ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 6, стр. 1409–1422 

# О ВЛИЯНИИ ДИФРАКЦИИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ СОЛИТОНОВ

*С. В. Сазонов**

*Калининградский государственный университет*
*236041, Калининград, Россия*

Поступила в редакцию 29 декабря 2003 г.

На основе метода «усредненного лагранжиана» типа Уизема исследовано влияние эффектов дифракции на распространение солитонов различного типа в однородных средах. Показано, что в случае «светлых» и «темных» солитонов огибающей нелинейного уравнения Шредингера, а также солитонов уравнения Кортевега–де Вриза дифракция может препятствовать их самофокусировке при солитонных мощностях, не превышающих определенных значений. В случае же «светлых» и «темных» солитонов модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза, кинков уравнения синус-Гордона и доменных стенок модели «$u^4$» дифракция, напротив, усиливает эффект самофокусировки, что объясняется взаимной зависимостью поперечной и продольной солитонных динамик. Для различных случаев определены критические параметры, определяющие устойчивость солитонов по отношению к самофокусировке.

PACS: 42.50.Md, 42.65.Jx

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование устойчивости одномерных солитонов различных уравнений по отношению к поперечным возмущениям (т. е. по отношению к учету других пространственных измерений) представляет интерес в связи с постановкой вопроса о наблюдении данных солитонов в экспериментальных условиях.

В работах [1, 2] для изучения этих вопросов предложен формализм, восходящий к методу «усредненного лагранжиана» типа Уизема. Такой подход позволяет находить приближенные солитоноподобные решения различных нелинейных волновых уравнений, а также исследовать их устойчивость по отношению к поперечным возмущениям, т. е. по отношению к высшим пространственным измерениям. Авторы работ [1, 2] детально разработали количественную методику учета влияния длинноволновых поперечных возмущений на основе введения в пробные солитоноподобные решения «быстрых» и «медленных» переменных. Для этих переменных в работах [1, 2] получены нелинейные уравнения газовой динамики, решения которых находились с помощью преобразования годографа. Такой формализм позволил построить теорию устойчивости солитонов, не прибегая к предположению о малости возмущений. С другой стороны, формализм преобразований годографа приводит к успеху только при учете одномерных поперечных возмущений. Кроме того, разделение варьируемых переменных на «быстрые» и «медленные» соответствует эйкональному приближению (или приближению геометрической оптики для солитонов) [2, 3]. При таком подходе эффекты дифракции, столь важные на заключительной стадии самофокусировки, остаются за рамками рассмотрения.

Говоря о дифракции солитонов, мы имеем здесь в виду их самодифракцию в однородных средах. Будучи существенно нелинейными объектами, солитоны динамически изменяют свойства среды в местах своего нахождения, чем эффективно создают неоднородности и сами же на них испытывают дифракцию.

Известно, что в случае квазимонохроматических мощных непрерывных пучков дифракция в целом препятствует их самофокусировке и при некоторых условиях способна компенсировать данный эффект [4, 5]. В результате, сжавшись до определенных поперечных размеров, пучок может распространяться в нелинейной среде в режиме самоканализации. Подобные явления могут быть реализованы и в слу-

*E-mail: nst@alg.kaliningrad.ru

чае солитонов огибающей, обладающих ярко выраженной несущей частотой.

В последнее время в различных лабораториях мира генерировались оптические и акустические импульсы, содержащие до одного (или даже половины) периода колебаний соответствующей физической природы [6, 7]. По сложившейся терминологии такие образования называют предельно короткими импульсами или видеоимпульсами. Иногда встречается термин «видеосолитоны». Теоретический анализ распространения таких импульсов в нелинейных средах чаще всего не выходит за рамки одномерного приближения. Попытки же исследовать поперечную динамику не касались учета дифракционных эффектов, т. е. использовалось лишь эйкональное приближение. Вместе с тем различное поведение солитонов огибающей и видеоимпульсов прослеживается уже в приближении геометрической оптики: в первом случае поперечная динамика определяется амплитудной зависимостью фазовой скорости солитона, во втором — групповой. Поэтому есть основания ожидать также некоторые различия во влиянии дифракционных эффектов на поперечную динамику солитонов огибающей и видеосолитонов. Исследованию этих вопросов и посвящена настоящая работа.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 кратко на основе простых физических моделей выводятся нелинейные волновые уравнения, описывающие распространение в нелинейных средах как солитонов огибающей, так и видеосолитонов с учетом их поперечной динамики. Третий раздел посвящен анализу влияния дифракционных эффектов на «светлые» и «темные» солитоны огибающей с использованием метода «усредненного лагранжиана». В разд. 4 аналогичный анализ проводится для видеосолитонов в квадратично-нелинейных (несимметричных), а в разд. 5 — для «светлых» и «темных» видеосолитонов в изотропных средах, обладающих кубической нелинейностью. Влияние дифракции на кинки уравнения синус-Гордона и доменные стенки известной модели «$u^4$» рассмотрено в разд. 6. В Заключении приводятся обобщающие выводы, очерчивается круг трудностей и нерешенных проблем, а также намечаются перспективы дальнейших исследований в данном направлении.

## 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этом разделе, основываясь на физических примерах, приведем некоторые трехмерные нелинейные волновые уравнения, обладающие в одномерном случае солитонными и солитоноподобными решениями.

Рассмотрим нелинейный диэлектрик, в котором распространяется мощный линейно поляризованный оптический импульс.

Уравнение Максвелла для электрического поля $E$ импульса имеет вид

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

где $\Delta$ — оператор Лапласа, $c$ — скорость света в вакууме, $P$ — поляризационный отклик среды.

Будем считать вначале, что спектр импульса (вообще говоря, не имеющего несущей частоты) лежит в области оптической прозрачности диэлектрика. Пусть характерные частоты $\overline{\omega}$ фурье-компонент импульса удовлетворяют условию [8], где $\omega_0$ — характерная частота электронно-оптических переходов. Последнее условие можно также переписать в виде неравенства [9, 10]

$$\mu_1 = (\omega_0 \tau_p)^{-1} \ll 1, \qquad (2)$$

где $\tau_p$ — характерный временной масштаб импульса.

В спектре импульса отсутствуют резонансные фурье-компоненты, поэтому взаимодействие поля со средой является относительно слабым. Как следствие, слабыми оказываются дисперсия и нелинейность. В этом случае оба эффекта можно учесть аддитивным образом, учитывая дисперсию в линейной части $P_l$ поляризационного отклика и пренебрегая этим эффектом в нелинейной части $P_{non}$.

Вкладом ионной поляризации в отклик среды будем пренебрегать. Частотная зависимость линейной электронно-оптической восприимчивости $\chi(\omega)$ имеет вид

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_0^2 \chi(0)}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

где $\chi(0)$ — статическая электронная восприимчивость.

Поскольку дисперсия является относительно слабой, можно провести разложение $\chi(\omega)$ в ряд по малому параметру $(\omega/\omega_0)^2$:

$$\chi(\omega) = \chi(0)\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] = \chi(0) + \frac{1}{2}\chi''(0)\,\omega^2.$$

Записывая $P_l = \chi(\omega)E$ и проводя в выражении для $\chi(\omega)$ замену $\omega \to i\partial/\partial t$, придем к выражению

$$P_l = \chi(0)E - \frac{1}{2}\chi''(0)\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \qquad (3)$$

Нелинейную часть отклика среды представим в виде разложения по степеням поля, ограничиваясь кубической нелинейностью:

$$P_{non} = \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3, \tag{4}$$

где $\chi_2$ и $\chi_3$ — безынерционные нелинейные восприимчивости, соответственно, второго и третьего порядков.

Присутствие в (4) квадратичной нелинейности говорит о том, что среда является, вообще говоря, анизотропной. В этом случае $\chi_2$ и $\chi_3$ — тензоры, соответственно, третьего и четвертого рангов. Однако, если на входе в среду импульс поляризован в плоскости главного сечения (в плоскости, образованной оптической осью и направлением подачи импульса (осью $z$)), то при распространении поперек оптической оси он не меняет плоскости поляризации, совпадающей с плоскостью поляризации необыкновенной волны [11]. Ниже будем считать это условие выполненным, а поэтому $\chi_2$ и $\chi_3$ в (4) можно рассматривать как скаляры. Случай $\chi_2 = 0$ соответствует распространению импульса в изотропной среде, где $\chi_3$ является скаляром без всяких дополнительных условий.

