ЖЭТФ, 2004, том 126, вып. 3 (9), стр. 741–757

РЕЖИМЫ НЕЛИНЕЙНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ В СИСТЕМЕ АНИЗОТРОПНЫХ ТУННЕЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ

С. В. Нестеров [a*], *С. В. Сазонов* [b]

[a] *Томский государственный университет*
634004, Томск, Россия

[b] *Калининградский государственный университет*
236041, Калининград, Россия

Поступила в редакцию 8 октября 2003 г.

Исследована динамика предельно короткого электромагнитного импульса в среде, содержащей систему анизотропных туннельных переходов, перекрываемых спектром импульса. Получена нелинейная система волновых уравнений для обыкновенной и необыкновенной составляющих электромагнитного поля импульса, распространяющегося под произвольным углом к оси анизотропии. Исследованы различные режимы распространения предельно коротких импульсов вдоль и поперек оси анизотропии. Выявлены предельно короткие аналоги самоиндуцированной и необыкновенной прозрачностей. Исследованы свойства рациональных солитоноподобных импульсов, не имеющих квазимонохроматических аналогов. Все рассмотренные режимы сопровождаются формированием продольной компоненты электрического поля импульса, в то время как при этих же условиях распространения (вдоль и поперек оси анизотропии) нерезонансных квазимонохроматических импульсов продольная составляющая отсутствует. Изучены вопросы устойчивости полученных решений и влияние дифракции на динамику предельно короткого импульса. Получены значения параметров импульса, при которых дефокусирующий эффект превалирует над самофокусировкой.

PACS: 42.50.Md, 41.20.Jb, 42.65.Tg

1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени можно считать сформировавшимся направление исследований, связанных с нелинейной динамикой лазерных импульсов длительностью порядка одного периода оптических колебаний (предельно коротких импульсов (ПКИ)) [1–18]. Из-за отсутствия у таких импульсов ярко выраженной несущей частоты при построении соответствующих теоретических моделей нельзя пользоваться стандартным для квазимонохроматических импульсов (КМИ) приближением медленно меняющихся амплитуд и фаз (ММАФ) [19]. Вследствие данного обстоятельства такое хорошо изученное для КМИ явление, как самоиндуцированная прозрачность [20–22], в случае ПКИ имеет ряд особенностей [23, 24]. В работе [24] данное явление исследовано для ПКИ, распространяющегося в водородосодержащем сегнетоэлектрике вблизи температуры Кюри T_c. Взаимодействие в данном случае осуществляется с туннельными протонными переходами, формирующими мягкую моду. В окрестности T_c мягкая мода сильно переторможена из-за внутренних диполь-дипольных взаимодействий туннельных переходов. Поэтому наблюдать самоиндуцированную прозрачность для резонансных КМИ здесь не представляется возможным. Мощный же ПКИ, спектр которого перекрывает туннельные переходы, способен эффективно разрывать диполь-дипольные взаимодействия [24]. Как следствие, в месте расположения импульса туннельные переходы проявляют не коллективные, а индивидуальные свойства, поэтому исчезают смягчение и переторможенность туннельных мод. В результате может быть реализован

*E-mail: nst@alg.kaliningrad.ru

солитонный режим, сопровождающийся сильным возбуждением туннельных переходов — аналог явления самоиндуцированной прозрачности. Туннельные переходы в кристалле KDP сильно анизотропны: протоны способны туннелировать главным образом в плоскости, перпендикулярной сегнетоэлектрической оси [25, 26]. Поэтому при теоретических исследованиях эти туннельные переходы в системе двухъямных потенциалов обычно рассматривались как одномерные [24-27]. Более реалистична ситуация, соответствующая туннельным переходам в системе трехмерных анизотропных потенциальных барьеров, разделяющих потенциальные минимумы. Такие потенциалы создаются внутрикристаллическим электрическим полем, снимающим вырождение по модулю проекции орбитального момента. Таким образом, туннельные состояния являются, вообще говоря, двукратно вырожденными. Кроме того, анизотропия может стать причиной наличия постоянного дипольного момента, соответствующего отличным от нуля диагональным матричным элементам оператора дипольного момента. Наличие постоянного дипольного момента оказывает существенное влияние на нелинейные режимы распространения в таких средах как КМИ, так и ПКИ [28–32].

В работе [32] учтен двухкомпонентный характер оптического импульса, состоящего из обыкновенной и необыкновенной волн. В частности, показано, что резонансная квазимонохроматическая обыкновенная составляющая способна за счет постоянного дипольного момента эффективно порождать предельно короткий импульс (или видеоимпульс) необыкновенной волны, динамическим образом смещающей частоту квантовых переходов. В дальнейшем между обеими компонентами осуществляется нелинейное взаимодействие и такой двухкомпонентный импульс способен распространяться в солитонных режимах. При доминировании обыкновенной компоненты реализуется резонансный эффект самоиндуцированной прозрачности, а в противоположном пределе — режим, названный в [32] необыкновенной прозрачностью. Соответствующие данному эффекту двухкомпонентные солитоны, испытывая замедление скорости распространения, аналогичное имеющему место в случае самоиндуцированной прозрачности, практически не вызывают динамику населенностей квантовых состояний. В связи с отмеченными выше различиями между нелинейным режимом распространения КМИ и ПКИ возникает вопрос поиска особенностей в динамике двухкомпонентных импульсов в случае, когда обе составляющие (обыкновенная и необыкновенная) не имеют несущей частоты, т. е. являются по сложившейся терминологии предельно короткими импульсами. Суммируя все сказанное выше, можно отметить, что представляет интерес исследование двухкомпонентных ПКИ в системе анизотропных туннельных переходов, чему и посвящена настоящая работа.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 формулируется модель, на основе которой выводится система материальных и волновых уравнений, описывающих самосогласованную динамику туннельных переходов, которые обладают одноосной анизотропией, и распространяющихся в системе этих переходов ПКИ. В разд. 3 на основе того факта, что спектр ПКИ эффективно перекрывает туннельные переходы, проводится процедура исключения материальных динамических параметров и выводится система нелинейных волновых уравнений для обеих компонент импульса. Следующий, четвертый, раздел посвящен анализу различных режимов распространения двухкомпонентных ПКИ вдоль и поперек оси анизотропии. Выявляются аналоги самоиндуцированной прозрачности и необыкновенной прозрачности. В разд. 5 подробно рассмотрены свойства рациональных солитоноподобных импульсов, не имеющих квазимонохроматического аналога. В разд. 6 исследуется вопрос о влиянии поперечных возмущений, в частности, дифракции, на динамику рассмотренных в предыдущем разделе одномерных уединенных импульсов. В Заключении подведены основные итоги работы и намечены некоторые перспективы дальнейших исследований.

2. СИСТЕМА МАТЕРИАЛЬНЫХ И ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

В случае одномерных двухъямных потенциалов основное состояние туннелирующей частицы характеризуется симметричной относительно преобразования $z' \to -z'$ волновой функцией, а первое возбужденное — антисимметричной [25, 26]. Здесь z' — ось, совпадающая с осью туннелирования. Плотности вероятности, соответствующие данным волновым функциям, одинаковы и отличны от нуля в областях обеих ям, чем и обеспечивается туннелирование. Именно такой двухуровневой моделью обычно описывается сегнетоэлектрик типа порядок–беспорядок [25, 26].

Расширение двухъямных потенциалов в направлениях, поперечных к оси z', соответствует отходу от одномерной модели. Будем считать, что каждая из ям и разделяющий их потенциальный барьер обладают аксиальной симметрией. При этом данная одноосная анизотропия создается внутрикристаллическим электрическим полем. Это означает, что собственноэнергетические состояния туннелирующей частицы вырождены по модулю проекции m орбитального момента ℓ на ось z' (здесь и ниже мы пренебрегаем спиновыми эффектами). Основному состоянию в таком двухъямном потенциале соответствует $m = 0$, а первому возбужденному — $m = \pm 1$.

Оператор взаимодействия частицы с внутренним электрическим полем, создающим аксиальную анизотропию, инвариантен относительно преобразований

$$z' \to -z', \quad \varphi \to -\varphi$$

(φ — угловая переменная цилиндрической системы координат). Это позволяет говорить о четной и нечетной волновых функциях частицы относительно этих преобразований симметрии:

$$\psi(r, z', \varphi) = \pm\psi(r, -z', -\varphi').$$

Основное состояние ($m = 0$) является четным, а возбужденное ($m = \pm 1$) — нечетным и двукратно вырожденным. Подчеркнем, что четность понимается здесь в ограниченном смысле, только относительно указанных преобразований, а не относительно полной инверсии пространственных координат, как это имеет место в случае сферической симметрии. Следствием данного ограничения симметрии является то обстоятельство, что собственноэнергетическое состояние может обладать постоянным дипольным моментом (см. ниже).

Таким образом, трехуровневая модель с двукратно вырожденным верхним уровнем обобщает на трехмерный аксиально симметричный случай двухуровневую систему, соответствующую одномерному двухъямному потенциалу.

Частота ω_0 туннельных квантовых переходов лежит в инфракрасном диапазоне и составляет по порядку величины 10^{13} с$^{-1}$.

