются от классических уравнений Эйнштейна наличием дополнительных слагаемых

$$\nabla_k\varphi^k_{ij} + \mu_{ij} - \chi\tau^{(gr)}_{ij}$$

в левой части.

Эти слагаемые пропорциональны постоянной Эйнштейна во второй степени, однако они также пропорциональны квадрату плотности частиц. Следовательно, эти дополнительные слагаемые могут иметь значение только в сплошных средах с достаточно высокой плотностью. Такие плотности возможны на ранних стадиях эволюции Вселенной, а также внутри объектов, близких к состоянию гравитационного коллапса. Поэтому, естественно, первые приложения полученных уравнений следует искать в теории ранних стадий эволюции Вселенной и в теории гравитационного коллапса.

В работе [3] было предложено применить макроскопические уравнения Эйнштейна к построению космологических моделей. В работах [1] и [12] были приведены оценки возможности применимости макроскопических уравнений Эйнштейна на ранних стадиях эволюции Вселенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Захаров, ТМФ **125**, 107 (2000).

2. Ю. Л. Климонтович, *Кинетическая теория электромагнитных процессов*, Наука, Москва (1980).

3. М. Ф. Широков, И. З. Фишер, Астрон. ж. **39**, 899 (1962).

4. А. В. Захаров, ЖЭТФ **110**, 3 (1996).

5. А. В. Захаров, ЖЭТФ **112**, 1153 (1997).

6. А. В. Захаров, Р. К. Мухарлямов, ЖЭТФ **123**, 665 (2003).

7. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ **37**, 735 (1959).

8. Н. А. Черников, Научн. докл. высшей школы Физ. Мат. № 1, 168 (1959).

9. А. В. Захаров, ЖЭТФ **99**, 769 (1989).

10. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ **38**, 1212 (1960).

11. А. В. Захаров, ЖЭТФ **86**, 3 (1984).

12. A. V. Zakharov, E-print archives gr-qc 000287.