Учитывая, что $P = P_l + P_{non}$, и подставляя (3) и (4) в (1), придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\left(\chi_2 E^2 + \chi_3 E^3\right) - \\ - \frac{2\pi}{c^2}\chi''(0)\frac{\partial^4 E}{\partial t^4} - \Delta_\perp E. \tag{5}$$

Здесь $v_0 = c/n_0$, $n_0$ — линейный безынерционный показатель преломления среды, $\Delta_\perp$ — поперечный лапласиан.

Очевидно, при слабой дисперсии и нелинейности главным членом разложения в $P$ является $\chi(0)E$ (см. (3)), вносящий вклад в $n_0$. Остальные слагаемые, оставленные в правой части (5), оказываются более высокого порядка малости по параметру $\mu_1$. Примем также, что выполнены условия параксиального приближения $\Delta_\perp E \ll \partial^2 E/\partial z^2$ [1, 2], согласно которому искривления волнового фронта по мере распространения импульса незначительны. Данное приближение используется в теории квазимонохроматических пучков [5]. Несмотря на его очевидные ограничения, параксиальное приближение позволяет получить правдоподобные результаты для поперечной динамики пучков и значительно упростить аналитические расчеты при учете дифракции.

Суммируя сказанное, приходим к выводу, что слагаемые правой части (5) малы по отношению к каждому слагаемому в левой части. В нулевом приближении по правой части получаем линейное волновое уравнение, имеющее решение в виде волн, бегущих вдоль и против оси $z$:

$$E = E_+\left(t - \frac{z}{v_0}\right) + E_-\left(t + \frac{z}{v_0}\right).$$

Считая, что в среде имеется только прямая волна $E_+$, учтем влияние правой части (5) введением «медленной» координаты $\zeta = \mu z$: $E = E(\tau, \zeta)$, где $\tau = t - z/v_0$. Тогда, пренебрегая слагаемыми порядка $\mu_1^2$, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \approx \frac{1}{\partial v_0^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{2\mu_1}{v_0}\frac{\partial^2}{\partial\tau\,\partial\zeta}.$$

Отсюда и из (5) после интегрирования по $\tau$ и возвращения к переменной $z$ получим

$$\frac{\partial E}{\partial z} - a_2 E\frac{\partial E}{\partial \tau} - a_3 E^2\frac{\partial E}{\partial \tau} - b\frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} = \\ = \frac{v_0}{2}\Delta_\perp \int\limits_{-\infty}^{\tau} E\,d\tau', \tag{6}$$

где

$$a_2 = -\frac{4\pi v_0 \chi_2}{c^2}, \quad a_3 = -\frac{6\pi v_0 \chi_3}{c^2}, \quad b = \frac{\pi v_0 \chi''(0)}{c^2}.$$

Заметим, что в (6) мы не использовали приближение медленно меняющихся огибающих, поэтому данное уравнение описывает динамику импульсов, содержащих произвольное количество колебаний. Это расширяет область его применимости от видеоимпульсов до импульсов огибающей. Заметим в этой связи, что из (6) при $a_2 = 0$ можно получить нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) для огибающей поля, представив последнее в виде

$$E = \xi(z, \tau, \mathbf{r}_\perp)e^{i(\omega\tau - qz)} + \text{c.c.} \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{r}_\perp$ — радиус-вектор поперечных координат, $q$ — волновое число в сопутствующей системе координат, движущейся со скоростью $v_0$, $\xi$ — медленно меняющаяся огибающая, удовлетворяющая условию

$$\left|\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right| \ll \omega|\xi|.$$

Из (7) найдем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E}{\partial z} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - iq\xi\right) e^{i(\omega\tau - qz)} + \text{c.c.},\\
&\frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} \approx -\left(i\omega^3\xi + 3\omega^2\frac{\partial \xi}{\partial \tau} - 3i\omega\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2}\right) \times\\
&\qquad \times e^{i(\omega\tau - qz)} + \text{c.c.},\\
&E^2\frac{\partial E}{\partial \tau} = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial \tau}(E^3) \approx i\omega|\xi|^2\xi e^{i(\omega\tau - qz)} + \text{c.c.},\\
&\Delta_\perp \int\limits_{-\infty}^{\tau} E\,d\tau' \approx -\frac{i}{\omega}\Delta_\perp \xi e^{i(\omega\tau - qz)} + \text{c.c.}
\end{aligned} \tag{8}$$

В скобках второго выражения (8) пренебрежено слагаемым порядка $\partial^3\xi/\partial\tau^3$, так как оно описывает дисперсию более высокого порядка малости, чем последнее слагаемое, пропорциональное $\partial^2\xi/\partial\tau^2$. В третьем выражении отброшены быстроосциллирующие по сравнению с остальными члены, пропорциональные $\exp[\pm 3i(\omega\tau - qz)]$, а также дисперсия нелинейности порядка $\partial(|\xi|^2\xi)/\partial\tau \ll \omega|\xi|^2\xi$. В последнем выражении оставлен только главный член при интегрировании по частям ввиду параксиального приближения и приближения медленно меняющейся огибающей.

Подставив (8) в (6) и приравняв нулю коэффициенты при слагаемых, пропорциональных $\xi$, получим $q = b\omega^3$,

$$i\frac{\partial \xi}{\partial z} + \alpha|\xi|^2\xi + \beta\frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta^2} = \frac{v_0}{2\omega}\Delta_\perp \xi. \tag{9}$$

Здесь

$$\eta = \tau - 3\beta\omega^2 z = t - \frac{z}{v_g},$$

$v_g$ — групповая скорость, определяемая соотношением

$$\frac{1}{v_g} = \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{1}{v_0} + 3b\omega^2,$$

$k$ — волновое число в лабораторной системе координат,

$$\beta = 3b\omega^2 = 0.5\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}$$

— коэффициент групповой дисперсии, $\alpha = \omega a_3$ — коэффициент нелинейности.

Коэффициент $\alpha \propto -\chi_3$, поэтому в случае, когда $\alpha, \beta > 0$, среда является дефокусирующей (см. ниже) и обладает нормальной групповой дисперсией. В случае же, когда $\alpha, \beta < 0$, дисперсия оказывается аномальной, а среда фокусирующей. Далее в связи с исследованием вопроса о дифракции «темных» солитонов будут рассмотрены также комбинированные случаи: дефокусирующая и фокусирующая среды соответственно при аномальной и нормальной дисперсиях групповых скоростей: $\alpha > 0$, $\beta < 0$ и $\alpha < 0$, $\beta > 0$.

Теперь рассмотрим случай, противоположный (2):

$$\mu_2 = \omega_0\tau_p \ll 1. \tag{10}$$

При выполнении (10) спектр импульса, обладая шириной $\delta\omega \sim 1/\tau_p \gg \omega_0$, эффективно перекрывает соответствующие квантовые переходы. В результате взаимодействие со средой оказывается сильным, поэтому дисперсию и нелинейность здесь нельзя учесть аддитивным образом.

Условие (10) может выполняться, например, для туннельных протонных переходов ($\omega_0 \sim 10^{13}$ с$^{-1}$) при взаимодействии с ними фемтосекундного ($\tau_p \sim 10^{-14}$ с) оптического импульса [12]. При этом электронно-оптические переходы, для которых $\omega_0 \sim 10^{15}$ с$^{-1}$, слабо взаимодействуют с полем и их можно учесть, вводя создаваемый ими показатель преломления $n_0$.

При условии (10), как показано в работах [9, 10, 12],

$$\frac{\partial P}{\partial t} = dN\,\omega_0 \sin\theta, \tag{11}$$

где $d$ — дипольный момент туннельного квантового перехода, $N$ — концентрация переходов,

$$\theta = \frac{2d}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{t} E\,dt',$$

$\hbar$ — постоянная Планка.