Следуя работам [18, 32], собственные энергетические состояния протона представим в виде

$$\psi_{\mu,m} = R_{\mu,m}(r, z')\exp(im\varphi), \tag{1}$$

где μ — совокупность квантовых чисел, отвечающих цилиндрической симметрии.

Отсюда можно найти матричные элементы дипольного момента для перехода $\mu \leftrightarrow \nu$ [18, 32]. Соответствующие декартовы компоненты имеют вид

$$d^x_{\mu\nu} = \frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}}\,|\Delta m_{\mu\nu}|, \quad d^{y'}_{\mu\nu} = i\frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}}\,\Delta m_{\mu\nu},$$

$$d^{z'}_{\mu\nu} = D_{\mu\nu}\left(1 - |\Delta m_{\mu\nu}|\right),$$

где

$$\Delta m_{\mu\nu} = m_\mu - m_\nu = 0, \pm 1,$$

$$d_{\mu\nu} = -\sqrt{2}\,\pi e\int\limits_0^\infty r^2 dr\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_\mu(r, z')R_\nu(r, z')\,dz',$$

$$D_{\mu\nu} = -2\pi e\int\limits_0^\infty r\,dr\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z' R_\mu(r, z')R_\nu(r, z')\,dz',$$

x, y' и z' — взаимно ортогональные оси декартовой системы координат, e — заряд туннелирующей частицы.

Из (2) в силу отмеченной выше симметрии волновой функции имеем

$$R_{\mu,m}(r, z') = \pm R_{\mu,-m}(r, -z').$$

Знак «+» при этом соответствует $m = 0$, а знак «−» — $m = \pm 1$. При этом функция $R_{\mu,m}(r, z')$ не обладает определенной четностью относительно инверсии $z' \to -z'$ при фиксированном m. Отсюда и из выражения для $D_{\mu\nu}$ следует, что диагональные элементы $D_{\mu\mu}$, вообще говоря, отличны от нуля.

Для исследования распространения ПКИ под произвольным углом α к оси анизотропии совершим преобразование поворота вокруг оси x. Тогда в новой декартовой системе (x, y, z) компоненты дипольных моментов запишутся в виде

$$\begin{gathered} d^x_{\mu\nu} = \frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}}\,|\Delta m_{\mu\nu}|, \\ d^y_{\mu\nu} = i\frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}}\Delta m_{\mu\nu}\cos\alpha - D_{\mu\nu}\left(1-|\Delta m_{\mu\nu}|\right)\sin\alpha, \\ d^z_{\mu\nu} = i\frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}}\Delta m_{\mu\nu}\sin\alpha + D_{\mu\nu}\left(1-|\Delta m_{\mu\nu}|\right)\cos\alpha. \end{gathered} \tag{2}$$

Соответственно для матричных элементов гамильтониана $\hat{V}$ электродипольного взаимодействия протонного перехода с полем импульса будем иметь

$$\begin{gathered} V_{\mu\nu} = -\mathbf{d}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \\ = \left[D_{\mu\nu}\left(1-|\Delta m_{\mu\nu}|\right)\sin\alpha - i\frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}}\,\Delta m_{\mu\nu}\cos\alpha\right]E_e - \\ - \frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}}\,|\Delta m_{\mu\nu}|E_o - \\ - \left[D_{\mu\nu}\left(1-|\Delta m_{\mu\nu}|\right)\cos\alpha + i\frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}}\,\Delta m_{\mu\nu}\sin\alpha\right]E_z. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь E_o, E_e — электрическое поле соответственно обыкновенной и необыкновенной составляющих (обыкновенная составляющая параллельна оси x, необыкновенная — оси y), E_z — продольная составляющая импульса, которая, хотя относительно мала, все же присутствует при распространении электромагнитной волны в кристаллах [33].

Система материальных уравнений для элементов матрицы плотности $\hat{\boldsymbol\rho}$ в случае рассматриваемого здесь вырожденного квантового перехода ($\mu = 1$ для $m = 0$, $\mu = 2, 3$ для $m = \pm 1$) запишется в виде

$$\frac{\partial \rho_{\mu\nu}}{\partial t} = -i\omega_{\mu\nu}\rho_{\mu\nu} + i\left[\hat{\boldsymbol\Omega}, \hat{\boldsymbol\rho}\right]_{\mu\nu}, \tag{4}$$

где $\omega_{21} = \omega_{31} = \omega_0$,

$$\hat{\boldsymbol\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_{22} & 0 & \Omega_{31} \\ 0 & \Omega_{22} & \Omega_{21} \\ \Omega_{31}^* & \Omega_{21}^* & \Omega_{11} \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{33} & \rho_{32} & \rho_{31} \\ \rho_{32}^* & \rho_{22} & \rho_{21} \\ \rho_{31}^* & \rho_{21}^* & \rho_{11} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\mu\mu} &= \frac{D_{\mu\mu}E_e}{\hbar}\sin\alpha, \\ \Omega_{31} &= \frac{d_{31}}{\sqrt{2}}\left(E_o - iE_e\cos\alpha\right), \\ \Omega_{21} &= \frac{d_{21}}{\sqrt{2}}\left(E_o + iE_e\cos\alpha\right). \end{aligned} \tag{6}$$

В системе (4)–(6) мы пренебрегли продольной компонентой поля импульса в силу ее относительной малости:

$$E_z \ll E_o, E_e.$$

Данную компоненту мы приближенно учтем ниже при записи волновых уравнений, т. е. будем считать, что данная составляющая поля порождается поперечными компонентами поляризации среды. Такой подход соответствует методу последовательных приближений. Кроме того, следуя [30], мы для простоты положили $D_{33} = D_{22}$. Следует сделать еще одно замечание относительно системы (4)–(6). В настоящей работе мы рассматриваем туннельные переходы, которые могут иметь место в различных средах, в том числе и в сегнетоэлектриках. Вообще говоря, надо учитывать диполь-дипольное взаимодействие между различными туннельными переходами, так как именно данное взаимодействие вызывает фазовый переход в сегнетоэлектрическое состояние [25, 26]. Однако, как отмечалось выше, в силу спектрального перекрытия туннельных переходов мощным импульсом происходит разрыв диполь-дипольных взаимодействий и каждый из туннельных переходов значительно сильнее взаимодействует с полем импульса, чем с окружением себе подобных переходов [24]. Поэтому здесь мы изначально пренебрегли диполь-дипольным взаимодействием и все дальнейшие выводы работы касаются в том числе и сегнетоэлектриков.

Дополним материальные уравнения (4)–(6) уравнением Максвелла для электрического поля импульса

$$\Delta\mathbf{E} - \nabla(\nabla\mathbf{E}) - \frac{\hat{\mathbf{n}}^2}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2}, \tag{7}$$

где c — скорость света в вакууме, $\hat{\mathbf{n}}$ — тензор показателя преломления, обусловленного нерезонансными переходами, отличными от рассматриваемых нами туннельных переходов, $\mathbf{P}$ — вектор поляризации среды.

Ниже будем считать, что параметры импульса, распространяющегося вдоль оси z, слабо зависят от поперечных координат y и x. Учитывая также, что, $E_z \ll E_o, E_e$, приходим к выводу о возможности пренебрежения слагаемым $\nabla(\nabla\mathbf{E})$. При проецировании же на ось z данное слагаемое является существенным. Оставляя в этой проекции производные лишь по одной пространственной переменной z, после двукратного интегрирования по времени с учетом нулевых значений E_z и P_z на бесконечности получим

$$E_z = -\frac{4\pi P_z}{n_\parallel},$$

где $n_\parallel$ — продольная компонента показателя преломления.

Для компонент поляризации

$$P_j = N\,\mathrm{Sp}\left(\hat{\boldsymbol\rho}\hat{\mathbf{d}}^j\right),$$

где N — концентрация туннельных переходов, $j = x, y, z$, получим

$$P_x = P_o = N\left[\frac{d_{21}}{\sqrt{2}}\left(\rho_{21} + \rho_{21}^*\right) + \frac{d_{31}}{\sqrt{2}}\left(\rho_{31} + \rho_{31}^*\right)\right],$$

$$\begin{aligned} P_y = P_e = N\Big[&i\frac{d_{21}}{\sqrt{2}}\cos\alpha(\rho_{21}^* - \rho_{21}) - \\ &-i\frac{d_{31}}{\sqrt{2}}\cos\alpha(\rho_{31}^* - \rho_{31}) + D\sin\alpha(\rho_{11} - W_1)\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_z = N\Big[&\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\alpha(d_{31}(\rho_{31}^* - \rho_{31}) - \\ &-d_{21}(\rho_{21}^* - \rho_{21})) + D\cos\alpha(\rho_{11} - W_1)\Big], \end{aligned}$$

где $D = D_{11} - D_{22}$. Ниже величину D будем называть постоянным дипольным моментом. Тогда волновые уравнения для E_o и E_e примут вид

$$\Delta E_o - \frac{n_o^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2} = \frac{4\pi N}{c^2\sqrt{2}} \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[d_{21}(\rho_{21}+\rho_{21}^*) + d_{31}(\rho_{31}+\rho_{31}^*)\right], \quad (8)$$

$$\Delta E_e - \frac{n_e^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2} = \frac{4\pi N}{c^2} \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{ i\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}\left[d_{21}(\rho_{21}^* - \rho_{21}) - d_{31}(\rho_{31}^* - \rho_{31})\right] + \right. \\ \left. + D\sin\alpha(\rho_{11} - W_1)\right\}, \quad (9)$$

где n_o и n_e — показатели преломления, соответствующие обыкновенным и необыкновенным волнам. Для продольной компоненты поля получим

$$E_z = -\frac{4\pi N}{n_\parallel}\left\{ i\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}\left[d_{31}(\rho_{31}^* - \rho_{31}) - \right.\right. \\ \left.\left. - \, d_{21}(\rho_{21}^* - \rho_{21})\right] + D\cos\alpha(\rho_{11} - W_1)\right\}. \quad (10)$$

Здесь и ниже W_j $(j = 1, 2)$ — начальные населенности квантовых уровней (считается, что из-за вырождения верхнего уровня $W_3 = W_2$).