После подстановки (11) в (1) и последующего интегрирования по $t$ получим трехмерное уравнение синус-Гордона:

$$\Delta\theta - \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = g\sin\theta, \tag{12}$$

где

$$g = \frac{8\pi d^2 N\omega_0}{\hbar c^2}.$$

Перейдя к каноническим переменным $\tau = t - z/v_0$ и $\zeta = z + v_0 t$, перепишем (12) в виде

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau\,\partial \zeta} = -a\sin\theta + \frac{v_0}{4}\Delta_\perp \theta, \tag{13}$$

где

$$a = \frac{v_0 g}{4} = \frac{2\pi d^2 N\omega_0 v_0}{\hbar c^2}.$$

Заметим, что при переходе от (12) к (13) мы не использовали параксиальное приближение. Поэтому уравнение (13), в отличие от (7), способно описывать сильные искривления волновых фронтов и распространение в обоих направлениях оси $z$.

В заключение данного раздела рассмотрим нелинейное уравнение Клейна–Гордона–Фока, которое часто используется для описания динамики доменных стенок в твердых телах (сегнетоэлектриках, ферромагнетиках и т. д.) ниже температуры $T_c$ фазового перехода второго рода [13, 14]:

$$\Delta u - \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -g_0 u + b_0 u^3. \qquad (14)$$

Здесь $v_0$ — некоторая характерная скорость, $u$ — динамическая переменная, имеющая смысл параметра порядка, $g_0$ и $b_0$ — положительные феноменологические параметры, причем $g_0 = a_1(T_c - T)$, где $a_1$ — некая константа, зависящая от материала, $T$ — абсолютная температура, параметр $b_0$ от температуры практически не зависит. В канонических переменных $\tau = t - z/v_0$ и $\zeta = z + v_0 t$ имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\,\partial \zeta} = a_0 u - s u^3 + \frac{v_0}{4}\Delta_\perp u, \qquad (15)$$

где $a_0 = g v_0/4$, $s = b_0 v_0/4$.

Здесь так же, как и в (13), не использовано параксиальное приближение. В дальнейшем будем исследовать влияние дифракции на солитоны и доменные стенки уравнений (6), (9), (13) и (15).

## 3. ДИФРАКЦИЯ СВЕТЛЫХ И ТЕМНЫХ СОЛИТОНОВ ОГИБАЮЩЕЙ

При $\alpha\beta > 0$ уравнение (9) имеет решение в виде светлого одномерного ($\Delta_\perp \xi = 0$) солитона

$$\xi = \frac{1}{\tau_p}\sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}}\,\exp\left(\frac{i\beta z}{\tau_p^2}\right)\operatorname{sech}\frac{\eta}{\tau_p}. \qquad (16)$$

Здесь и везде ниже учет поперечных возмущений будем проводить с помощью метода «усредненного» лагранжиана Ритца–Уизема [1, 2]. Лагранжиан, соответствующий уравнению (9), имеет вид

$$L = \frac{i}{2}\left(\xi^*\frac{\partial \xi}{\partial z} - \xi\frac{\partial \xi^*}{\partial z}\right) + \frac{\alpha}{2}|\xi|^4 - \\ - \beta\left|\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right|^2 + \frac{v_0}{2\omega}|\nabla_\perp \xi|^2. \qquad (17)$$

Следуя [2], пробное решение выберем, отталкиваясь от (16):

$$\xi = \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}}\,\rho e^{i\Phi}\operatorname{sech}(\rho\eta), \qquad (18)$$

где $\rho$ и $\Phi$ — функции координат $z$ и $\mathbf{r}_\perp$.

Подставляя (18) в (17), после интегрирования по $T$ найдем «усредненный» лагранжиан:

$$\Lambda \equiv \frac{\alpha}{4\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} L\,d\eta = -\rho\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\beta}{3}\rho^3 + \\ + \frac{v_0}{2\omega}\rho(\nabla_\perp \Phi)^2 + \frac{v_0}{6\omega}\left(\frac{\pi^2}{12} + 1\right)\frac{(\nabla_\perp \rho)^2}{\rho}. \qquad (19)$$

Записывая уравнения Эйлера–Лагранжа для $\Lambda$,

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial\Phi/\partial z)} + \nabla_\perp\frac{\partial \Lambda}{\partial(\nabla_\perp \Phi)} = 0,$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} - \nabla_\perp\frac{\partial \Lambda}{\partial(\nabla_\perp \rho)} = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial z} + \nabla_\perp\cdot(\rho \mathbf{V}_\perp) = 0, \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\mathbf{V}_\perp^2}{2} + \int\frac{dp}{\rho} = F(\rho, \nabla_\perp \rho, \Delta_\perp \rho). \end{aligned} \qquad (20)$$

Здесь $\varphi = -v_0\Phi/\omega$, $\mathbf{V}_\perp = \nabla_\perp \varphi$,

$$F = \left(\frac{\pi^2}{12} + 1\right)\frac{v_0^2}{3\omega^2\rho}\left[2\Delta_\perp \rho - \frac{(\nabla_\perp \rho)^2}{\rho}\right], \qquad (21)$$

а функция $p$ связана с $\rho$ уравнением

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{2v_0\beta}{\omega}\rho^2. \qquad (22)$$

В одномерном случае ($\nabla_\perp = \Delta_\perp = 0$) из (20) находим $\rho = \rho_0 = 1/\tau_p = \text{const}$, $\Phi = -\omega\varphi/v_0 = \beta z/\tau_p^2$. В результате приходим к буквальному совпадению пробного решения (18) с точным односолитонным решением (16). Ниже также будем прибегать к тестированию уравнений типа (20) и пробного решения на совпадение с точными односолитонными решениями в одномерном случае.

Система (20) аналогична соответствующим уравнениям в теории нелинейных монохроматических пучков [5].

Правая часть второго уравнения (20) описывает эффекты дифракции в поперечной динамике импульса. Пренебрежение ей ($F = 0$) соответствует эйкональному приближению или приближению «геометрической оптики» для солитонов. В этом случае система (20) совпадает с уравнениями гидродинамики идеальной жидкости, в которых координата $z$ играет роль времени, $\rho$ — плотности, а $p$ — давления. Первое уравнение (20) имеет смысл уравнения непрерывности, второе — интеграла Коши, а уравнение (27) описывает изоэнтропийный процесс, при котором происходит движение жидкости. Очевидно, критерий устойчивости солитона по отношению к самофокусировке в эйкональном приближении совпадает с условием устойчивости течения «идеальной жидкости» типа (20)–(22): $dp/d\rho > 0$ [11, 15, 16]. Отсюда и из (22) приходим к выводу о самофокусировке солитона НУШ при $\beta < 0$, $\alpha < 0$ (см. (18)) и дефокусировке при $\beta > 0$, $\alpha > 0$. Данные условия имеют прозрачную физическую интерпретацию. Из (7) и (16) следует, что волновое число солитона в лабораторной системе координат имеет вид

$$k_s = \frac{\omega}{v_0} + q - \frac{\beta}{\tau_p^2} = k - \frac{\alpha\xi_m^2}{2},$$

где $k = \omega/v_0 + q$ — линейная часть волнового числа, $\xi_m$ — амплитуда солитона (16). Тогда солитонный показатель преломления

$$n_s = \frac{ck_s}{\omega} = n_l - \frac{c\alpha\xi_m^2}{2\omega},$$

$n_l = ck/\omega$ — линейная часть показателя преломления.

Согласно принципу Ферма, волновые нормали загибаются в направлениях увеличения показателя преломления. При $\alpha > 0$ солитонный показатель преломления меньше в центре поперечного сечения солитона, где его амплитуда максимальна. Следовательно, при $\alpha > 0$ волновой фронт солитона выгибается вперед, что приводит к дефокусировке. Если же $\alpha < 0$, эйкональное приближение позволяет сделать вывод о самофокусировке (коллапсе) солитона.

Исследуем теперь влияние дифракции. Следуя подходу, разработанному в теории монохроматических пучков [4, 5], будем считать поперечную структуру импульса осесимметричной. Записывая (20) в цилиндрической системе координат $z$, $r$, будем искать приближенное решение для $\rho$ в автомодельном виде [5]:

$$\rho(z,r) = \rho_0 \frac{R_0^2}{R^2(z)} \exp\left[-\frac{r^2}{R^2(z)}\right], \tag{23}$$

где $R_0$ — постоянная, имеющая смысл входного поперечного радиуса импульса, в то время как $R(z)$ есть его текущий радиус; $\rho_0$ — входная обратная длительность импульса, пропорциональная его входной амплитуде.

Выбор $\rho$ в виде (23) предполагает автомодельное поведение поперечного профиля солитона в процессе его распространения, что соответствует безаберрационному приближению [4].

В дальнейшем будем интересоваться приосевой динамикой ($r^2/R^2 \ll 1$) импульса [4, 5], поэтому решение для $\varphi$ запишем в виде разложения

$$\varphi(z,r) = f_1(z) + \frac{r^2}{2} f_2(z), + \ldots \tag{24}$$

Из первого уравнения (20), а также (23) и (24) приходим к соотношению

$$f_2 = \frac{R'}{R}, \tag{25}$$

где штрих обозначает производную по $z$.

Подставляя (23) и (24) во второе уравнение (20), после приравнивания в обеих частях выражений при нулевой и второй степенях $r$ получим, соответственно,

$$f_1' = -\frac{v_0\beta}{\omega}\rho_0^2\frac{R_0^4}{R^4} - \frac{8v_0^2}{3\omega^2}\left(\frac{\pi^2}{12}+1\right)\frac{1}{R^2}, \tag{26}$$

$$f_2' + f_2^2 = \frac{2v_0\beta}{\omega}\rho_0^2\frac{R_0^4}{R^6} + \frac{4v_0^2}{3\omega^2}\left(\frac{\pi^2}{12}+1\right)\frac{1}{R^4}. \tag{27}$$

Из (24) видно, что значение $f_2$ характеризует степень кривизны фазовых волновых поверхностей входного импульса. Действительно, солитонная фаза $\varphi_s$, согласно (7) и (18), может быть представлена в виде $\varphi_s = \omega t - \Phi_s$, где полный фазовый солитонный эйконал

$$\Phi_s = kz - \Phi = kz + \frac{\omega}{v_0}\varphi = \\ = kz + \frac{\omega}{v_0}\left[f_1(z) + \frac{r^2}{2}f_2(z) + \ldots\right].$$

При $f_2 > 0$ кривизна эйконала положительна, а при $f_2 < 0$ — отрицательна.

Фазовая скорость $v_{ph}$ в каждой точке волнового фронта направлена вдоль его нормалей, а величина этой скорости

$$\frac{1}{v_{ph}} = \frac{1}{\omega}|\nabla\Phi| = \sqrt{\frac{1}{v_\parallel^2} + \frac{1}{v_\perp^2}}\,,$$

где продольная $v_\parallel$ и поперечная $v_\perp$ составляющие скорости определяются соотношениями

$$\frac{1}{v_\parallel} = \frac{k}{\omega} + \frac{v_0}{\omega^2}\left(f_1' + \frac{r^2}{2}f_2'\right),$$

$$\frac{1}{v_\perp} = \frac{v_0}{\omega^2} r f_2.$$

Очевидно, в центре поперечного сечения солитона ($r = 0$) фазовая скорость имеет лишь продольную составляющую, для которой

$$\frac{1}{v_\parallel} = \frac{k}{\omega} + \frac{v_0 f'}{\omega^2}\,.$$

Таким образом, значение $f_1'$ определяет добавку к величине обратной фазовой скорости на центральной оси распространения. Второе слагаемое в правой части (26) описывает влияние дифракции на данную добавку. Отсюда видно, что дифракция приводит к увеличению приосевой фазовой скорости или к эффективному уменьшению показателя преломления. Таким образом, дифракция препятствует самофокусировке, как это имеет место и в случае квазимонохроматических пучков.

Эйкональное приближение соответствует пределу $R_0$, $R \to \infty$. Переходя к этому пределу в (26), получим $f_1' = -v_0\beta\rho_0^2/\omega$. Таким образом, исчезает дефокусирующая роль дифракции. Отсюда

$$\Phi = -\frac{\omega\varphi}{v_0} = \frac{\omega f_1}{v_0} = \beta\rho_0^2 z = \frac{\beta z}{\tau_p^2},$$

что совпадает со значением $\Phi$ в случае точного решения (16).

После подстановки (25) в (27) придем к уравнению, формально совпадающему с уравнением движения ньютоновской частицы единичной массы в поле с потенциальной энергией $U(R)$:

$$R'' = -\frac{\partial U}{\partial R}, \tag{28}$$

где

$$U = \frac{v_0\beta}{2\omega}\rho_0^2\frac{R_0^4}{R^4} + \frac{2v_0^2}{3\omega^2}\left(\frac{\pi^2}{12}+1\right)\frac{1}{R^2}. \tag{29}$$

Параметры потенциальной кривой $U(R)$, как видно из (29), зависят от характеристик среды и от входных параметров импульса. Первое слагаемое в правой части (29) соответствует эйкональному приближению, второе описывает влияние дифракции. Отсюда, как и из приведенных выше рассуждений, видно, что дифракция играет дефокусирующую роль.

Для определения динамической зависимости $R(z)$ в процессе распространения солитона уравнение (28) необходимо дополнить граничными условиями: $R(0) = R_0$, $R'(0) = R_0'$. В дальнейшем будем считать, что волновой фронт входных импульсов является плоским, т. е. $f_2(0) = 0$. Тогда, как следует из (25), $R'(0) = 0$. В этом случае условие преобладания дефокусирующего эффекта над самофокусировкой запишется в виде $R''(0) > 0$. Отсюда и из (28) имеем

$$\left.\frac{\partial U}{\partial R}\right|_{R=R_0} < 0. \tag{30}$$

Используя (29) и (30), получим для фокусирующей среды ($\beta < 0$)

$$\rho_0^2R_0^2 < \frac{\pi^2+12}{18}\,\frac{v_0}{|\beta|\omega} = 1.21\frac{v_0}{|\beta|\omega}\,. \tag{31}$$

Величина в левой части (31) пропорциональна входной мощности $Q$ импульса. Таким образом, как и в случае мощных монохроматических пучков [5], компенсация самофокусировки возможна, если входная мощность солитона меньше определенной критической.

Исследуем теперь влияние дифракции на распространение темных солитонов огибающей, являющихся решением уравнения (9) при $\alpha\beta < 0$ [17]:

$$\xi = \frac{1}{\tau_p}\sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}}\,\exp\left(-i\frac{2\beta z}{\tau_p^2}\right)\operatorname{th}\frac{\eta}{\tau_p}. \tag{32}$$

Заметим, что существование темных солитонов было подтверждено в экспериментах [18].

В соответствии с (32) пробное решение выберем в виде

$$\xi = \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}}\,\rho e^{-i\Phi}\operatorname{th}(\rho\eta), \tag{33}$$

где переменные $\rho$ и $\Phi$ имеют тот же смысл, что и в (18).

Подстановка (33) в (17) и последующее усреднение по «быстрой» переменной $\eta$ приводит, в числе прочего, к расходящимся интегралам вида

$$J_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{th}^2(\rho\eta)\,d\eta, \quad J_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{th}^4(\rho\eta)\,d\eta.$$

Заметим, что данные интегралы возникают, соответственно, из квадратичных слагаемых и слагаемых четвертой степени в (17). При $\eta \to \pm\infty$ плотность энергии темного солитона стремится к постоянному значению, отличному от нуля, которое соответствует классическому солитонному «вакууму» [19, 20]. Интегрирование на этом фоне приводит к линейно расходящимся по $\eta$ членам. Темный солитон можно рассматривать как отклонения $|\xi|^2$ от фонового значения $|\xi_\infty|^2 = 2\beta/(\alpha\tau_p^2)$ (см. (32)), т. е. как возмущение последнего. Учитывая лишь данное возмущение и отбрасывая «фон» (или классический вакуум), совершим регуляризацию лагранжиана с помощью следующей замены в линейно расходящихся интегралах:

$$\operatorname{th}^2(\rho\eta) = 1 - \operatorname{sech}^2(\rho\eta) \to -\operatorname{sech}^2(\rho\eta). \tag{34}$$

Схожая процедура регуляризации проводится в квантовополевых теориях, когда отбрасываются бесконечности, соответствующие параметрам вакуума, а наблюдаемыми считаются лишь отклонения от последнего [20]. Ниже, в том числе и на других примерах, будут приведены дополнительные аргументы в пользу правила (34).