Система уравнений (4)–(6) и (8)–(10) самосогласованным образом описывает динамику импульсных полевых компонент и системы туннельных переходов. Из этих уравнений видно, что обыкновенная компонента поля вызывает квантовые переходы в системе туннельных подуровней, роль же необыкновенной составляющей сводится как к возбуждению данных переходов, так и к динамическому сдвигу их частоты за счет постоянного дипольного момента (отличных от нуля диагональных элементов матрицы $\hat{\mathbf{\Omega}}$). Продольная компонента E_z, как видно из (10), может порождаться за счет постоянного дипольного момента и дипольных моментов переходов.

Заметим, что при $\alpha = 0$ обыкновенная и необыкновенная компоненты вызывают только квантовые переходы, в то время как при $\alpha = 90^\circ$ роль обеих составляющих строго дифференцирована: обыкновенная по-прежнему вызывает квантовые переходы, а необыкновенная лишь сдвигает частоту переходов. Продольная компонента при $\alpha = 0$ определяется постоянным дипольным моментом, а при $\alpha = 90^\circ$ — дипольными моментами переходов. Заметим, что при $\alpha = 0$ и $\alpha = 90^\circ$ нерезонансные импульсы и непрерывное излучение не обладают продольными компонентами [18, 33]. Для ПКИ, как видно из (10) и будет проанализировано ниже, данное правило, вообще говоря, не имеет места.

При выводе самосогласованной системы материальных и волновых уравнений мы считали, что активному взаимодействию с полем импульса подвержены лишь туннельные переходы на частоте ω_0. Вообще говоря, в двухъямных потенциалах кроме рассматриваемых нами уровней существуют и другие, вышележащие, протонные состояния, поэтому модель не всегда может быть сведена к системе двухуровневых переходов с двукратно вырожденным верхним уровнем. Однако во многих случаях ближайший из лежащих выше уровней оказывается значительно удален: при том, что $\omega_0 \sim 10^{13}$ с$^{-1}$, расстояние по частотной шкале до такого уровня, например, в сегнетоэлектрике типа KDP, составляет около $5\cdot 10^{14}$–10^{15} с$^{-1}$ [26]. При длительности импульса $\tau_p \sim 10^{-14}$ с его спектр не захватывает переходы на вышележащие удаленные уровни, поэтому влияние последних, а также (по этой же причине) электронных переходов мы учли введением тензора показателя преломления.

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Зададимся целью из системы (4)–(6) выразить матричные элементы $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ через полевые компоненты E_o, E_z и свести, таким образом, дальнейшее исследование к анализу нелинейных волновых уравнений. Условие перекрытия туннельных переходов спектром ПКИ можно записать в виде [1–3, 7–9]

$$\omega_0\tau_p \ll 1. \quad (11)$$

В силу условия (11) в правой части (4) можно в нулевом приближении пренебречь первым слагаемым и переписать данную систему в символическом виде:

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial t} = i\left[\hat{\mathbf{\Omega}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}\right]. \quad (12)$$

Формальное решение (12) имеет вид

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\boldsymbol{\rho}}_0\hat{\mathbf{U}}^+, \quad (13)$$

где $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ — матрица плотности до импульсного воздействия, $\hat{\mathbf{U}}$ — унитарный оператор эволюции. Из выражения (5) для $\hat{\mathbf{\Omega}}$ видно, что эта матрица не коммутирует сама с собой в различные моменты времени. Ниже, следуя работам [32, 34–36], будем считать импульс настолько коротким и мощным, что данная некоммутативность внутри интервала Δt импульсного воздействия оказывается не очень значительной, а потому оператор эволюции можно приближенно записать следующим образом [32, 34–36]:

$$\hat{\mathbf{U}} = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ ||\hat{\mathbf{\Omega}}||\to\infty}} \left[\exp\left(i\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right], \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} \hat{\mathbf{\Omega}}\, dt', \tag{14}$$

где $||\ldots||$ — норма оператора.

Подход, основанный на (13), (14), эквивалентен операторному варианту асимптотического метода ВКБ [32, 35–38]. Вычислим операторную экспоненту в (14) с помощью формулы Сильвестра [39]:

$$\exp\left(i\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \sum_j \exp(i\lambda_j) \prod_{k\neq j} \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}} - \lambda_k \hat{\mathbf{I}}}{\lambda_j - \lambda_k}, \tag{15}$$

где $\hat{\mathbf{I}}$ — единичная матрица, $\{\lambda_k\}$ — спектр собственных значений оператора $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Так как $||\hat{\mathbf{\Omega}}|| \to \infty$, к этому же пределу стремятся и собственные значения λ_k. Раскрывая в (15) неопределенность перед мнимыми экспонентами по правилу Лопиталя и пользуясь тем, что

$$\lambda_j \approx \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} p_j dt',$$

в пределе $\Delta t \to 0$ ($\{p_j\}$ — спектр собственных значений оператора $\hat{\mathbf{\Omega}}$) из (14) и (15) получим

$$\hat{\mathbf{U}} = \sum_j \exp\left\{ i \int\limits_{-\infty}^{t} p_j dt' \right\} \prod_{k\neq j} \frac{\hat{\mathbf{\Omega}} - p_k \hat{\mathbf{I}}}{p_j - p_k}. \tag{16}$$

Собственные значения матрицы $\hat{\mathbf{\Omega}}$ имеют вид

$$p_1 = \Omega_{22}, \quad p_{2,3} = (\Omega_{11} + \Omega_{22} \pm |\Omega|)/2,$$

где

$$\begin{aligned} &|\Omega| = \sqrt{\Omega_e^2 + |\Omega_{oe}|^2}, \\ &\tilde{\Omega}_e = \Omega_{11} - \Omega_{22} = \frac{DE_e}{\hbar} \sin\alpha, \\ &|\Omega_{oe}|^2 = 4\left(|\Omega_{21}|^2 + |\Omega_{31}|^2\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Используя (16) и (17), представим оператор эволюции следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}} = 1 - 4 \frac{\left(\hat{\mathbf{\Omega}} - \Omega_{11}\hat{\mathbf{I}}\right)\left(\hat{\mathbf{\Omega}} - \Omega_{22}\hat{\mathbf{I}}\right)}{|\Omega_{oe}|^2} \times \\ \times \left(1 - \exp\left(i\frac{\theta_e}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\right) + 2i\exp\left(i\frac{\theta_e}{2}\right) \frac{\hat{\mathbf{\Omega}} - \Omega_{22}\hat{\mathbf{I}}}{\Omega} \times \\ \times \left(1 - 2\frac{\tilde{\Omega}_e\left(\hat{\mathbf{\Omega}} - \Omega_{11}\hat{\mathbf{I}}\right)}{|\Omega_{oe}|^2}\right)\sin\frac{\theta}{2}, \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\theta = \int\limits_{-\infty}^{t} |\Omega|\, dt', \quad \theta_e = \int\limits_{-\infty}^{t} \tilde{\Omega}_e\, dt'.$$

Отсюда с учетом (13) находим

$$\begin{aligned} \rho_{21} = i(W_1 - W_2)\frac{\Omega_{21}}{|\Omega|}\sin\theta + \\ + 2(W_1 - W_2)\frac{\Omega_{11}\Omega_{21}}{|\Omega|^2}\sin^2\frac{\theta}{2}, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \rho_{31} = i(W_1 - W_2)\frac{\Omega_{31}}{|\Omega|}\sin\theta + \\ + 2(W_1 - W_2)\frac{\Omega_{11}\Omega_{31}}{|\Omega|^2}\sin^2\frac{\theta}{2}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\rho_{32} = -\Omega_{31}\Omega_{21}^* B, \tag{21}$$

$$\rho_{11} = W_1 - (W_1 - W_2)\frac{|\Omega_{oe}|^2}{|\Omega|^2}\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{22}$$

$$\rho_{22} = W_2 + 4(W_1 - W_2)\frac{|\Omega_{21}|^2}{|\Omega|^2}\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{23}$$

$$\rho_{33} = W_2 + 4(W_1 - W_2)\frac{|\Omega_{31}|^2}{|\Omega|^2}\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{24}$$

где B — вещественная величина, зависящая от параметров матрицы $\hat{\mathbf{\Omega}}$. Ее явный вид не является существенным для дальнейших целей, поэтому здесь мы его не приводим.