Суммируя сказанное, запишем усредненный регуляризованный лагранжиан в виде

$$\Lambda \equiv \frac{\alpha}{2\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} L_{reg} d\eta = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{v_0}{2\omega}\rho(\nabla_\perp\Phi)^2 + \\ + \frac{2\beta}{3}\rho^3 + \frac{v_0}{6\omega}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\frac{(\nabla_\perp\rho)^2}{\rho}, \quad (35)$$

где $L_{reg}$ — регуляризованная плотность лагранжиана, полученная путем подстановки (32) в (17) и последующего использования замены вида (34).

Варьирование (35) по $\rho$ и $\Phi$ приводит к уравнениям вида (20), где $\varphi = v_0\Phi/\omega$,

$$F = \frac{v_0^2}{6\omega^2\rho}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\left[2\Delta_\perp\rho - \frac{(\nabla_\perp\rho)^2}{\rho}\right], \quad (36)$$

а

$$\int\frac{dp}{\rho} = -2\beta\rho^2$$

или

$$\frac{dp}{d\rho} = -\frac{4v_0\beta}{\omega}\rho^2. \quad (37)$$

В одномерном случае имеем $\rho = \rho_0 = 1/\tau_p$, $\partial\Phi/\partial z = \beta\rho_0^2$, откуда $\Phi = 2\beta z/\tau_p^2$, что в точности совпадает с (32) (см. также (33)). Таким образом, «тест на одномерие» подтверждает корректность правила регуляризации (34).

В эйкональном приближении ($F = 0$) из (37) видно, что темный солитон НУШ устойчив при $\beta < 0$ ($\alpha > 0$), а в случае $\beta > 0$ ($\alpha < 0$) подвержен самофокусировке. Физическое объяснение данного утверждения здесь аналогично случаю светлого солитона НУШ, т. е. связано с зависимостью нелинейного солитонного показателя преломления от интенсивности солитона.

Учет дифракции по описанной выше схеме приводит к дифференциальному уравнению вида (28), где

$$U = -\frac{v_0\beta}{\omega}\rho_0^2\frac{R_0^4}{R^4} + \frac{v_0^2}{3\omega^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\frac{1}{R^2}, \quad (38)$$

а также к (24) и (25). При этом

$$f_1' = \frac{2v_0\beta}{\omega}\rho_0^2\frac{R_0^4}{R^4} - \frac{4v_0^2}{3\omega^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\frac{1}{R^2}.$$

Зависимости $U(R)$ качественно совпадают с таковыми для светлых солитонов НУШ в фокусирующей ($\alpha < 0$, $\beta > 0$) и дефокусирующей ($\alpha > 0$, $\beta < 0$) средах. Если на входе в фокусирующую среду фазовый волновой фронт солитона является плоским ($R'(0) = 0$), то условие (30) компенсации самофокусировки эффектами дифракции имеет вид

$$\rho_0^2 R_0^2 < \frac{2v_0}{3\beta\omega}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right) = 0.43\frac{v_0}{\beta\omega}. \quad (39)$$

Как и в случае светлых солитонов, мощность темного солитона должна быть меньше определенной критической.

## 4. ДИФРАКЦИЯ ВИДЕОСОЛИТОНОВ В СРЕДЕ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Положим в (6) $a_3 = 0$. Тогда в одномерном случае ($\Delta_\perp = 0$) приходим к уравнению Кортевега–де Вриза (КдВ), солитонное решение которого имеет вид

$$E = \frac{3b}{a_2\tau_p^2}\operatorname{sech}^2\frac{\tau - z/V}{2\tau_p}, \quad (40)$$

где параметр $V$ связан со скоростью $v$ распространения солитона в лабораторной системе координат соотношением

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{V} = \frac{1}{v_0} - \frac{b}{\tau_p^2}. \quad (41)$$

Плотность лагранжиана, соответствующая (6), имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial Q}{\partial\tau} - \frac{a_2}{6}\left(\frac{\partial Q}{\partial\tau}\right)^3 - \\ - \frac{a_3}{12}\left(\frac{\partial Q}{\partial\tau}\right)^4 + \frac{b}{2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial\tau^2}\right)^2 - \frac{v_0}{4}(\nabla_\perp Q)^2, \quad (42)$$

где «потенциал» $Q$ связан с полем $E$ соотношением

$$E = \partial Q/\partial\tau.$$

Тогда в соответствии с (40) выберем пробное решение в виде [1]

$$Q = \frac{12b}{a_2}\gamma\,\mathrm{th}\left[\gamma(\tau - \Phi)\right], \quad (43)$$

где $\gamma$ и $\Phi$ — динамические переменные, зависящие от координат, причем $\Phi$ здесь имеет смысл группового эйконала, а не фазового, как в случае НУШ.

Подставляя (43) в (42) при $a_3 = 0$, после интегрирования по $\tau$ и использования замены (34) в расходящемся интеграле вида $J_1$ получим

$$\Lambda \equiv \frac{a_2^2}{96b^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} L\,d\tau = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{12b}{5}\rho^{5/3} - \\ - \frac{v_0}{2}\rho(\nabla_\perp\Phi)^2 + \left(1-\frac{\pi^2}{24}\right)\frac{v_0}{9}\,\frac{(\nabla_\perp\rho)^2}{\rho^{5/3}}. \quad (44)$$

Здесь $\rho = \gamma^3$.

Варьирование $\Lambda$ по $\rho$ и $\Phi$ снова приводит к уравнениям вида (20), где $\varphi = v_0\Phi$,

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{8v_0 b}{3}\rho^{2/3}, \quad (45)$$

$$F = \left(1-\frac{\pi^2}{24}\right)\frac{v_0^2}{9\rho^{5/3}}\left[\frac{5(\nabla_\perp\rho)^2}{3\rho} - 2\Delta_\perp\rho\right]. \quad (46)$$

В одномерном случае из (20) и (45) имеем

$$\rho = \rho_0 = \gamma_0^3 = \text{const}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -b\rho_0^{2/3} = -4b\gamma_0^2.$$

Так как $\gamma_0 = 1/2\tau_p$ (см. (40) и (43)), то $\Phi = -b/\tau_p^2$, что находится в точном согласии с (40), (41) и (43).

Из «уравнения процесса» (45) видно, что в эйкональном приближении ($F = 0$) солитон КдВ устойчив при $b > 0$, т. е. в случае нормальной дисперсии. При $a_2 > 0$, как видно из (40), $E > 0$; если же $a_2 < 0$, то $E < 0$. Такой характер устойчивости легко объяснить с физической точки зрения. Действительно, согласно (3) и (4), можно ввести эффективную восприимчивость

$$\chi_{eff} = \chi_l + \chi_2 E + \chi_3 E^2,$$

где $\chi_l$ — линейная восприимчивость, включающая дисперсию, и полный показатель преломления

$$n = \sqrt{1+4\pi\chi_{eff}} \approx 1 + 2\pi\chi_{eff} = \\ = 1 + 2\pi(\chi_l + \chi_2 E + \chi_3 E^2) = \\ = 1 + 2\pi\chi_l - \frac{c^2}{2v_0}a_2 E - \frac{c^2}{3v_0}a_3 E^2.$$

В нашем случае $a_3 = 0$. При $a_2 E > 0$ нелинейность приводит к уменьшению показателя преломления в центре поперечного сечения солитона, что в согласии с сказанным выше должно привести к его дефокусировке.

К данному выводу можно прийти и непосредственно из (40) и (41), если выражение для групповой скорости $v$ записать в виде

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - \frac{a_2 E_m}{3},$$

где $E_m$ — амплитуда солитона (40).