Учтем теперь приближенно первое слагаемое в правой части (4). Для этого вместо него в каждое из уравнений подставим выражения (19)–(24). В результате, выражая элементы $\hat{\mathbf{\Omega}}$ через исходные полевые и материальные переменные, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left[d_{21}(\rho_{21} + \rho_{21}^*) + d_{31}(\rho_{31} + \rho_{31}^*)\right] = \\ = \frac{2\sqrt{2}}{\hbar} d^2 (W_1 - W_2) \times \\ \times \left[\left(\omega_0 + \frac{DE_e}{\hbar}\sin\alpha\right)\frac{E_o}{|\Omega|}\sin\theta - \right. \\ \left. - \delta\cos\alpha E_e\left(\cos\theta - \frac{2\omega_0 D}{\hbar}\sin\alpha\frac{E_e}{|\Omega|^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right], \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left[d_{21}(\rho_{21} + \rho_{21}^*) - d_{31}(\rho_{31} + \rho_{31}^*)\right] = \\ = -i\frac{2\sqrt{2}}{\hbar} d^2 (W_1 - W_2) \times \\ \times \left[\left(\omega_0 + \frac{DE_e}{\hbar}\sin\alpha\right)\cos\alpha\frac{E_o}{|\Omega|}\sin\theta + \right. \\ \left. + \delta\left(\cos\theta - \frac{2\omega_0 D}{\hbar}\sin\alpha\frac{E_e}{|\Omega|^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right], \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$d^2 = (d_{21}^2 + d_{31}^2)/2, \quad \delta = (d_{21}^2 - d_{31}^2)/2d^2,$$
$$|\Omega| = \frac{1}{\hbar}\sqrt{D^2 E_e^2 \sin^2\alpha + 4d^2(E_o^2 + E_e^2\cos^2\alpha)}. \tag{27}$$

Подставляя (25), (26) и (22) в правые части (8) и (9), после использования приближения квазиоднонаправленного распространения [2–4, 7, 18, 40] получим

$$\frac{\partial E_o}{\partial z} = -g\left\{\left(\omega_0 + \frac{DE_e}{\hbar}\sin\alpha\right)\frac{E_o}{\Omega}\sin\theta - \right.$$
$$\left. - \delta\cos\alpha\left(\cos\theta - \frac{2\omega_0 D}{\hbar}\sin\alpha\frac{E_e}{\Omega^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right\} +$$
$$+ \frac{c}{2n_o}\boldsymbol{\Delta}_\perp\int\limits_{-\infty}^{\tau} E_o d\tau', \tag{28}$$

$$\frac{\partial E_e}{\partial z} + \frac{n_e - n_o}{c}\frac{\partial E_e}{\partial \tau} =$$
$$= -g\left\{\cos^2\alpha\left(\omega_0 + \frac{DE_e}{\hbar}\sin\alpha\right)\frac{E_o}{\Omega}\sin\theta - \right.$$
$$\left. - \delta\cos\alpha\left(\cos\theta - \frac{2\omega_0 DE_e}{\hbar\Omega^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)E_o\right\} +$$
$$+ g\left\{\frac{D}{\hbar}\sin\alpha\frac{E_o^2 + E_e^2\cos^2\alpha}{\Omega}\sin\theta\right\} +$$
$$+ \frac{c}{2n_o}\boldsymbol{\Delta}_\perp\int\limits_{-\infty}^{\tau} E_e d\tau', \tag{29}$$

где

$$\tau = t - n_o z/c,$$
$$g = \frac{4\pi N}{cn_o\hbar}d^2(W_1 - W_2),$$

$\Delta_\perp$ — поперечный лапласиан.

В настоящей работе мы часто используемое приближение называем квазиоднонаправленным по причине того, что все-таки учитываем слабую зависимость от поперечных координат, что в уравнениях (28) и (29) выражено поперечным лапласианом. Такой учет данной зависимости аналогичен параксиальному приближению в теории монохроматических пучков света [41]. На другой причине, по которой мы используем обсуждаемое приближение, следует остановиться несколько подробней. Прежде всего заметим, что в работе [40] это приближение было использовано на основании предположения о малости концентрации атомов, взаимодействующих с полем:

$$\eta \equiv \frac{4\pi d^2 N}{\hbar\omega_0} \ll 1.$$

В нашем случае данное предположение не является обязательным. Действительно, вследствие условия (11), для обеих компонент справедлива оценка поляризации (см. также (25) и (26))

$$P_{o,e} \sim \frac{\eta}{4\pi}\omega_0\tau_p\frac{\omega_0 + \tilde{\Omega}_e}{|\Omega|}E_{o,e}\sin\theta.$$

Произведение $\eta\omega_0\tau_p$ может быть малым, согласно (11), и при $\eta \sim 1$. Кроме того,

$$\left|\omega_0 + \tilde{\Omega}_e\right| / |\Omega| < 1.$$

Поэтому $P_{o,e} \ll E_{o,e}$, т. е. правая часть волнового уравнения (7) мала. Данное условие и является основной причиной, по которой можно использовать приближение квазиоднонаправленного распространения.

Из (10), (19), (20) и (22) находим выражения для продольной компоненты поля:

$$E_z = \frac{8\pi N(W_1 - W_2)}{\hbar n_\parallel\Omega}d^2\left\{\delta E_o\sin\alpha\sin\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{2D}{\hbar\Omega}\cos\alpha(E_e^2\sin\alpha + E_o^2 + E_e^2\cos^2\alpha)\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}. \tag{30}$$

Полагая в (30) последовательно $\alpha = 0$ и $\alpha = 90°$, получаем

$$E_z = 4\pi DN(W_1 - W_2)\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad \alpha = 0, \tag{31}$$

$$E_z = \frac{8\pi\delta d^2 N}{n_\parallel} \times$$
$$\times \frac{E_o}{\sqrt{D^2E_e^2 + 4d^2E_o^2}}\sin\theta, \quad \alpha = 90°. \tag{32}$$

Рассмотрим подробнее выражения (31) и (32). Хорошо известно, что в оптически одноосных кристаллах при распространении монохроматических световых волн параллельно и перпендикулярно оптической оси продольная компонента не возникает [33]. Этот же вывод справедлив и для ПКИ, не содержащих резонансных фурье-компонент [18]. В нашем же случае при $\alpha = 0$ продольная составляющая способна возникать за счет постоянного дипольного момента, а при $\alpha = 90°$ — за счет отстройки дипольных моментов переходов $1 \leftrightarrow 3$, $1 \leftrightarrow 2$. Кроме того, из уравнений (31), (32) видна нелинейная зависимость продольной компоненты от двух других полевых составляющих. Поэтому в генерации компоненты E_z нелинейность имеет принципиальное значение.

При $\alpha = 0$ различие между обыкновенной и необыкновенной компонентами стирается, поэтому обе составляющих способны генерировать продольную компоненту. При распространении же ПКИ перпендикулярно оптической оси, как видно из уравнения (32), компонента E_z генерируется за счет обыкновенной компоненты поля.

Система (28), (29) описывает нелинейное распространение обыкновенной и необыкновенной составляющих предельно короткого импульса в системе туннельных переходов под произвольным углом α к оси анизотропии. Ниже мы детально рассмотрим два случая, соответствующие распространению вдоль и поперек оси анизотропии.

4. САМОИНДУЦИРОВАННАЯ ПРОЗРАЧНОСТЬ

В случае $\alpha = 0$ имеем $n_e = n_o$ и систему (28), (29) можно записать в виде одного уравнения

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = -\frac{4\pi d^2 N}{n_o \hbar c}(W_1 - W_2) \times \\ \times \left[\omega_0 \frac{\Omega}{|\Omega|}\sin\theta + i\delta\Omega\cos\theta\right] + \frac{c}{2n_o}\Delta_\perp \int\limits_{-\infty}^{\tau} \Omega\, d\tau' \qquad (33)$$

для комплексной функции

$$\Omega = \Omega_o + i\Omega_e = 2d(E_o + iE_e)/\hbar.$$

Представляя функцию Ω как

$$\Omega = |\Omega| e^{i\varphi}, \qquad (34)$$

из уравнения (33) после отделения действительной и мнимой частей получим

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z\, \partial\tau} = -\frac{\omega_0}{l}\sin\theta + \frac{c}{2n_o}\Delta_\perp\theta, \qquad (35)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\delta}{l}\cos\theta,$$

где

$$1/l = 4\pi d^2 N(W_1 - W_2)/n_o \hbar c.$$

При получении уравнения (35) учитывалась малость поперечных возмущений, а также то обстоятельство, что в пределах времени порядка τ_p параметры импульса изменяются относительно медленно (см. выше). Это позволяет записать

$$\exp\left(-i\varphi(\mathbf{r},\tau')\right)\Delta_\perp \int\limits_{-\infty}^{\tau} |\Omega| \exp\left(i\varphi(\mathbf{r},\tau')\right)\, d\tau' \approx \\ \approx \Delta_\perp \int\limits_{-\infty}^{\tau} |\Omega| d\tau' = \Delta_\perp\theta.$$

В одномерном приближении ($\Delta_\perp = 0$) уравнение (35) переходит в уравнение синус-Гордона, односолитонное решение которого в исходных переменных z и t имеет вид

$$\theta = 4\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right)\right], \qquad (36)$$

где скорость определяется соотношением

$$\frac{1}{v} = \frac{n_o}{c} + \frac{\omega_0}{l}\tau_p^2. \qquad (37)$$

Используя (36) и (31), найдем соответствующие выражения для компонент поля $E_\perp = \hbar|\Omega|/2d$ и E_z, а так же для нелинейной фазы φ:

$$E_\perp = \frac{\hbar}{d\tau_p}\,\mathrm{sech}\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right), \qquad (38)$$

$$E_z = 4\pi D N (W_1 - W_2)\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right), \qquad (39)$$

$$\varphi = \frac{\delta}{\omega_0 \tau_p}\left[\frac{t - z/v}{\tau_p} - 2\,\mathrm{th}\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right)\right]. \qquad (40)$$

Поведение населенностей туннельных состояний найдем из выражений (36), (22)–(24), (27):

$$\rho_{11} = W_1 + (W_1 - W_2)\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right),$$

$$\rho_{22} = W_2 - (W_1 - W_2)\frac{d_{21}^2}{d_{21}^2 + d_{31}^2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right), \qquad (41)$$

$$\rho_{33} = W_2 + (W_1 - W_2)\frac{d_{31}^2}{d_{21}^2 + d_{31}^2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right).$$

Из выражений (41) видно, что по мере распространения солитона происходит полная инверсия туннельной среды с последующим ее возвратом в исходное состояние. Таким образом, реализуется режим самоиндуцированной прозрачности для ПКИ.