Введем групповой показатель преломления $n_g \equiv c/v$, тогда

$$n_g = n_0 - \frac{c a_2 E_m}{3}$$

и при $a_2 E_m > 0$ в центре поперечного сечения солитона групповой показатель преломления минимален, а групповая скорость солитона максимальна.

Учет дифракции по предложенной выше схеме приводит к уравнению (28) для радиуса солитона, где

$$U = 4v_0 b\rho_0^{2/3}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{4/3} + \\ + \frac{24-\pi^2}{18}\,\frac{v_0^2}{\rho_0^{2/3}R_0^{4/3}R^{2/3}}. \quad (47)$$

При этом справедливо разложение (24) и соотношение (25), а $f_1(z)$ удовлетворяет уравнению

$$f_1' = -4v_0 b\rho_0^{2/3}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{4/3} + \frac{24-\pi^2}{27}\,\frac{v_0^2}{\rho_0^{2/3}R_0^{4/3}R^{2/3}}.$$

Зависимость $U(R)$ вида (47) качественно совпадает с таковой для случая солитона НУШ. Здесь дифракция также создает дефокусирующий эффект. При аномальной дисперсии ($b < 0$) критерий (30), соответствующий компенсации самофокусировки дифракцией, приводит к условию

$$\gamma_0^4 R_0^2 < 0.10\frac{v_0}{|b|}. \quad (48)$$

Здесь $\gamma_0 = \rho_0^{1/3} = 1/2\tau_{p0}$ — обратная входная длительность солитона КдВ. Согласно (40), его амплитуда $E_m \sim \gamma_0^2$. Следовательно, неравенство (48), равно как (31) и (39), есть ограничение сверху на входную мощность солитона.

Масштаб создаваемой солитоном поперечной неоднородности среды определяется его поперечным диаметром (или радиусом). Поэтому роль дифракции по отношению к эффектам геометрической оптики может быть выражена безразмерным параметром

$$\delta \approx \frac{\lambda}{R}, \quad (49)$$

где $\lambda$ — характерная длина волны солитона.

Согласно (23), самофокусировка солитонов сопровождается их продольным самосжатием. Солитоны огибающей содержат большое число осцилляций, поэтому при самосжатии длина волны $\lambda$ их высокочастотного заполнения практически не изменяется. В то же время их радиус $R$ уменьшается, что приводит к увеличению параметра $\delta$ и, как следствие, к росту эффектов дифракционной расходимости. Этим и обусловлены критерии (31) и (39). В случае видеосолитона КдВ, не имеющего несущей частоты, роль длины волны играет его характерная длительность:

$$\lambda \approx l \approx v_0\tau_p \approx \frac{v_0}{\gamma} = \frac{v_0}{\rho^{1/3}} \approx \frac{v_0}{\rho_0^{1/3}R_0^{2/3}}\, R^{2/3}$$

(см. (23)).

Тогда

$$\delta \approx \frac{v_0}{(\rho_0 R_0^2)^{1/3}}\, R^{-1/3}.$$

Здесь так же, как и для солитонов огибающей, при самофокусировке наблюдается рост (хотя и более медленный) параметра $\delta$. Поэтому дифракционная расходимость способна подавить самофокусировку, что и выражается условием (48).

## 5. ДИФРАКЦИЯ ВИДЕОСОЛИТОНОВ В СРЕДЕ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Пусть теперь в (6) и (42) $a_2 = 0$. В этом случае приходим к модифицированному уравнению Кортевега–де Вриза (МКдВ), описывающему распространение видеосолитонов в изотропной среде и имеющему одномерное односолитонное решение вида

$$E = \frac{1}{\tau_p}\sqrt{\frac{6b}{a_3}}\ \mathrm{sech}\,\frac{\tau - z/V}{\tau_p}.$$

Здесь, как и в случае солитона КдВ, параметр $V$ связан со скоростью $v$ распространения в лабораторной системе координат соотношением (41).

Для учета дифракции пробное решение для «потенциала» выберем в виде

$$Q = 2\sqrt{\frac{6b}{a_3}}\ \mathrm{arctg}\, e^{\rho(\tau-\Phi)}. \qquad (50)$$

Подстановка (50) в (42) при $a_2 = 0$ и последующее интегрирование по $\tau$ приводят к системе вида (20), где $\mathbf{V}_\perp = \nabla_\perp\varphi$, $\varphi = v_0\Phi/2$,

$$F = \frac{\pi^2 v_0^2}{48\rho^3}\left[\Delta_\perp\rho - \frac{3}{2\rho}(\nabla_\perp\rho)^2\right], \qquad (51)$$

а «уравнение процесса»

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{b}{2}v_0\rho^2. \qquad (52)$$

Отсюда получаем, что в эйкональном приближении ($F = 0$) солитон МКдВ устойчив по отношению к самофокусировке при $b = 0$, т. е. в области нормальной дисперсии. Из односолитонного решения и (50) видно, что в этом случае $a_3 > 0$ (или $\chi_3 < 0$ (см. выше)), что соответствует дефокусирующей среде.

Учет дифракции по описанной выше схеме приводит к уравнению (28) для радиуса солитона, где

$$U = \frac{bv_0\rho_0^2R_0^4}{4R^4} + \frac{5\pi^2v_0^2}{24\rho_0^2R_0^4}\,R^2, \qquad (53)$$

и к соотношениям (24), (25). При этом

$$f_1' = -\frac{bv_0}{4}\rho_0^2\frac{R_0^4}{R^4} - \frac{\pi^2v_0^2}{12\rho_0^2R_0^4}\,R^2.$$

Первое слагаемое в правой части (53) соответствует приближению «геометрической оптики», второе — влиянию дифракции. Отсюда видно, что дифракционная часть «потенциальной энергии» $U$ имеет характер гармонического осциллятора, с той лишь разницей, что в нашем случае $R \ge 0$. В отличие от разобранных выше примеров здесь роль дифракции сводится не к увеличению, а, наоборот, к уменьшению поперечного размера солитона. Поэтому в дефокусирующей среде ($b, a_3 > 0$) функция $U(R)$ имеет минимум. Здесь дифракция препятствует поперечной расходимости, что может привести к эффекту самоканалирования солитона, поперечный размер которого колеблется около значения

$$R_m = R_0\left(\frac{12R_0^2}{5\pi^2 l_d l}\right)^{1/6},$$

где $l_d = (b\rho_0^3)^{-1} = \tau_{p0}^3/b$ — длина дисперсионного расплывания, $l = v_0/\rho_0 = v_0\tau_{p0}$ — входной продольный размер солитона.

В фокусирующей же среде ($b, a_3 < 0$) солитон неустойчив, а дифракция только усиливает эффект самофокусировки.

Столь необычную роль дифракции для видеосолитонов в изотропных средах можно объяснить на основе анализа характера эволюции параметра $\delta$ (см. (49)). Действительно, взяв в качестве

$$\lambda \sim v_0\tau_p \sim \frac{v_0}{\rho} \sim \frac{v_0R^2}{\rho_0R_0^2}$$

(см. (23)) и используя (49), получим

$$\delta \sim \frac{v_0}{\rho_0R_0^2}\,R.$$

При самофокусировке, когда $R \to 0$, параметр $\delta$ также стремится к нулю. Таким образом, удельный вес волновых свойств поля по отношению к эйкональным стремительно уменьшается, что и приводит к невозможности компенсации самофокусировки солитона эффектами дифракции.