Из (34), (38) и (40) видно, что плоскость поляризации ПКИ на его протяжении искривлена вследствие того, что $\delta \neq 0$ ($d_{21} \neq d_{31}$). Отметим, что теория явления самоиндуцированной прозрачности в трехуровневых резонансных средах (в том числе с учетом вырождения) для двухчастотных квазимонохроматических импульсов развивалась в работах [42, 43]. Одно из важных отличий рассмотренного нами случая от результатов последних работ заключается в присутствии продольной компоненты ПКИ вследствие наличия постоянного дипольного момента. Использованное в начале работы условие $E_z \ll E_\perp$, как видно из (38), (39), может быть записано в виде

$$\omega_0 \tau_p \ll \frac{d}{D\eta},$$

которое должно выполняться наряду с условием (11). При малой концентрации туннельных центров ($\eta \ll 1$) данное неравенство выполняется в широком диапазоне соотношений d/D. В противном случае дипольные моменты должны играть доминирующую роль по сравнению с постоянным дипольным моментом.

Пусть теперь $\alpha = 90°$. В этом случае $\tilde{\Omega}_e = \Omega_e$ и система (28), (29) принимает вид

$$\frac{\partial \Omega_o}{\partial z} = -\beta_o(\omega_0 + \Omega_e)\frac{\Omega_o}{|\Omega|}\sin\theta + \\ + \frac{c}{2n_o}\Delta_\perp \int\limits_{-\infty}^{\tau} \Omega_o d\tau', \quad (42)$$

$$\frac{\partial \Omega_e}{\partial z} + \frac{n_e - n_o}{c}\frac{\partial \Omega_e}{\partial \tau} = \\ = \beta_e \frac{\Omega_o^2}{|\Omega|}\sin\theta + \frac{c}{2n_o}\Delta_\perp \int\limits_{-\infty}^{\tau} \Omega_e d\tau', \quad (43)$$

где

$$\beta_o = \frac{4\pi d^2 N}{n_o \hbar c}(W_1 - W_2), \quad \beta_e = \frac{4\pi D^2 N}{n_o \hbar c}(W_1 - W_2),$$

$$|\Omega| = \sqrt{\Omega_o^2 + \tilde{\Omega}_e^2}.$$

Пренебрежем различием между n_e и n_o, а также положим $\Delta_\perp = 0$. Тогда из (42), (43) с учетом того, что на бесконечности поле принимает нулевое значение, находим связь между Ω_o и Ω_e, аналогичную найденной в работах [44, 45] при решении другой физической задачи с использованием формализма метода обратной задачи рассеяния в теории солитонов:

$$\Omega_o^2 = -\frac{\beta_o}{\beta_e}(\Omega_e^2 + 2\omega_0\Omega_e). \quad (44)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\Omega_e < 0, \quad |\Omega_e| < 2\omega_0.$$

Согласно принятому в настоящей работе приближению $||\hat{\mathbf{\Omega}}|| \gg \omega_0$. Следовательно, $\Omega_o \gg |\Omega_e|$ и в (42) можно положить

$$|\Omega| \approx \Omega_o, \quad \theta \approx \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega_o dt'.$$

С другой стороны, из (44) (с учетом условия $\Omega_e = 0$ при $\beta_e = 0$) находим

$$\Omega_e + \omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - (\beta_e/\beta_o)\Omega_o^2}.$$

Тогда уравнение (42) примет вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z\, \partial \tau} = -\beta_o \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta_e}{\beta_o}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau}\right)^2}\,\sin\theta. \quad (45)$$

Солитоноподобное решение уравнения (45) можно записать следующим образом:

$$E_o = \frac{d\varepsilon}{\hbar \tau_p}\,\frac{\operatorname{ch}\xi}{1 + \varepsilon^2 \operatorname{sh}^2 \xi}, \quad (46)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{1 - (D/2d)^2(\omega_0\tau_p)^{-2}}, \quad \xi = (t - z/v)/\tau_p.$$

Связь между скоростью и длительностью импульса снова определяется соотношением (37). Выражение для необыкновенной компоненты имеет вид

$$E_e = -\frac{\hbar}{D}\omega_0 \times \\ \times \left[1 - \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2\left[\varepsilon^2(1+\operatorname{ch}^2\xi)-2\right](1+\operatorname{ch}^2\xi)}}{1+\varepsilon^2\operatorname{sh}^2\xi}\right]. \quad (47)$$

Полагая в (32)

$$4d^2 E_o^2 \gg D^2 E_e^2,$$

запишем для продольной составляющей

$$E_z = \frac{8\pi\delta N}{n_\parallel}\varepsilon \frac{\operatorname{sh}\xi}{1+\varepsilon^2\operatorname{sh}^2\xi}. \quad (48)$$

В отличие от положительного и отрицательного всплесков соответственно обыкновенной и необыкновенной компонент, продольная составляющая имеет вид двухполярного уединенного импульса.

Используя (22)–(24) и (46) при условии $|\Omega_{oe}|^2 = |\Omega|^2$, получим для населенностей

$$
\begin{aligned}
\rho_{11} &= W_1 - \frac{W_1 - W_2}{1+\varepsilon^2 \operatorname{sh}^2 \xi}, \\
\rho_{22} &= W_2 + 2\frac{d_{21}^2}{d^2}\,\frac{W_1 - W_2}{1+\varepsilon^2 \operatorname{sh}^2 \xi}, \\
\rho_{33} &= W_2 + 2\frac{d_{31}^2}{d^2}\,\frac{W_1 - W_2}{1+\varepsilon^2 \operatorname{sh}^2 \xi}.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Из (46) и (49) видно, что по мере прохождения уединенного импульса происходит полная инверсия населенностей с последующим возвратом в исходное состояние, т. е. снова, как и в случае $\alpha = 0$, реализуется режим самоиндуцированной прозрачности.

Полагая в (46) $D = 0$ ($\varepsilon = 1$), приходим к выражению (38) для солитона уравнения синус-Гордона. Импульс (46) оказывается меньшим по амплитуде и слабее, чем солитон уравнения синус-Гордона, локализован в пространственно-временных масштабах. Из выражения для ε следует ограничение снизу на длительность импульса

$$
\omega_0 \tau_p > \left(\frac{D}{2d}\right)^2, \tag{50}
$$

которое должно выполняться наряду с (11).

Обоим условиям достаточно просто удовлетворить при $d/D \geq 5$.

5. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИЕ ИМПУЛЬСЫ

Пусть теперь $\alpha = 90°$ и $n_e \neq n_o$. Кроме того, будем считать $\Omega_e \gg \omega_0$, а обыкновенная компонента Ω_o может соотноситься по величине с Ω_e произвольным образом. В этом случае по-прежнему $||\hat{\mathbf{\Omega}}|| \gg \omega_0$. Полевые компоненты между собой также могут соотносится произвольным образом. В формуле (42) можно положить приближенно

$$
\Omega_e + \omega_0 \approx \Omega_e.
$$

Предположим далее пропорциональную зависимость между Ω_e и Ω_o,

$$
\Omega_e = q\Omega_o, \tag{51}
$$

где q — свободный параметр.

Тогда уравнения (42) и (43) становятся похожими друг на друга и по крайней мере могут иметь одно общее решение в виде стационарной бегущей волны. Аналогичная ситуация рассматривалась в [46].

Применим подход, который позволит нам получить не только решения в виде бегущих ПКИ, но и исследовать вопросы об их устойчивости.

Используя (51) и сказанное выше в настоящем разделе, перепишем систему (42), (43) при $\Delta_\perp = 0$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial z\,\partial\tau} = -\frac{q\beta_o}{\sqrt{1+q^2}}\,\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\sin\theta, \\
&\frac{\partial^2\theta}{\partial z\,\partial\tau} + \frac{n_e - n_o}{c}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2} = \frac{\beta_e}{q\sqrt{1+q^2}}\,\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\sin\theta.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

В (52) входит параметр q предполагаемого решения, поэтому данную систему лишь условно можно рассматривать как уравнения. Кроме того, записанные для одной и той же величины эти уравнения должны быть тождественными. Условие их совместности можно записать после интегрирования по τ. Тогда приходим к двум анзацам:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta}{\partial z} = -2\beta_o\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}\sin^2\frac{\theta}{2}, \\
&\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{2c}{q\sqrt{1+q^2}\,(n_e - n_o)}(\beta_e + \beta_o q^2)\sin^2\frac{\theta}{2}.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Данные анзацы, как и (52), пригодятся нам в дальнейшем при рассмотрении вопроса устойчивости.