Если знаки $b$ и $a_3$ в МКдВ различны, то в одномерном случае имеем решение типа «темного» видеосолитона:

$$E = \frac{1}{\tau_p}\sqrt{\frac{6b}{a_3}}\ \mathrm{th}\,\frac{\tau - z/V}{\tau_p}.$$

Здесь параметр $V$ связан со скоростью $v$ солитона в лабораторной системе отсчета и его длительностью $\tau_p$ соотношением

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{V} = \frac{1}{v_0} + \frac{2b}{\tau_p^2}. \tag{54}$$

В соответствии с одномерным решением пробное решение для $Q$ выберем в виде

$$Q = \sqrt{\frac{6b}{a_3}}\ \ln\left\{\mathrm{ch}\left[\rho(\tau - \Phi)\right]\right\}. \tag{55}$$

После подстановки (55) в (42) при $a_2 = 0$, усреднения по $\tau$ и использования регуляризации по правилу (34) приходим к усредненному лагранжиану. Дальнейшее варьирование по $\rho$ и групповому эйконалу $\Phi$ приводит к системе (20), где $\mathbf{V}_\perp = \nabla_\perp\varphi$, $\varphi = v_0\Phi$,

$$\begin{aligned} F &= \frac{\pi^2 v_0^2}{12\rho^3}\left[\Delta_\perp\rho - \frac{3}{2\rho}(\nabla_\perp\rho)^2\right], \\ \frac{dp}{d\rho} &= -4bv_0\rho^2. \end{aligned} \tag{56}$$

Отсюда имеем

$$\int\frac{dp}{\rho} = -2bv_0\rho^2.$$

В одномерном случае $\rho = 1/\tau_p = \mathrm{const}$, а $\varphi = 2bv_0 z/\tau_p^2$. Тогда $\Phi = 2bz/\tau_p^2$, и мы приходим к точному совпадению с одномерным решением типа «темного» солитона МКдВ. Как и в случае «темных» солитонов НУШ, вновь убеждаемся в физической корректности правила регуляризации (34).

В эйкональном приближении «темный» солитон устойчив в дефокусирующей среде ($b < 0$, $a_3 > 0$) и подвержен самофокусировке при $b > 0$, $a_3 < 0$, что вполне понятно с точки зрения нелинейного принципа Ферма.

Учет дифракции приводит к соотношениям (24), (25) и (28), где

$$\begin{aligned} U &= -2bv_0\frac{\rho_0^2 R_0^4}{R^4} + \frac{5\pi^2 v_0^2}{6\rho_0^2 R_0^4}\,R^2, \\ f_1' &= 2bv_0\rho_0^2\frac{R_0^4}{R^4} - \frac{\pi^2 v_0^2}{3\rho_0^2 R_0^4}\,R^2. \end{aligned} \tag{57}$$

Здесь вновь дифракция играет деструктивную роль, т. е. усиливает эффект самофокусировки. В области аномальной дисперсии дефокусирующей среды ($b < 0$, $a_3 > 0$) возможно самоканалирование «темного» видеосолитона, сопровождающееся пульсациями его радиуса в окрестности величины

$$R_m = R_0\left(\frac{24R_0^2}{5\pi^2 l_d l}\right)^{1/6}.$$

В фокусирующей среде «темный» видеосолитон МКдВ неустойчив по отношению к поперечным возмущениям.

## 6. ДИФРАКЦИЯ КИНКОВ И ДОМЕННЫХ СТЕНОК

В настоящем разделе рассмотрим самодифракцию солитонов (кинков) уравнения синус-Гордона и доменных стенок нелинейного уравнения Клейна–Гордона–Фока.

Односолитонное одномерное решение (13) имеет вид

$$\theta = 4\,\mathrm{arctg}\exp\left[\rho_0\left(\tau - \frac{\zeta}{V}\right)\right], \tag{58}$$

где $\rho_0$ и $V$ — постоянные, связанные соотношением $1/V = a/\rho_0^2$.

В исходных переменных $z$ и $t$ показатель экспоненты можно переписать как $(t - z/v)/\tau_p$. Тогда длительность $\tau_p$ и скорость $v$ в лабораторной системе координат связаны с параметром $V$ соотношениями

$$\frac{1}{\tau_p} = \sqrt{aV}\left(1 - \frac{v_0}{V}\right), \quad \frac{1}{v} = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{v_0}\right)\left(1 + \frac{v_0}{V}\right)^{-1}.$$

Отсюда легко устанавливается связь между $v$ и $\tau_p$:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{v_0^2} + g\tau_p^2. \tag{59}$$

Лагранжиан, соответствующий (13), запишем в виде

$$L = \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - 2a\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{v_0}{8}(\nabla_\perp\theta)^2. \tag{60}$$

В соответствии с (55) пробное неодномерное решение (13), переходящее в односолитонное при $\Delta_\perp\theta = 0$, представим следующим образом:

$$\theta = 4\,\mathrm{arctg}\,e^{\rho(\tau - \Phi)}, \tag{61}$$

где теперь $\rho$ и $\Phi$ — функции переменной $\zeta = z + at$ и поперечных координат.

Подставляя (61) в (60) и интегрируя по $\tau$, находим усредненный лагранжиан

$$\Lambda \equiv \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} L\,d\tau = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} - \frac{v_0}{4}\rho(\nabla_\perp\Phi)^2 - \frac{a}{\rho} - \frac{\pi^2}{24\rho^3}(\nabla_\perp\rho)^2,$$

варьирование которого по $\Phi$ и $\rho$ приводит к уравнениям вида (20) с точностью до замены $z \to \zeta = z + v_0 t$, где $\mathbf{V}_\perp = \nabla_\perp\varphi$, $\varphi = v_0\Phi/2$,

$$F = \frac{\pi^2 v_0^2}{24\rho^3}\left[\Delta_\perp\rho - \frac{3}{2\rho}(\nabla_\perp\rho)^2\right], \quad \frac{dp}{d\rho} = \frac{v_0 a}{\rho^2}. \tag{62}$$

Легко видеть, что в одномерном случае уравнения (20) в совокупности с (62) приводят к точному односолитонному решению вида (58).

Из второго выражения (62) следует, что в эйкональном приближении видеосолитон уравнения (13) устойчив по отношению к самофокусировке при $a \sim g > 0$.

Учет дифракции вновь приводит к уравнению (28), где

$$U = -\frac{G}{4}R^4 + \frac{D}{2}R^2, \tag{63}$$

$$f_1'(\zeta) = \frac{v_0^2}{\rho_0^2 R_0^4}\left(\frac{gR^2}{5} - \frac{\pi^2}{3}\right)R^2,$$

$$G = \frac{v_0^2 g}{\rho_0^2 R_0^4}, \quad D = \frac{5\pi^2 v_0^2}{6\rho_0^2 R_0^4},$$

а штрихи над $R$ и $f_1$ здесь обозначают вторую производную по $\zeta = z + v_0 t$. В (23) также необходимо сделать замену $z \to \zeta = z + v_0 t$, тогда $R_0$ имеет смысл радиуса солитона при $z = -v_0 t$. В частности, $R = R_0$ при $z = t = 0$, т. е. $R_0$ по-прежнему можно отождествлять с входным радиусом солитона.

Из (63) видно, что дифракция (второе слагаемое в правой части) так же, как и в случае видеосолитона МКдВ, усиливает эффект самофокусировки. При плоском входном фронте видеосолитона ($R'(0) = 0$) из (63) и из условия (30) получаем критерий дефокусировки

$$R_0 > R_c \equiv \pi\sqrt{\frac{5}{6g}}, \tag{64}$$

который ужесточает соответствующее условие, найденное из эйконального приближения $g > 0$. В этой связи критерий справедливости приближения «геометрической оптики» для солитона уравнения синус-Гордона можно записать в виде $R_0 \gg R_c$. При $R < R_c$ решение вида (58) не может быть реализовано. Оценим значение $R_c$ для электромагнитного видеосолитона, распространяющегося в системе туннельных переходов. Полагая $d \sim 10^{-18}$ ед. СГСЭ, $N \sim 10^{21}$ см$^{-3}$, $\omega_0 \sim 10^{13}$ с$^{-1}$, найдем $g \sim 10^3$ см$^{-2}$. Тогда $R_c \sim 1$ мм.

Исследуем теперь влияние поперечных возмущений на доменную стенку, описываемую (14) (см. также (15)) и имеющую в одномерном приближении вид

$$u = \pm\sqrt{\frac{g_0}{b_0}}\ \mathrm{th}\,\frac{z - vt}{l}. \tag{65}$$

Здесь $l$ — размер переходного слоя — связан со скоростью $v$ движения стенки «релятивистским» соотношением

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_0^2}}, \tag{66}$$

где $l_0 = \sqrt{2/g_0}$.

Учет неодномерности здесь, как и в случае солитона уравнения синус-Гордона, удобно провести в канонических переменных. Уравнению (15) сопоставим лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial u}{\partial\tau} + \frac{a_0}{2}u^2 - \frac{s}{4}u^4 + \frac{v_0}{4}\Delta_\perp u. \tag{67}$$

Пробное решение, соответствующее (65), выберем в виде

$$u = \pm\sqrt{\frac{g_0}{b_0}}\ \mathrm{th}\left[\rho(\tau - \Phi)\right], \tag{68}$$

где $\rho$ и $\Phi$ — функции переменной $\zeta = z + v_0 t$.

Подстановка (68) в (67) и интегрирование по $\tau$ приводит после использования (34) к «усредненному лагранжиану»

$$\Lambda \equiv -\frac{b_0}{g_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} L\,d\tau = \rho\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} + \frac{v_0}{4}\rho(\nabla_\perp\Phi)^2 + \frac{a_0}{2\rho} + \frac{v_0}{8}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)\frac{(\nabla_\perp\rho)^2}{\rho^3}. \tag{69}$$

Записывая с использованием (69) уравнения Эйлера–Лагранжа для $\Phi$ и $\rho$, придем к системе (20), где $\varphi = v_0\Phi/2$,

$$F = \frac{v_0^2}{\rho^3}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)\left[\Delta_\perp\rho - \frac{3(\nabla_\perp\rho)^2}{2\rho}\right]. \tag{70}$$

При этом уравнение процесса имеет вид

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{a_0 v_0}{2\rho^2}. \tag{71}$$

Таким образом, эйкональное приближение приводит к устойчивости решения (65) по отношению к поперечным возмущениям. Легко видеть также, что в одномерном случае пробное решение (68), (20), (71) в точности совпадает с (65), (66). Данное обстоятельство является еще одним доводом в пользу процедуры регуляризации, определяемой заменой (34).

Учет дифракции ($F \neq 0$) приводит к (24), (25) и (28) с точностью до замены $z \to \zeta$, где $U$ определяется выражением (63) с коэффициентами

$$G = \frac{5}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)\frac{v_0^2}{\rho_0^2 R_0^4}, \quad D = \frac{a_0 v_0^2}{4\rho_0^2 R_0^4},$$

а

$$f_1' = \frac{a_0 v_0}{2\rho_0^2 R_0^4} R^4 - 2v_0^2\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)\frac{R^2}{\rho_0^2 R_0^4}.$$

Критерий (30) приводит к условию устойчивости аксиально-симметричной доменной стенки по отношению к самофокусировке вида (61), где теперь

$$R_c = \sqrt{\frac{10}{g_0}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)}. \qquad (72)$$

В случае фазовых переходов второго рода, как отмечалось выше, параметр $a \sim T_c - T$. Следовательно, чем ближе к температуре перехода, тем более жестким становится условие (64); при этом $R_c \sim 1/\sqrt{T_c - T}$. Итак, формирование устойчивых доменов в окрестности $T_c$ более затруднительно, чем вдали от температуры фазового перехода.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное в настоящей работе исследование выявляет, на наш взгляд, важные особенности в поведении солитонов различного типа по отношению к поперечным возмущениям. В частности, показано, что дифракция влияет на поперечную динамику солитонов того или иного вида существенно различным образом. Так, в случае светлых и темных солитонов огибающей НУШ и видеосолитонов КдВ в квадратично нелинейных средах дифракция препятствует самофокусировке, если их мощности не превышают определенные критические значения. Соответствующие критерии определяются условиями (31), (39) и (48). На видеосолитоны же, кинки и доменные стенки в изотропных средах дифракция оказывает прямо противоположное влияние: способствует их самофокусировке. Причина такого различия получила здесь свое обоснование и связана со взаимной зависимостью поперечной и продольной динамики солитона, т. е. поперечное сжатие импульса сопровождается его продольным сжатием, пиковым усилением амплитуды и изменением скорости распространения. В этой связи возникает резонный вопрос: при каком максимальном числе колебаний, содержащихся в импульсе, конструктивная (дефокусирующая) роль дифракции сменяется ее деструктивной (фокусирующей) ролью. Из-за изменения характера роли дифракции здесь могут оказаться существенными эффекты аберрации. Ответ на данный вопрос может быть получен, например, при исследовании трехмерной динамики бризеров. Прямое использование в этом случае метода «усредненного лагранжиана» оказывается затруднительным из-за сложностей с аналитическими вычислениями соответствующих интегралов. Здесь необходимо либо неким образом модифицировать данный метод, либо искать принципиально новые аналитические подходы.

В этой связи представляет интерес исследование двухкомпонентных солитонов, распространяющихся в режиме синхронизма длинных и коротких волн или резонанса Захарова–Бенни [21, 22]. Такие солитоны образуются связанным состоянием солитона огибающей и видеосолитона и встречаются в различных областях физической науки: физике плазмы, оптике, акустике, в физике твердого тела и макромолекул. Вероятно, здесь следует ожидать эффектов конкуренции между различными влияниями дифракции на солитоны огибающей и видеосолитоны.

В связи с данными эффектами любопытным представляется также ответ на вопрос о том, как повлияет дифракция на видеосолитоны в среде, обладающей одновременно квадратичной и кубической нелинейностями.

Не менее фундаментальным является вопрос о влиянии поперечных возмущений на солитоны огибающей и видеосолитоны в эйкональной стадии. Из изложенного в разд. 3 настоящей работы ясно, что поперечная динамика солитонов огибающей определяется зависимостью их фазовой скорости (или фазового показателя преломления) от амплитуды. Это становится особенно очевидным, если заметить, что групповые скорости светлых и темных солитонов НУШ совершенно не зависят от их амплитуды. В то же время поперечная динамика видеосолитонов на эйкональной стадии определяется амплитудными зависимостями их групповых скоростей (или групповых показателей преломления). Это легко видеть, например, из сопоставления критериев эйкональной устойчивости и зависимостей групповых скоростей от солитонных длительностей, а также того факта, что амплитуды видеосолитонов растут с уменьшением $\tau_p$. Соответствующие рассуждения приведены в разд. 4, 5 и являются справедливыми также для солитонов уравнения синус-Гордона. По существу речь идет о формулировке солитонного (или нелинейного) принципа Ферма. Необходимо определить условия, при которых поперечная динамика определяется фазовым (для солитонов огибающей) или групповым (для видеосолитонов) показателем преломления, а в промежуточном случае (для бризеров) — возможно и тем, и другим в определенном отношении.

Поставленные здесь вопросы помимо фундаментального имеют еще и прикладной аспект в связи с возрастающим интересом к исследованиям нелинейного распространения лазерных импульсов длительностью в несколько периодов колебаний в различных средах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-02-17710а).

## ЛИТЕРАТУРА


1. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, ЖЭТФ **92**, 1612 (1987).
2. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *Квазигазовые неустойчивые среды*, Наука, Москва (1991).
3. Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме*, Наука, Москва (1988).
4. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).
5. Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко, *Колебания, волны, структуры*, Наука, Москва (2001).
6. D. H. Auston, K. P. Cheung, J. A. Valdmanis, and D. A. Kleinman, Phys. Rev. Lett. **53**, 1555 (1984).
7. T. Brabec and F. Krausz, Rev. Mod. Phys. **72**, 545 (2000).
8. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **111**, 404 (1997).
9. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **51**, 252 (1990).
10. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущаповский, ЖЭТФ **100**, 762 (1991).
11. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, ЖЭТФ **123**, 1160 (2003).
12. С. В. Нестеров, С. В. Сазонов, ФТТ **45**, 303 (2003).
13. А. Брус, Р. Каули, *Структурные фазовые переходы*, Мир, Москва (1984).
14. Б. А. Струков, А. П. Леванюк, *Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах*, Москва, Наука (1995).
15. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **119**, 419 (2001).
16. С. В. Сазонов, УФН **171**, 663 (2001).
17. A. Hasegawa and F. Tappert, Appl. Phys. Lett. **23**, 171 (1973).
18. Г. Агарвал, *Нелинейная волоконная оптика*, Мир, Москва (1996).
19. Р. Раджараман, *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля*, Мир, Москва (1985).
20. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1989).
21. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, Москва (1988).
22. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, Письма в ЖЭТФ **75**, 746 (2002).