Будем искать решение в виде уединенной бегущей волны. Тогда из (53) получим

$$
\theta = -2\operatorname{arcctg}\xi, \tag{54}
$$

где

$$
\xi = (t - z/v)/\tau_p,
$$

а скорость v и длительность τ_p связаны с параметром q соотношениями

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{v} = \frac{1}{c}\left[n_o + (n_e - n_o)\frac{\beta_o q^2}{\beta_e + \beta_o q^2}\right], \\
&\tau_p = \frac{(n_e - n_o)q\sqrt{1+q^2}}{2c(\beta_e + \beta_o q^2)}.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Выражения для полевых и материальных компонент имеют вид

$$
\begin{aligned}
E_o &= \frac{\hbar}{d\tau_p\sqrt{1+q^2}}\,\frac{1}{1+\xi^2},\\
E_e &= \frac{2\hbar q}{D\tau_p\sqrt{1+q^2}}\,\frac{1}{1+\xi^2},\\
E_z &= -\frac{8\pi\delta dN}{n_\parallel\sqrt{1+q^2}}\,\frac{\xi}{1+\xi^2}.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho_{11} &= W_1 - \frac{W_1-W_2}{1+q^2}\,\frac{1}{1+\xi^2},\\
\rho_{22} &= W_2 + 2\frac{d_{21}^2}{d^2}\,\frac{W_1-W_2}{1+q^2}\,\frac{1}{1+\xi^2},\\
\rho_{33} &= W_2 + 2\frac{d_{31}^2}{d^2}\,\frac{W_1-W_2}{1+q^2}\,\frac{1}{1+\xi^2}.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Из выражений (56) видно, что компоненты напряженности поля убывают на бесконечности не экспоненциальным, а степенным образом. При этом, как и в последнем случае предыдущего раздела, обе поперечные составляющие имеют однополярный, а продольная — двуполярный вид. Из второго выражения (55) видно, что при $n_o = n_e$ такие импульсы не существуют. Из первого выражения (55) следует, что скорость ПКИ заключена в интервале между c/n_o и c/n_e. При доминировании обыкновенной компоненты ($q^2 \ll 1$) $v = c/n_o$, а длительность равна

$$\tau_p \approx \frac{(n_e-n_o)q}{2c\beta_e},$$

и, как видно из (57), по мере прохождения импульса происходит полная инверсия с последующим возвращением среды к исходному состоянию (режим самоиндуцированной прозрачности). В противоположном пределе $v = c/n_e$ длительность равна

$$\tau_p \approx \tau_{pe} \equiv \frac{n_e-n_o}{2c\beta_o},$$

в то время как населенности туннельных подуровней практически не изменяются. Можно сказать, что здесь реализуется режим, аналогичный необыкновенной прозрачности [32]. Отличие от необыкновенной прозрачности заключается в том, что скорость двухкомпонентного ПКИ не замедляется, т. е. практически равна c/n_e, а длительность τ_p стремится к постоянному значению τ_{pe}. В случае положительного двулучепреломления ($n_e > n_o$) имеем

$$c/n_e < v < c/n_o,$$

а для отрицательного двулучепреломления ($n_o > n_e$) имеем

$$c/n_o < v < c/n_e.$$

Следует заметить, что смысл длительности ПКИ имеет абсолютное значение τ_p. Здесь характерно наличие максимальной длительности импульса: при $2D^2 > d^2$ имеем

$$\tau_{p\,max} = \tau_m,$$

а при $2D^2 < d^2$ имеем

$$\tau_{p\,max} = \tau_m\left[2(1-2D^2/d^2)\right]^{-1/2},$$

$$\tau_m = |n_e - n_o|/2c\beta_o.$$

Отметим важное отличие рациональных солитонов (56) от полученных в работе [31], которые имеют однокомпонентный (скалярный) характер.

Рассмотрим вопрос об одномерной устойчивости рациональных ПКИ. Для этого в первом анзаце (53) устремим τ к бесконечности. Тогда

$$\theta = A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Omega\, d\tau'$$

и выражение (53) примет вид

$$\frac{dA}{dz} = -2\beta_o\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}\sin^2\frac{A}{2}. \tag{58}$$

Анализ данного уравнения показывает, что «площадь» A входного ПКИ в среде стремится к значению $2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ При этом 2π-импульс может сформироваться, если на входе выполняется условие $2\pi < A_0 < 4\pi$, 4π-импульс формируется при условии $4\pi < A_0 < 6\pi$ и т. д. Если $2\pi < A_0$, то при $z\to\infty$ имеем $A \to 0$ и рациональный солитон не может сформироваться. Из (54) видно, что площадь наших рациональных ПКИ равна 2π.

Исследование, проведенное на основе анзаца (58), показывает одностороннюю устойчивость ПКИ в одномерном случае. Заметим, что при доминировании необыкновенной составляющей ($q^2 \gg 1$) рациональный солитон формируется на длине $\ell_{eff} = 2\beta_o$, значительно меньшей, чем в случае преобладания обыкновенной компоненты.

6. УЧЕТ ДИФРАКЦИИ

Рассмотрим влияние поперечных возмущений (вплоть до учета дифракции) на распространение рассмотренных выше пространственно одномерных ПКИ. Для этого используем метод усредненного лагранжиана [47].

Вначале исследуем случай самоиндуцированной прозрачности при распространении ПКИ вдоль оси анизотропии. Уравнение (35) может быть получено из плотности лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \frac{\omega_0}{l}(1-\cos\theta) - \frac{c}{4n_o}(\nabla_\perp\theta)^2. \quad (59)$$

Пробное решение (35), при $\Delta_\perp \neq 0$ соответствующее (36), будем искать в виде

$$\theta = 4\,\mathrm{arctg}\left\{\exp\left[\rho(\tau-\Phi)\right]\right\}, \quad (60)$$

где $\rho = \rho(z, \mathbf{r}_\perp)$, $\Phi = \Phi(z, \mathbf{r}_\perp)$ — соответственно, медленная и быстрая функции координат, подлежащие определению. После подстановки (60) в (59) и интегрирования по переменной τ получим «усредненный лагранжиан»:

$$\Lambda = \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} L\,d\tau = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\omega_0}{l\rho} - \frac{c}{2n_o}\rho(\nabla_\perp\Phi)^2 - \frac{\pi^2 c}{24n_o}\frac{(\nabla_\perp\rho)^2}{\rho^3}. \quad (61)$$

Варьируя Λ по Φ и ρ, соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа запишем в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\mathbf{V}_\perp^2}{2} + \int\frac{dp}{\rho} = \frac{g_0}{\rho^3}\left[\Delta_\perp\rho - \frac{3}{2\rho}(\nabla_\perp\rho)^2\right],\\ \frac{\partial\rho}{\partial z} + \nabla_\perp(\rho\mathbf{V}_\perp) = 0,\end{gathered} \quad (62)$$

где

$$\mathbf{V}_\perp = \nabla_\perp\Phi, \quad g_0 = \frac{\pi^2 c^2}{12n_o^2},$$

а динамические параметры p и ρ связаны уравнением

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{2c\omega_0}{n_o l\rho^2}. \quad (63)$$

В одномерном случае ($\nabla_\perp = \Delta_\perp = 0$) система (62), (63) имеет решение

$$\rho = \rho_0 = \frac{1}{\tau_p} = \mathrm{const}, \quad \Phi = \frac{z}{v},$$

а v определяется согласно уравнению (37). Таким образом, в данном случае метод усредненного лагранжиана приводит к точному односолитонному решению уравнения (35).

Правая часть первого уравнения (62) описывает эффекты дифракции в поперечной динамике импульса. Пренебрежение правой частью соответствует эйкональному приближению (приближению геометрической оптики) для солитоноподобных импульсов [41]. В этом случае система (62) принимает вид уравнений гидродинамики идеальной жидкости (первое уравнение имеет смысл интеграла Коши, второе — уравнения непрерывности). Параметр p играет роль внутреннего давления, ρ — плотности, а $\mathbf{V}_\perp$ — гидродинамической скорости. Проводя дальнейшую аналогию, можно сказать, что (63) имеет смысл дифференциального уравнения соответствующего адиабатического процесса. Тогда в эйкональном приближении поперечная устойчивость солитона будет соответствовать устойчивому течению идеальной жидкости типа (62), (63) при $F = 0$. Соответствующий критерий имеет вид

$$dp/d\rho > 0.$$

Из (63) видно, что при начальном равновесном состоянии среды ($1/l \sim W_1 - W_2 > 0$) солитон синус-Гордона оказывается устойчивым в приближении геометрической оптики. Из (38), (39) видно, что при выполнении условия

$$dp/d\rho \sim 1/l > 0$$

скорость $\mathbf{V}_\perp$ является монотонно возрастающей функцией амплитуды ПКИ, поэтому участки фронта импульса с большей амплитудой, соответствующие центру поперечного сечения ПКИ, опережают при распространении периферийные участки, где амплитуда меньше. В результате данного дефокусирующего эффекта импульс может принять форму «электромагнитного снаряда» или «световой пули» [48].

Исследуем теперь влияние дифракции (правая часть (62)) на динамику импульса. Система (62) немногим отличается от соответствующей системы, описывающей поперечную динамику непрерывного светового пучка [41]. Поэтому, следуя данной аналогии, будем считать поперечную структуру ПКИ осесимметричной. Записывая (62) в цилиндрической системе координат (z, r), будем искать приближенное решение для ρ в автомодельном виде [41]:

$$\rho(z,r) = \rho_0 \frac{R_0^2}{R^2(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2(z)}\right), \qquad (64)$$

где R_0 — постоянная, имеющая смысл входного радиуса ПКИ, а $R(z)$ — текущий радиус.

В дальнейшем, следуя [41], будем интересоваться приосевой ($r^2/R^2 \ll 1$) динамикой импульса, поэтому решение для Φ запишем в виде разложения

$$\Phi(z,r) = f_1(z) + \frac{1}{2} f_2(z) r^2 + \ldots \qquad (65)$$

Подставляя (64), (65) в (62) и ограничиваясь членами порядка r^2/R^2, после приравнивания выражений при равных степенях r получим

$$f_2 = R'/R, \qquad (66)$$

$$f_2' + f_2^2 = 4QR^2 - 5D, \qquad (67)$$

$$f_1' = QR^4 - DR^2, \qquad (68)$$

где

$$Q = \frac{\omega_0}{lc/n_o \rho_0^2 R_0^4}, \quad D = \frac{\pi^2 c^2}{3 n_o^2 \rho_0^2 R_0^4},$$

штрихи обозначают производную по z. Последние слагаемые в (67), (68) учитывают отклонение от приближения геометрической оптики.

Подставляя (66) в (67), придем к уравнению для радиуса ПКИ:

$$R'' = -\frac{\partial U}{\partial R}, \qquad (69)$$

формально совпадающему с уравнением движения ньютоновской частицы единичной массы во внешнем поле с потенциальной энергией

$$U(R) = -QR^4 + \frac{5D}{2} R^2. \qquad (70)$$

Первый интеграл уравнения (69) имеет вид

$$\frac{R'^2}{2} + U(R) = \Sigma, \qquad (71)$$

где постоянная

$$\Sigma = -QR_0^4 + 5DR_0^2/2$$

определена из условия на входе $R'(0) = 0$ (см. (66), входной импульс имеет плоский фронт, поэтому $f_2(z_0) = 0$).

Интегрируя (71), можно представить решение $R(z)$ в квадратурах. С другой стороны, анализируя кривую $U(R)$, можно сделать качественные выводы относительно поведения радиуса ПКИ при его распространении в среде.

Последнее слагаемое в правой части (71) учитывает дифракционные эффекты ПКИ при его поперечной динамике. Данная часть $U(R)$ аналогична потенциальной энергии гармонического осциллятора с той разницей, что здесь $R \geq 0$. Следовательно, в отличие от случая непрерывных пучков с ярко выраженной несущей частотой, дифракция усиливает эффект самофокусировки ПКИ. Данное отличие можно объяснить на основе следующих рассуждений. Безразмерный параметр $\sigma = \lambda/R$, где λ — характерная длина волны, определяет степень влияния волновых свойств импульса на его динамику. При $\sigma \ll 1$ выполняется условие эйконального приближения (приближения геометрической оптики). Если же $\sigma \sim 1$, необходимо учитывать волновые свойства (дифракцию). При самофокусировке монохроматического пучка его длина волны λ практически не изменяется, в то время как $R \to 0$, что приводит к увеличению σ, а вместе с этим — к возрастанию роли дифракции. Поэтому самофокусировка, вследствие дифракции, может смениться расходимостью пучка, если его интенсивность меньше некоторого порогового значения [41]. Предельно короткий импульс не обладает несущей частотой, а роль λ играет его характерный размер вдоль направления распространения:

$$\lambda \sim v\tau = v/\rho,$$

где v — скорость импульса, которая в принятом нами приближении квазиоднонаправленного распространения мало отличается от c/n_o. Тогда, используя (17), запишем для σ в центре поперечного сечения ПКИ:

$$\sigma \sim \frac{cR}{n_o \rho_0 R_0^2}.$$

Отсюда видно, что при самофокусировке $\sigma \to 0$ и условие справедливости эйконального приближения выполняется еще лучше, а относительная роль дифракции уменьшается.

Из выражения (69) видно, что дефокусировка возможна при

$$\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_{R=R_0} < 0.$$

Отсюда получаем

$$R_0 > R_c = \pi \sqrt{\frac{5c}{12 n_o a}}. \qquad (72)$$

В противном случае солитон уравнения синус-Гордона испытывает самофокусировку. Заметим, что эйкональное приближение, использованное в [24], выделяет только дефокусирующий эффект. Таким образом, вывод работы [24] об устойчивости рассматриваемого солитона относительно самофокусировки справедлив для импульсов достаточно большого поперечного сечения. Оценим численно значение R_c. Взяв для сегнетоэлектрика типа KDP $d \sim 10^{-18}$ ед. СГСЭ, $N \sim 10^{21}$ см$^{-3}$, $\omega_0 \sim 10^{13}$ с$^{-1}$, $n_o \approx 1$, получим $a \sim 10^{15}$ с$^{-1}\cdot$см$^{-1}$. Тогда из (72) найдем $R_c \sim 0.1$ мм.

Для уравнения (45) невозможно записать соответствующий лагранжиан. Поэтому метод усредненного лагранжиана здесь неприменим. Легко видеть, что (45) переходит в уравнение синус-Гордона при усиленном варианте условия (50):

$$\omega_0\tau_p \gg \left(\frac{D}{2d}\right)^2.$$

В этом случае схема усредненного лагранжиана оказывается применимой и становятся справедливыми выводы для уравнения поперечной динамики солитона уравнения синус-Гордона, записанного выше. Если же усиленный вариант неравенства (50) не выполняется, можно провести качественные рассуждения, справедливые в эйкональном приближении, которые были использованы выше для случая синус-Гордона. Обыкновенная составляющая в ПКИ (46)–(48) является доминирующей. Поэтому для нее мы приведем соответствующие рассуждения. Из (46) видно, что амплитуда $E_{om} = d\varepsilon/\hbar\tau_p$ данного импульса немонотонно зависит от τ_p. Монотонное возрастание E_{om} с укорочением τ_p наблюдается при

$$\omega_0\tau_p > \sqrt{2}\,(D/2d)^2,$$

сменяясь затем убыванием. Используя (37), приходим к выводу, что последнее неравенство является критерием устойчивости ПКИ вида (46)–(48) в эйкональном приближении. Заметим, что данный критерий оказывается более жестким, чем условие (50).

Перейдем к рассмотрению влияния дифракции на динамику рациональных ПКИ, рассмотренных в разд. 5. Подставляя второй анзац (53) в первое уравнение (52), получаем

$$\frac{\partial\theta}{\partial z\,\partial\tau} + \mu\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) = \frac{c}{2n_o}\Delta_\perp\theta, \tag{73}$$

где

$$\mu = \frac{c\beta_o(\beta_e + \beta_o q^2)}{(n_e - n_o)(1+q^2)}.$$

Лагранжиан, соответствующий (73), имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \mu\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{\mu}{2}\sin^2\theta - \frac{c}{4n_o}(\nabla_\perp\theta)^2. \tag{74}$$

Пробное решение, соответствующее (54), запишем следующим образом:

$$\theta = -2\,\mathrm{arcctg}\left[\rho(\tau - \Phi)\right].$$

Подставляя данное решение в (74), после интегрирования по τ получим усредненный лагранжиан:

$$\Lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} L\,d\tau = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{c}{8n_o}\left(\frac{(\nabla_\perp\rho)^2}{\rho^3} + \rho(\nabla_\perp\Phi)^2\right).$$

Варьирование Λ по переменным Φ и ρ приводит к системе уравнений вида (62), (63), где теперь

$$g_0 = \left(\frac{c}{4n_o}\right)^2, \quad \frac{dp}{d\rho} = 0.$$

Последнее равенство говорит о том, что эйкональное приближение не дает ответа на вопрос об устойчивости рациональных ПКИ по отношению к поперечным возмущениям. Это связано с тем, что второе и третье слагаемые в левой части (74) при усреднении по τ взаимно уничтожились.

Процедура учета дифракции, предложенная выше, для этого случая приводит к уравнению для поперечного радиуса ПКИ вида (69), где U определяется выражением (70) при

$$Q = 0, \quad D = \frac{c^2}{4n_o^2\rho_0^2R_0^4}.$$

Таким образом, имеем уравнение гармонического осциллятора, которое при начальных условиях

$$R(0) = R_0, \quad R'(0) = 0$$

описывает процесс самофокусировки ПКИ:

$$R = R_0\cos\left(\frac{\pi z}{2l_f}\right). \tag{75}$$

Здесь l_f — длина самофокусировки:

$$l_f = \frac{\pi n_o}{\sqrt{5}\,c\tau_p}R_0^2, \tag{76}$$

$\tau_p = 1/\rho_0$ — входная длительность ПКИ.

Заметим, что l_f не зависит от параметров туннельных переходов. Это связано с тем, что на поперечную динамику здесь оказывает влияние исключительно дифракция, а эйкональное приближение не дает ответа на вопрос о поперечной динамике рациональных ПКИ. Взяв $\tau_p \sim 10^{-14}$ с, $n_o \sim 1$ и $R_0 \sim 0.1$ мм, получим $l_f \sim 1$ см.

Таким образом, влияние дифракции сводится к самофокусировке рациональных предельно коротких импульсов.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование, проведенное в настоящей работе, выявляет существенное влияние анизотропии туннельных переходов на динамику распространения ПКИ. Полученная нами система нелинейных волновых уравнений (28), (29) для обыкновенной и необыкновенной компонент описывает распространение ПКИ под произвольным углом α к оси анизотропии. Выражения (30)–(32) определяют поведение продольной компоненты поля. Важным здесь представляется то обстоятельство, что продольная составляющая ПКИ, спектр которого перекрывает туннельные переходы, способна формироваться при распространении параллельно и перпендикулярно оси анизотропии. Известно, что в данных направлениях в случае монохроматических пучков и ПКИ, не захватывающих квантовых переходов среды, продольная компонента отсутствует.

Нами детально рассмотрен режим распространения ПКИ параллельно и перпендикулярно оси анизотропии. В первом случае обнаружен режим самоиндуцированной прозрачности, описываемый уравнением синус-Гордона. Данный режим сопровождается сильным возбуждением туннельных переходов. Влияние дифракции на распространение соответствующих солитонов сводится к их самофокусировке, если их поперечный размер меньше критического, определяемого выражением (72). В противоположном случае должна происходить дефокусировка. При распространении поперек оси анизотропии может быть реализован режим, аналогичный самоиндуцированной прозрачности, но описываемый уравнением (45), отличным от уравнения синус-Гордона. Распространение соответствующих уединенных импульсов в среде туннельных переходов также сопровождается их сильным возбуждением. Показано существование ограничения снизу на длительность данных солитоноподобных импульсов, определяемого в одномерном случае условием (50). В существовании данного ограничения принципиальна роль постоянного дипольного момента D. Качественный анализ показывает, что влияние поперечных возмущений делает ограничение (50) более жестким.

В случае существенного различия обыкновенного и необыкновенного показателей преломления, образуемых нерезонансными компонентами среды, в системе туннельных переходов способны формироваться мощные резонансные солитоноподобные импульсы, амплитуды компонент которых убывают на бесконечности по степенному закону в зависимости от пространственной и временной координат. В случае доминирования обыкновенной составляющей происходят сильные возбуждения туннельных переходов. В противоположном пределе реализуется ситуация, когда населенности туннельных подуровней остаются плененными, а скорость распространения импульса определяется только необыкновенным показателем преломления.

Для формирования рациональных солитоноподобных импульсов в среде туннельных переходов площадь A_0 соответствующего входного сигнала должна превышать 2π. Если же $A_0 < 2\pi$, ситуация сводится к затуханию входного импульса.

Следует подчеркнуть, что поперечная динамика рассмотренных здесь резонансных ПКИ определяется исключительно их волновыми свойствами, т. е. дифракцией, в то время, как стадия геометрической оптики соответствует случаю «безразличного равновесия». Поэтому длина самофокусировки l_f определяется входными параметрами ПКИ и обыкновенным показателем преломления, но совершенно не зависит от характеристик туннельных переходов (см. выражение (76)). Отметим, что l_f пропорциональна квадрату радиуса входного ПКИ и обратно пропорциональна его длительности. При $\tau_p \sim 10$ фс и $R_0 \sim 0.1$ мм имеем $l_f \sim 1$ см. Увеличив поперечный радиус до 1 мм, длину самофокусировки можно увеличить в 100 раз, т. е. до 1 м. В этом случае можно говорить о возможности проведения экспериментов с рациональными солитоноподобными импульсами. Укорочение длительности τ_p до нескольких фемтосекунд приведет к уширению их спектра и, следовательно, к необходимости учета электронно-оптических переходов, а также вышележащих протонных уровней в двухъямных кристаллических потенциалах. В первом приближении можно считать влияние данных фактов не столь значительным в силу малого захвата соответствующих квантовых переходов спектром ПКИ. В этом случае учет их влияния можно провести с помощью приближения оптической прозрачности [49], а электронно-оптические переходы учесть в этом же приближении аддитивным образом.

Говоря о туннельных переходах, мы здесь в качестве примера приводили протонные переходы в сегнетоэлектриках типа KDP. Отметим, что в связи с развитием нанотехнологий сегодня можно говорить об оптических когерентных эффектах на системе квантовых точек и квантовых ям в полупроводниках [50–52]. Между данными объектами способны туннелировать электроны, а не протоны. В силу свойств низкоразмерности полупроводниковых структур данные туннельные переходы обладают достаточной анизотропией для наличия постоянных дипольных моментов [28, 30]. Поэтому есть основания надеяться на обнаружение описанных здесь режимов распространения ПКИ также и в искусственно выращенных полупроводниковых кристаллах с сильной анизотропией.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-02-17710а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин, А. Н. Ораевский, А. В. Усков, Письма в ЖЭТФ **47**, 442 (1988).

2. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **51**, 252 (1990).

3. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущаповский, ЖЭТФ **100**, 762 (1991).

4. А. И. Маймистов, С. О. Елютин, Опт. и спектр. **70**, 101 (1990).

5. А. И. Маймистов, Опт. и спектр. **76**, 636 (1994).

6. А. И. Маймистов, Опт. и спектр. **78**, 483 (1995).

7. S. V. Sazonov and E. V. Trifonov, J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **27**, L7 (1994).

8. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **107**, 20 (1995).

9. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **111**, 404 (1997).

10. А. И. Маймистов, КЭ **30**, 287 (2000).

11. С. А. Козлов, в сб. *Проблемы когерентной и нелинейной оптики*, ИТМО, Санкт-Петербург (2000), с. 12.

12. T. Brabec and F. Krausz, Rev. Mod. Phys. **72**, 545 (2000).

13. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **119**, 419 (2001).

14. С. В. Сазонов, УФН **171**, 663 (2001).

15. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, Письма в ЖЭТФ **75**, 746 (2002).

16. V. G. Bespalov, S. A. Kozlov, A. Yu. Shpolyansky, and I. Walmsley, Phys. Rev. A **66**, 013811 (2002).

17. А. М. Желтиков, УФН **172**, 743 (2002).

18. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, ЖЭТФ **123**, 919 (2003).

19. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).

20. S. L. McCall and L. Hahn, Phys. Rev. Lett. **18**, 908 (1967).

21. G. L. Lamb, Rev. Mod. Phys. **43**, 99 (1971).

22. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).

23. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **114**, 1595 (1998).

24. С. В. Нестеров, С. В. Сазонов, ФТТ **45**, 303 (2003).

25. Б. А. Струков, А. П. Леванюк, *Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах*, Наука, Москва (1995).

26. В. Г. Вакс, *Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков*, Наука, Москва (1983).

27. С. В. Сазонов, ФТТ **37**, 1626 (1995).

28. S. Kocinac, Z. Ikonic, and V. Milanovic, Opt. Comm. **140**, 89 (1997).

29. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. V. Glasgow, and J. V. Moloney, Physica D **138**, 134 (2000).

30. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **121**, 1012 (2002).

31. А. И. Маймистов, Дж.-Ги. Капуто, Опт. и спектр. **94**, 275 (2003).

32. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **124**, 803 (2003).

33. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1973).

34. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, КЭ **27**, 139 (1999).

35. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **120**, 269 (2001).

36. С. В. Сазонов, Опт. и спектр. **95**, 656 (2003).

37. Н. Н. Моисеев, *Асимптотические методы нелинейной механики*, Наука, Москва (1981).

38. А. Найфэ, *Введение в методы возмущений*, Мир, Москва (1984).

39. В. А. Якубович, В. М. Старжинский, *Параметрический резонанс в линейных системах*, Наука, Москва (1987).

40. J. D. Gibbon, P. J. Gaudrey, J. K. Elibek, and R. K. Bullough, J. Phys. A: Math. Gen. **6**, 1237 (1973).

41. Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко, *Колебания, волны, структуры*, Физматлит, Москва (2001).

42. А. И. Маймистов, КЭ **11**, 567 (1984).

43. Л. А. Большов, В. В. Лиханский, КЭ **12**, 1339 (1985).

44. А. А. Заболотский, Письма в ЖЭТФ **76**, 709 (2002).

45. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **123**, 560 (2003).

46. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ФТТ **43**, 1969 (2001).

47. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *Квазигазовые неустойчивые среды*, Наука, Москва (1991).

48. D. E. Edmundson and R. H. Enns, Phys. Rev. A **51**, 2491 (1995).

49. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, Опт. и спектр. **90**, 449 (2001).

50. В. Я. Демиховский, Г. А. Вугальтер, *Физика квантовых низкоразмерных структур*, Логос, Москва (2000).

51. А. И. Маймистов, Опт. и спектр. **93**, 49 (2002).

52. А. И. Маймистов, С. О. Елютин, Опт. и спектр. **93**, 274 (2002).